# Ορμή – Διατήρηση της ορμής

## 1. Ορισμοί

### α. Σύστημα σωμάτων

Σύστημα σωμάτων ονομάζουμε δύο ή περισσότερα σώματα τα οποία αλληλεπιδρούν.

### β. Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις

**Εσωτερικές** δυνάμεις συστήματος είναι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης (δράσεις και αντιδράσεις) ανάμεσα στα σώματα του συστήματος.

**Εξωτερικές** δυνάμεις συστήματος λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώματα του συστήματος από σώματα έξω από το σύστημα,

### γ. Μονωμένο σύστημα

**Μονωμένο** σύστημα σωμάτων λέγεται αυτό στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι ίση με μηδέν.

## 2. Ορμή

### α. Ορμή υλικού σημείου :

**Ορμή** υλικού σημείου ονομάζεται το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητα του. Είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας , δηλαδή $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ .

Μονάδα ορμής στο S.I. είναι το 1 kg·m/s ή 1 N·s .

### β. Ορμή συστήματος σωμάτων :

Είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή $\vec{p} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + .... + m_\nu\vec{\upsilon}_\nu$ .

## 3. Δύναμη και μεταβολή της ορμής

Όταν σε ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις έχουμε αλλαγή της ταχύτητάς του άρα και της ορμής του.

Ένα σώμα μάζας m έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ . Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ η οποία προκαλεί επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ . Το σώμα σε χρόνο Δt αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ .

Για την δύναμη $\vec{F}$ από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε $\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ , αλλά $\vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ ή

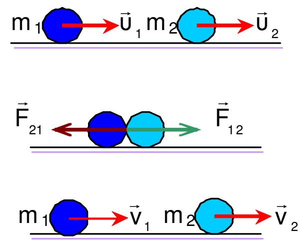
$\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$ άρα $\vec{F} = m\dfrac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$ ή $\vec{F} = \dfrac{m \cdot \vec{\upsilon}_2 - m \cdot \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$ .

Η αρχική ορμή του σώματος είναι $\vec{p}_1 = m\cdot\vec{\upsilon}_1$ και η τελική $\vec{p}_2 = m\cdot\vec{\upsilon}_2$ άρα για την δύναμη έχουμε $\vec{F} = \dfrac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t}$ ή $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Η σχέση αυτή είναι ο **2ος νόμος Newton** και μας δείχνει ότι για να μεταβληθεί η ορμή ενός σώματος πρέπει να ασκηθεί πάνω του δύναμη.

## 4. Η αρχή διατήρησης της ορμής

Οι δύο μπάλες με μάζες $m_1$ και $m_2$ κινούνται με σταθερές ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$. Οι μπάλες μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντίστοιχα. Κατά τη διάρκεια της κρούσης η οποία διάρκεσε χρόνο Δt στα σώματα ασκήθηκαν οι δυνάμεις $\vec{F}_{21}$ και $\vec{F}_{12}$ αντίστοιχα.




<u>1η μπάλα</u> : Η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\vec{v}_1 - \vec{\upsilon}_1$ και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο της κίνησης έχουμε $\vec{F}_{21} = m_1\dfrac{\vec{v}_1 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$ ❶

<u>2η μπάλα</u> : Η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\vec{v}_2 - \vec{\upsilon}_2$ και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο της κίνησης έχουμε $\vec{F}_{12} = m_2\dfrac{\vec{v}_2 - \vec{\upsilon}_2}{\Delta t}$ ❷

Για τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης από τον 3ο νόμο της κίνησης ισχύει : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ❸

Από τις εξισώσεις ❶ , ❷ και ❸ έχουμε :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Leftrightarrow m_1\frac{\vec{v}_1 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = -m_2\frac{\vec{v}_2 - \vec{\upsilon}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{\upsilon}_1\right) = -m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{\upsilon}_2\right) \Leftrightarrow m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{\upsilon}_1 = -m_2\vec{v}_2 + m_2\vec{\upsilon}_2 \Leftrightarrow$$
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{p}_{\alpha\rho\chi}.$$

Γενικεύοντας το συμπέρασμα αυτό για οποιοδήποτε σύστημα σωμάτων έχουμε την <u>αρχή διατήρησης της ορμής</u> : « Η ορμή ενός συστήματος διατηρείται εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα ».

<u>Παρατήρηση</u> : Αν οι ταχύτητες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση τις αλγεβρικές τιμές ( η ορμή θεωρείται θετική αν η ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς τα θετικά του άξονα και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση ). Άρα $m_1\cdot\upsilon_1 + m_2\cdot\upsilon_2 = m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2$

## 5. Κρούση

Κρούση ονομάζεται το φαινόμενο της σύγκρουσης δύο ή περισσότερων σωμάτων. Το φαινόμενο θεωρούμε ότι διαρκεί πολύ λίγο χρόνο.

Κατά τη διάρκεια του φαινομένου τα σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις δράσης – αντίδρασης και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελούν ένα μονωμένο σύστημα. Σε όλες τις κρούσεις ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

Ελαστική κρούση

Ονομάζεται η κρούση στην οποία ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Ανελαστική κρούση

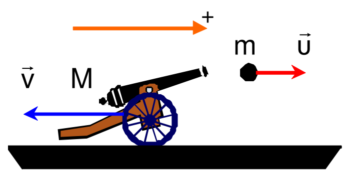
Ονομάζεται η κρούση στην οποία δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Ένα μέρος της αρχικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια (και θερμότητα).

**Πλαστική κρούση** : Είναι μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης στην οποία έχουμε συσσωμάτωμα μετά την κρούση , δηλαδή τα σώματα συμπεριφέρονται σαν ένα σώμα με μάζα $m_{ολ} = m_1 + m_2 + \ldots$

Παρατήρηση : Θεωρούμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή και τα σώματα έχουν μόνο κινητική ενέργεια.

## 6. Εφαρμογές της αρχής διατήρησης της ορμής

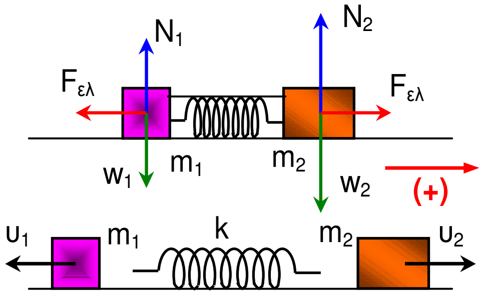
### α. Εφαρμογή στην ανάκρουση του όπλου




Όταν το όπλο πυροβολεί, εκτινάσσεται στην αντίθετη κατεύθυνση. Στο σύστημα όπλο – βλήμα οι δυνάμεις που ασκούνται είναι εσωτερικές , άρα το σύστημα είναι μονωμένο. Αν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα – όπλο θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα οπισθοχώρησης του όπλου (ταχύτητα ανάκρουσης).

$\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ}$ , αλλά $\vec{p}_{αρχ} = 0$ και $\vec{p}_{τελ} = m\vec{υ} + M\vec{V}$, άρα $m\cdot\vec{υ} + M\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow M\cdot\vec{V} = -m\cdot\vec{υ} \Rightarrow \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{υ}$

### β. Σύστημα ελατήριο – μάζα




Θεωρούμε το σύστημα με τα δύο σώματα και το ελατήριο που φαίνονται στο σχήμα. Τα δύο σώματα κινούνται χωρίς τριβές και το ελατήριο αρχικά συγκρατείται συμπιεσμένο με νήμα. Αν κόψουμε το νήμα τα σώματα θα κινηθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα. Επειδή κινούνται στην ίδια ευθεία τα διανύσματα της ορμής έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Το σύστημα είναι μονωμένο γιατί όλες οι δυνάμεις είναι εσωτερικές. Αν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε :

$\vec{p}_{ολ,τελ} = \vec{p}_{ολ,αρχ}$ ή $\vec{p}_{1,τελ} + \vec{p}_{2,τελ} = \vec{p}_{1,αρχ} + \vec{p}_{2,αρχ}$ άρα $-m_1υ_1 + m_2υ_2 = 0 + 0$ ή $m_1υ_1 = m_2υ_2$ ❶

Για το σύστημα των δύο σωμάτων μπορούμε να εφαρμόσουμε και την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) Για τις θέσεις του σχήματος ισχύει:

$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow 0 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 + 0$ ❷

Οι εξισώσεις ❶ και ❷ αποτελούν σύστημα εξισώσεων.

# Λυμένα Παραδείγματα

### Παράδειγμα 1. Υπολογισμός ορμής

Πόση είναι η ορμή ενός αυτοκινήτου μάζας m = 1.500 kg που κινείται με ταχύτητα υ = 20 m/s ;

**Απάντηση**: Είναι p = m·υ άρα p = 1500 kg·20 m/s άρα **p = 30.000 kg·m/s**

### Παράδειγμα 2. Δύναμη και ορμή

Πόση είναι η δύναμη που επιβραδύνει ένα αυτοκίνητο μάζας m = 1000 kg, αν αυτό έχει αρχική ταχύτητα
υ = 30 m/s και ακινητοποιείται μετά από χρόνο t = 20 s ;

**Απάντηση**: Από την σχέση $F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ έχουμε $F=\frac{p_2-p_1}{\Delta t}$ ή $F=\frac{m\upsilon_2-m\upsilon_1}{\Delta t}$ ή $F=\frac{0-1000\,kg\cdot 30\,m/s}{20\,s}$ άρα
**F = - 1500 N.** Το “ - ” δείχνει ότι η δύναμη επιβραδύνει το αυτοκίνητο.

### Παράδειγμα 3. Δύναμη και ορμή

Ένα κιβώτιο αφήνεται να πέσει από ελικόπτερο. Αν η μάζα του κιβωτίου είναι m = 20 kg , ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ; Αν g = 10 m/s$^2$ πόση ταχύτητα θα αποκτήσει το κιβώτιο μετά από δύο δευτερόλεπτα ;

**Απάντηση**: Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο κιβώτιο είναι το βάρος του, άρα $F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t}=mg$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t}=20\,kg\cdot 10\,m/s^2$ άρα $\frac{\Delta p}{\Delta t}=200\,kg\cdot m/s^2$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t}=200\,N$.

Είναι υ = g·t άρα υ = 10 m/s$^{-2}$ 2 s άρα **υ = 20 m/s**

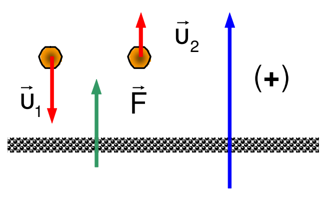
### Παράδειγμα 4. Δύναμη και ορμή

Μια μπάλα μάζας 0,3 kg αφήνεται να πέσει από τέτοιο ύψος, ώστε να φτάσει στο δάπεδο με ταχύτητα $\upsilon_1$ = 10 m/s. Η μπάλα αναπηδά κατακόρυφα με ταχύτητα $\upsilon_2$ = 5 m/s αφού μείνει σ' επαφή με το δάπεδο για χρόνο Δt = 0,05 s. Δίνεται g = 10 m/s$^2$. Να βρείτε :

**α.** Τη μεταβολή της ορμής της μπάλας κατά τη διάρκεια Δt.

**β.** Τη μέση δύναμη που δέχθηκε η μπάλα.

**Απάντηση**:



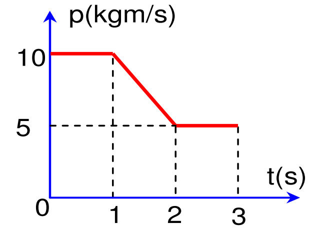

**α.** Στο σχήμα φαίνεται η αρχική και η τελική ταχύτητα της μπάλας και η δυναμη που δέχτηκε η μπάλα από το δάπεδο. Ορίζουμε αυθαίρετα (+) φορά προς τα πάνω. Είναι $\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$ ή $\Delta p=m\upsilon_2-(-m\upsilon_1)$ ή $\Delta p=m(\upsilon_2+\upsilon_1)$ άρα
$\Delta p=0,3\,kg\cdot(5\,m/s+10\,m/s)$ ή **Δp = 4,5 kg·m/s.**

**β**. Η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής της μπάλας , άρα $\Sigma\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

ή $F-w=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $F=\frac{\Delta p}{\Delta t}+mg$ ή $F=\frac{4,5\,kg\cdot m/s}{0,05\,s}+0,3\,kg\cdot 10\,m/s^2$ άρα **F = 93 N.**

### Παράδειγμα 5. Δύναμη και ορμή

Η ορμή ενός σώματος μάζας m = 2 kg μεταβάλλεται όπως φαίνεται στην εικόνα. Η αρχική και η τελική ορμή έχουν την ίδια κατεύθυνση.




**α.** Πόση είναι η ελάχιστη και πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος;

**β.** Να παραστήσετε γραφικά τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

<u>Λύση</u>

**α.** Από το σχήμα βλέπουμε ότι η μέγιστη ορμή είναι p = 10 kg·m/s άρα από την σχέση $p=m\cdot\upsilon$ ή $\upsilon=\frac{p}{m}$ έχουμε $\upsilon_{max}=\frac{10\,kg\cdot m/s}{2\,kg}$ ή $\boldsymbol{\upsilon_{max}=5\,m/s}$.

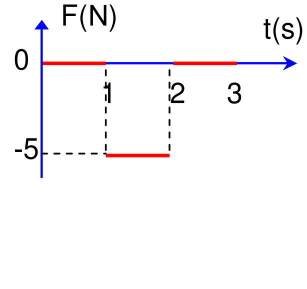
Από το σχήμα βλέπουμε ότι η ελάχιστη ορμή είναι p = 5 kg·m/s άρα από την σχέση $p=m\cdot\upsilon$ ή $\upsilon=\frac{p}{m}$ έχουμε $\upsilon_{min}=\frac{5\,kg\cdot m/s}{2\,kg}$ ή $\boldsymbol{\upsilon_{min}=2,5\,m/s}$.

**β.** Από $t_0$ = 0 έως $t_1$ = 1 s η ορμή είναι σταθερή άρα από την $F_1=\frac{\Delta p_1}{\Delta t_1}\rightarrow F_1=0$.

Από $t_1$ = 1 s έως $t_2$ = 2 s η ορμή μεταβάλλεται άρα από την $F_2=\frac{\Delta p_2}{\Delta t_2}$ έχουμε $F_2=\frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ ή $F_2=\frac{5\,kg\cdot m/s-10\,kg\cdot m/s}{2\,s-1\,s}$ άρα $F_2=-5N$ (σταθερή).

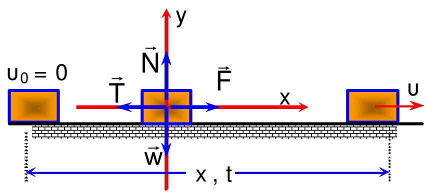
Από $t_2$ = 2 s έως $t_3$ = 3 s η ορμή είναι σταθερή άρα από την $F_3=\frac{\Delta p_3}{\Delta t_3}$ έχουμε $F_3=0$.

Με βάση τις παραπάνω τιμές κατασκευάζουμε το διάγραμμα της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σώμα.



### Παράδειγμα 6. Δύναμη και ορμή

Ένα κιβώτιο μάζας 20 kg, ωθείται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο το κιβώτιο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Το κιβώτιο είναι αρχικά ακίνητο και μία σταθερή οριζόντια δύναμη F = 50 N, το μετακινεί για χρόνο t = 4 s. Πόση είναι τότε η ταχύτητα του κιβωτίου; Είναι $g = 10\ m/s^2$.




**Απάντηση**: Στο σχήμα βλέπουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο κατά την κίνησή του.

$\Sigma\vec{F}_y = 0$ άρα $N - w = 0$ ή $N = m \cdot g$ ή N = 20 kg·10 m/s ή N = 200 N.

Είναι $T = μ \cdot N$ ή T = 0,2·200 N άρα T = 40 N.

Είναι $\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ ή $\Delta p = (F - T)\cdot\Delta t$ ή $m\cdot υ - 0 = (F-T)\cdot(t-0)$ άρα $υ = \frac{(F-T)\cdot t}{m}$ άρα $υ = \frac{(50\,N - 20\,N)\cdot 4\,s}{20\,kg}$ ή

**υ = 2 m/s.**

### Παράδειγμα 7. Δύναμη και ορμή

Ένα μπαλάκι του τένις μάζας m = 0,1 kg πέφτει με οριζόντια ταχύτητα $υ_1$ = 20 m/s σε κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με επίσης οριζόντια ταχύτητα $υ_2$ = 15 m/s. Να βρείτε:

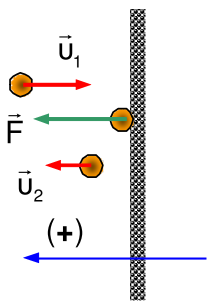
**α.** Την ορμή που έχει το μπαλάκι πριν και μετά την επαφή του με τον τοίχο.

**β.** Τη μεταβολή της ορμής του, λόγω της σύγκρουσης με τον τοίχο.

**γ.** Τη μέση δύναμη που δέχθηκε το μπαλάκι από τον τοίχο, αν η επαφή διαρκεί χρόνο Δt = 0,01 s.

**Απάντηση**:

**α.** Θεωρούμε θετική φορά προς τα αριστερά , όπως φαίνεται στο σχήμα.




Η αρχική ορμή έχει μέτρο $p_1 = m\cdot υ_1$ ή $p_1$ = 0,1 kg·20 m/s ή **$p_1$ = 2 kg·m/s**.

Η τελική ορμή έχει μέτρο $p_2 = m\cdot υ_2$ ή $p_2$ = 0,1 kg·15 m/s ή **$p_2$ = 1,5 kg·m/s**.

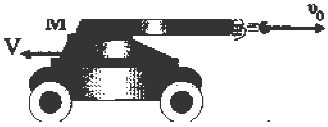
**β.** Η μεταβολή της ορμής είναι $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ή $\Delta p = p_2 - (-p_1)$ άρα $\Delta p = p_2 + p_1$ άρα $\Delta p = 1,5\,kg\cdot m/s + 2\,kg\cdot m/s$ άρα $\mathbf{\Delta p = 2,5\,kg\cdot m/s}$

**γ.** Για την μέση δύναμη που δέχτηκε το μπαλάκι από τον τοίχο εφαρμόζουμε τη σχέση $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ ή

$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ άρα $F = \frac{2,5\,kg\cdot m/s}{0,01\,s}$ άρα $\mathbf{F = 250\,N}$.

### Παράδειγμα 8. Αρχή διατήρησης ορμής

Από ακίνητο πυροβόλο, του οποίου η μάζα είναι M = 2000 kg, εκτοξεύεται βλήμα μάζας m = 5 kg με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$ = 800 m/s.




**α.** Πόση ταχύτητα αποκτά το πυροβόλο μετά την εκπυρσοκρότηση;

**β.** Αν το πυροβόλο έχει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,4, για πόσο χρόνο θα κινηθεί;

**Απάντηση**: **α.** Θεωρούμε θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση κίνησης του βλήματος.

Στο σύστημα βλήμα – πυροβόλο οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν συνισταμένη μηδέν άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής : $\vec{p}_{ολ,τελ}=\vec{p}_{ολ,αρχ}$ . Η αρχική ορμή του συστήματος είναι ίση με μηδέν ενώ η τελική είναι το άθροισμα των ορμών του βλήματος και του πυροβόλου. Άρα $\vec{p}_{βλ}+\vec{p}_{πυρ}=0$ ή

$m\cdot υ_0 - M\cdot v = 0$ ή $m\cdot υ_0 = M\cdot v$ άρα $v=\dfrac{m\cdot υ_0}{M}$ ή $v=\dfrac{5\,kg\cdot 800\,m/s}{2000\,kg}$ άρα $\mathbf{v=2\,m/s}$.

**β.** Στο πυροβόλο ασκούνται οι δυνάμεις: Βάρος w , κάθετη αντίδραση από το δάπεδο N και τριβή T

Στον άξονα y : $ΣF_y$ = 0 άρα N – w = 0 άρα N = M·g ή N = 2000 kg·10 m/s$^2$ άρα N = 20000 N. Αλλά T = μ·N ή T = 0,4·20000 N άρα T = 8000 N.

Η επιτάχυνση του πυροβόλου είναι $α=-\dfrac{T}{M}$ ή $α=-\dfrac{8000\,N}{2000\,kg}$ άρα α = - 4 m/s$^2$. Όταν σταματάει υ = 0 άρα $0=v+α\cdot t$ ή $t=-\dfrac{v}{α}$ άρα $t=\dfrac{2\,m/s}{4\,m/s^2}$ άρα **t = 0,5 s.**

### Παράδειγμα 9. Αρχή διατήρησης ορμής

Δύο σώματα $m_1$ = 1 kg και $m_2$ = 4 kg κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $υ_1$ = 30 m/s και $υ_2$ = 5 m/s αντίστοιχα στην ίδια κατεύθυνση και συγκρούονται πλαστικά. Να υπολογίσετε :

**α.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά τη σύγκρουση.

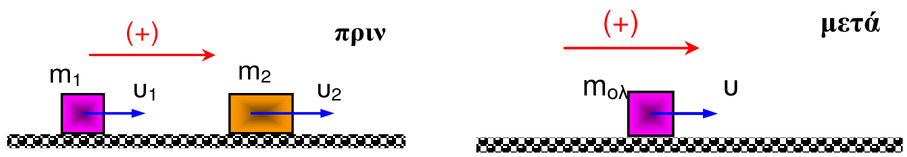
**β.** Την μεταβολή της ορμής του κάθε σώματος.

**γ.** Την μέση δύναμη που δέχθηκε κάθε σώμα αν η διάρκεια της κρούσης είναι Δt = 0,01 s.

**δ.** Την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος στην κρούση.

**Απάντηση**:

**α.**



Η ορμή του συστήματος είναι : $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ή $p_{ολ} = m_1 υ_1 + m_2 υ_2$ άρα $p_{ολ} = 1\,kg \cdot 30\,m/s + 4\,kg \cdot 5\,m/s$ άρα $\mathbf{p_{ολ} = 50\,kg \cdot m/s}$.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε : $\vec{p}_{ολ,τελ} = \vec{p}_{ολ,αρχ}$ ή $(m_1 + m_2) \cdot υ = p_{ολ}$ ή $υ = \dfrac{p_{ολ}}{m_1 + m_2}$ άρα

$υ = \dfrac{50\,kg \cdot m/s}{1\,kg + 4\,kg}$ άρα $\mathbf{υ = 10\,m/s}$.

**β.** Για το $m_1$ είναι : $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,τελ} - \vec{p}_{1,αρχ}$ άρα $\Delta p_1 = m_1 υ - m_1 υ_1$ ή $\Delta p_1 = 1\,kg \cdot 10\,m/s - 1\,kg \cdot 30\,m/s$ επομένως $\Delta p_1 = -20\,kg \cdot m/s$.

Για το $m_2$ είναι : $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_{2,τελ} - \vec{p}_{2,αρχ}$ άρα $\Delta p_2 = m_2 υ - m_2 υ_2$ ή $\Delta p_2 = 4\,kg \cdot 10\,m/s - 4\,kg \cdot 5\,m/s$ επομένως $\Delta p_2 = 20\,kg \cdot m/s$.

Παρατηρούμε ότι οι μεταβολές των ορμών είναι αντίθετες, όπως επιβάλλει η Α.Δ.Ο.

**γ.** Η δύναμη που ασκεί το σώμα $m_1$ στο σώμα $m_2$ (εσωτερική δύναμη , αντίδραση της δύναμης που ασκεί το σώμα $m_2$ στο σώμα $m_1$) είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της ορμής του σώματος $m_2$ άρα $F_{12} = \dfrac{\Delta p_2}{\Delta t}$ ή $F_{12} = \dfrac{20\,kg \cdot m/s}{0,01\,s}$ άρα $\mathbf{F_{12} = 2000\,N}$.

Η δύναμη που ασκεί το σώμα $m_2$ στο σώμα $m_1$ (εσωτερική δύναμη , αντίδραση της δύναμης που ασκεί το σώμα $m_1$ στο σώμα $m_2$) είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της ορμής του σώματος $m_1$ άρα $F_{21} = \dfrac{\Delta p_1}{\Delta t}$ ή $F_{21} = \dfrac{-20\,kg \cdot m/s}{0,01\,s}$ άρα $\mathbf{F_{21} = -2000\,N}$.

**δ.** Η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ είναι $K = \dfrac{1}{2} m υ^2$. Η απώλεια κινητικής ενέργειας στην κρούση είναι : $\Delta K = K_{ολ,τελ} - K_{ολ,αρχ}$ άρα

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2^2\right) \text{ επομένως}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}(1\,kg + 4\,kg)(10\,m/s)^2 - \left(\frac{1}{2} 1\,kg \cdot (30\,m/s)^2 + \frac{1}{2} 4\,kg \cdot (5\,m/s)^2\right) \text{ ή}$$

$\Delta K = 250\,J - 500\,J$ άρα $\mathbf{\Delta K = -250\,J}$.

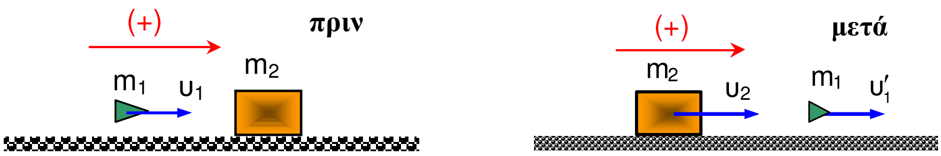
**Παράδειγμα 17. Αρχή διατήρησης ορμής**

Βλήμα μάζας $m_1 = 0,2\,kg$, κινείται με οριζόντια ταχύτητα $υ_1 = 500\,m/s$ και διαπερνά ένα ακίνητο κιβώτιο μάζας $m_2 = 5\,kg$, που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν το βλήμα βγαίνει από το κιβώτιο με ταχύτητα $υ_1' = 200\,m/s$ σε χρόνο $\Delta t = 0,05\,s$ να βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα που αποκτά το κιβώτιο.

**β.** Τη μέση οριζόντια δύναμη που ασκεί το βλήμα στο κιβώτιο.

**Απάντηση**:




**α.** Στο σύστημα βλήμα – κιβώτιο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής : $\vec{p}_{ολ,τελ} = \vec{p}_{ολ,αρχ}$ ή $m_1 \cdot υ_1' + m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1$ άρα $m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1 - m_1 \cdot υ_1'$ επομένως $υ_2 = \dfrac{m_1 \cdot (υ_1 - υ_1')}{m_2}$ ή $υ_2 = \dfrac{0,2\,kg \cdot (500\,m/s - 200\,m/s)}{5\,kg}$ άρα $\mathbf{υ_2 = 12\,m/s}$.

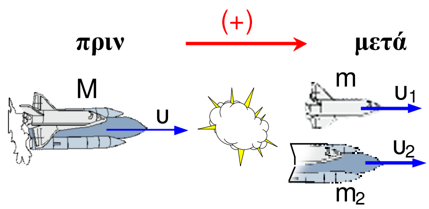
**β.** Η δύναμη που ασκεί το βλήμα στο κιβώτιο (εσωτερική δύναμη , αντίδραση της δύναμης που ασκεί το κιβώτιο στο βλήμα) είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της ορμής του κιβωτίου άρα

$F = \dfrac{\Delta p_{κιβ}}{\Delta t}$ ή $F = \dfrac{p_{κιβ,τελ} - p_{κιβ,αρχ}}{\Delta t}$ ή $F = \dfrac{m_2 \cdot υ_2 - 0}{\Delta t}$ άρα $F = \dfrac{5\,kg \cdot 12\,m/s - 0}{0,05\,s}$ άρα $\mathbf{F = 1200\,N}$.

### Παράδειγμα 18. Έκρηξη και Διατήρηση Ορμής

Ένα διαστημόπλοιο συνολικής μάζας Μ = 2000 kg κινείται κατακόρυφα απομακρυνόμενο από τη Γη. Κάποια στιγμή και ενώ η ταχύτητα του είναι υ = 1000 m/s, το διαστημόπλοιο διαχωρίζεται σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι έχει μάζα $m_1$ = 1200 kg και η ταχύτητα του αμέσως μετά τη διάσπαση είναι $υ_1$ = 2.500 m/s, ίδιας κατεύθυνσης με αυτήν της ταχύτητας υ. Να βρείτε την ταχύτητα που έχει το άλλο κομμάτι αμέσως μετά τη διάσπαση.

**Απάντηση**: Η μάζα του δεύτερου κομματιού είναι $m_2$ = M – m ή $m_2$ = 2000 kg – 1200 kg άρα $m_2$ = 800 kg.




Στο διαστημόπλοιο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής : $\vec{p}_{ολ,τελ} = \vec{p}_{ολ,αρχ}$ ή $m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = M \cdot υ$ άρα $m_2 \cdot υ_2 = M \cdot υ - m_1 \cdot υ_1$ ή $υ_2 = \dfrac{Mυ - m_1 υ_1}{m_2}$ ή $υ_2 = \dfrac{2000\,kg \cdot 1000\,m/s - 1200\,kg \cdot 2500\,m/s}{800\,kg}$ άρα $\mathbf{υ_2 = -1250\,m/s}$.

<u>Παρατήρηση :</u> Το ( – ) στην αλγεβρική τιμή της ταχύτητας δείχνει ότι το κομμάτι κινείται προς τα αρνητικά, δηλαδή αντίθετα από την αρχική κατεύθυνση κίνησης του διαστημόπλοιου.

**2.1.** Βλήμα μάζας m = 10 g κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$ και σφηνώνεται σε ξύλινο κύβο μάζας M = 990 g που είναι δεμένος στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 400 N/m. Αν το ελατήριο συμπιεστεί κατά Δx = 10 cm και το δάπεδο είναι λείο να υπολογιστούν:

**α.** Η ταχύτητα του ξύλου μετά την κρούση.

**β.** Η ταχύτητα $υ_o$.

**2.2.** Δίσκος μάζας m κρέμεται στην άκρη κατακόρυφου ελατηρίου και προκαλεί σε αυτό επιμήκυνση $x_o$ = 4 cm. Ένα κομμάτι στόκου μάζας m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος h = 0,6 m πάνω από το δίσκο και κολλάει σε αυτόν. Να υπολογιστεί η μέγιστη μετατόπιση του δίσκου από τη θέση ισορροπίας του.

**2.3.** Βλήμα μάζας m = 0,1 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$ = 80 m/s και κτυπάει κάθετα σε κορμό δέντρου πάχους d = 0,1 m και εξέρχεται με ταχύτητα $υ = \frac{υ_0}{4}$ σε χρόνο t = 0,5 s. Να υπολογιστεί :

**α.** η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του βλήματος.

**β.** Η μεταβολή της ορμής του βλήματος.

**γ.** το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα.

**δ.** το μέτρο της δύναμης που ασκήθηκε από τον κορμό στο βλήμα αν θεωρηθεί σταθερή.

**2.4.** Σφαίρα μάζας m = 0,5 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h = 22m πάνω από το έδαφος. Σε ύψος $h_1$ = 2 m από το έδαφος συναντά στρώμα παραφίνης πάχους s = 1 m το οποίο διαπερνά και βγαίνει από αυτό με υ = 4 m/s , ενώ στη συνέχεια πέφτει στο έδαφος. Ζητείται :

**α.** η απώλεια ενέργειας της σφαίρας μέσα στην παραφίνη.

**β.** η ταχύτητα υ΄ με την οποία η σφαίρα πέφτει στο έδαφος και

**γ.** η αντίσταση της παραφίνης αν θεωρηθεί σταθερή. Δίνεται g = 10 $m/s^2$.

**2.5.** Δύο σώματα με μάζες $m_1$ = 6 kg και $m_2$ = 4 kg κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητες $υ_1$ = 10 m/s και $υ_2$ = 5 m/s. Τα σώματα συγκρούονται και μένουν ενωμένα μετά την κρούση. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος. [Απ. υ = 8 m/s]

**2.6.** Δύο σώματα Α και Β αποτελούν σύστημα σωμάτων μάζας Μ = 200 kg. Το σώμα Α κινείται με ταχύτητα $υ_1$ = 80 m/s και το σώμα Β κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 45 m/s. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά και το συσσωμάτωμα τους κινείται με ταχύτητα V = 30 m/s κατά τη φορά κίνησης του σώματος Α. Να υπολογίσετε τη μάζα κάθε σώματος.

[Απ. $m_A$ = 120 kg, $m_B$ = 80 kg]

**2.7.** Δύο σώματα με μάζες $m_1$ = 10 kg και $m_2$ κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $υ_1$ = 10 m/s και $υ_2$ = 2 m/s. Τα σώματα συγκρούονται και μένουν ενωμένα μετά την κρούση. Να βρεθεί η μάζα $m_2$ του δεύτερου σώματος αν η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι υ = 2 m/s. [Απ. $m_2$ = 20 kg]

**2.8.** Δύο μπάλες με μάζες $m_1$ = 10 kg και $m_2$ κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $υ_1$ = 2 m/s και $υ_2$ = 3 m/s και συγκρούονται. Μετά την κρούση οι δύο μπάλες κινούνται με ταχύτητες που έχουν την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από την αρχική τους ταχύτητα και μέτρα $v_1$ = 3m/s και $v_2$ = 1m/s. Να υπολογιστεί η μάζα $m_2$. [Απ. $m_2$ = 12,5 kg]

**2.9.** Δύο σφαίρες Α και Β ολισθαίνουν πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, ώστε να πλησιάζουν η μία την άλλη. Αν μετά την κρούση τους η σφαίρα Α ακινητοποιείται, ενώ η σφαίρα Β κινείται με ταχύτητα μέτρου 6 m/s, να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα των δύο σφαιρών. [Απ. 3 m/s]

**2.10.** Σώμα μάζας Μ = 10 kg ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Βλήμα μάζας m = 1 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$ = 100 m/s. Το βλήμα διαπερνά το πρώτο σώμα και εξέρχεται με ταχύτητα $v_1$ = 40 m/s. Να βρεθεί η ταχύτητα του πρώτου σώματος αμέσως μετά την κρούση.

[Απ. υ = 6 m/s]

**2.11.** Ξύλινος κύβος μάζας M = 2 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα 20 m/s. Ένα βλήμα με μάζα m = 100 g κινείται οριζόντια και ομόρροπα με τον κύβο, με ταχύτητα 400 m/s. Το βλήμα διαπερνά ακαριαία τον κύβο και βγαίνει από αυτόν με ταχύτητα 160 m/s. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύβου. [Απ. 32 m/s]

**2.12.** Σώμα μάζας m = 10 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ = 20 m/s. Το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες $m_1$ = 2 kg και $m_2$ = 8 kg. Τα δύο κομμάτια αμέσως μετά τη διάσπαση κινούνται οριζόντια. Η ταχύτητα του κομματιού μάζας $m_1$ αμέσως μετά τη διάσπαση είναι $υ_1$ = 40 m/s. Να βρεθεί η ταχύτητα του άλλου κομματιού. [ Απ. : $υ_2$ = 6 m/s ]

**2.13.** Μια μπάλα μάζας m = 0,3 kg πέφτει από ύψος $h_1$ = 20 m σε οριζόντιο έδαφος και αναπηδά σε ύψος $h_2$ = 5 m πάνω από το έδαφος. Αν η διάρκεια της επαφής της μπάλας με το έδαφος είναι Δt = 0,01s να βρεθεί η μέση δύναμη που ασκήθηκε στη μπάλα από το έδαφος.
Δίνεται g = 10 m/s$^2$. [ Απ. : F = 903 N ]

**2.14.** Σώμα μάζας $m_1$ = 3 kg κινείται με ταχύτητα $u_1$ = 10 m/s πάνω στον άξονα x και συγκρούεται με ακίνητο σώμα μάζας $m_2$ = 2 kg. Τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται πάνω στον άξονα x. Η ταχύτητα της μάζας $m_1$ μετά την κρούση είναι $v_1$ = 2 m/s. Να βρεθούν :

**α.** Η ταχύτητα της μάζας $m_2$ μετά την κρούση.

**β.** Η μεταβολή της ορμής κάθε μάζας. [Απ. α. $v_2$ = 12m/s, β. $Δp_1$ = - 24kg·m/s, $Δp_2$ = 24kg·m/s]

**2.15.** Βλήμα μάζας m = 0,1 kg κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλο μάζας M = 9,9 kg που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ της επιφάνειας και του ξύλου είναι μ = 0,4. Το σύστημα ξύλο – βλήμα μετατοπίζεται κατά Δx = 2m πάνω στην οριζόντια επιφάνεια και σταματάει. Να βρεθεί η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση. Δίνεται g = 10 m/s$^2$. [Απ. : υ = 400 m/s]

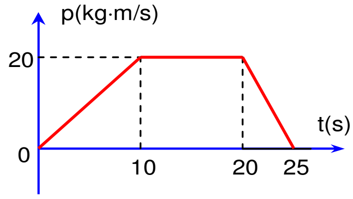
**2.16.** Σώμα μάζας m = 3 kg ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες $m_1$ = 1 kg και $m_2$ = 2 kg. Τα δύο κομμάτια αμέσως μετά τη διάσπαση κινούνται οριζόντια. Η ταχύτητα του κομματιού μάζας $m_1$ αμέσως μετά τη διάσπαση είναι $υ_1$ = 20 m/s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των κομματιών και της οριζόντιας επιφάνειας είναι μ = 0,2. Δίνεται g = 10 m/s$^2$. Να υπολογιστεί πόσο θα απέχουν μεταξύ τους οι μάζες $m_1$ και $m_2$ :

**α.** Όταν θα έχουν σταματήσει.

**β.** Σε χρόνο Δt = 6 s μετά την διάσπαση. [Απ. : α. Δx = 125m , β. Δx = 109m]

**2.17.** Σώμα μάζας M = 70 kg κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα υ = 300 m/s και ξαφνικά εκρήγνυται σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι μάζας $m_1$ = 30 kg κινείται κατά την ίδια διεύθυνση και φορά με το αρχικό κομμάτι με ταχύτητα $υ_1$ = 500 m/s. Να υπολογιστούν **α.** η ταχύτητα του άλλου κομματιού, **β.** η ενέργεια της έκρηξης. [ Απ α. $υ_2$ = 150 m/s , β. $E_{εκρ}$ = 1,05·10$^6$ J ]

**2.18.** Σώμα κινείται ευθύγραμμα και η γραφική παράσταση της ορμής σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα. Η αρχική και η τελική ορμή έχουν την ίδια κατεύθυνση. Να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.



Διάγραμμα ορμής - χρόνου

**2.19.** *** Ένα πυροβόλο όπλο είναι στερεωμένο σε μια σανίδα η οποία είναι ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο έδαφος. Η κάνη του πυροβόλου βρίσκεται σε ύψος h = 80 cm από το οριζόντιο έδαφος. Κάποια στιγμή από το πυροβόλο εκτοξεύεται βλήμα μάζας m = 0,1 kg με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_0$ = 100 m/s. Η μάζα του συστήματος σανίδα – πυροβόλο – βλήμα είναι M = 2,1 kg. Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση του σημείου που το βλήμα χτυπάει στο έδαφος και της άκρης κάννης του πυροβόλου, τη στιγμή που το βλήμα χτυπάει στο έδαφος. Δίνεται g = 10 m/s$^2$.

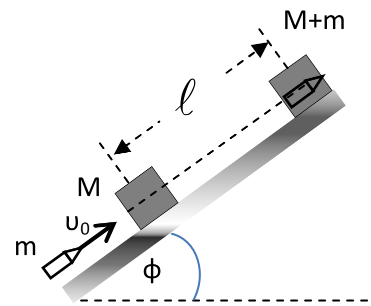
[Απ. 42 m]

**2.20.** Μια βάρκα που έχει μήκος $\ell = 6m$ και μάζα M = 120 kg, είναι ακίνητη στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης. Ένας άνθρωπος που έχει μάζα m = 60 kg, είναι αρχικά ακίνητος στη μία άκρη της βάρκας. Ο άνθρωπος μετακινείται με σταθερή ταχύτητα στο άλλο άκρο της βάρκας. Κατά πόσο θα μετακινηθεί η βάρκα στη διάρκεια της μετακίνησης του ανθρώπου; (Τριβές και αντιστάσεις θεωρούνται αμελητέες και οι κινήσεις ομαλές) [Απ. 2 m]

**2.21.** Δύο κιβώτια με μάζες $M_1$ = 2 kg και $M_2$ = 3,9 kg είναι ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση $\ell = 20m$ μεταξύ τους. Ένα βλήμα μάζας m = 0,1 kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_0$ = 400 m/s διαπερνά ακαριαία το πρώτο κιβώτιο και βγαίνοντας από αυτό με ταχύτητα $\upsilon'_0 = 200 m/s$ σφηνώνεται στο δεύτερο κιβώτιο. (Θεωρούμε οριζόντια την κίνηση του βλήματος) Σε πόσο χρόνο, από τη στιγμή που το βλήμα συγκρούστηκε με το πρώτο κιβώτιο, τα δύο κιβώτια θα συγκρουστούν μεταξύ τους; [Απ 3,9 s]


**2.22.** Το κιβώτιο μάζας M = 5 kg βρίσκεται ακίνητο σε απόσταση $\ell = 1m$ από την πάνω άκρη λείου πλάγιου επιπέδου γωνίας φ = 30$^0$. Ένα βλήμα μάζας m = 0,2 kg, που κινείται παράλληλα με το πλάγιο επίπεδο με ταχύτητα $\upsilon_0$, σφηνώνεται στο κιβώτιο. Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και g = 10 m/s$^2$. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας $\upsilon_0$, ώστε το συσσωμάτωμα να φτάσει στην κορυφή του πλάγιου επιπέδου.

[Απ. $\upsilon_0 = 26\sqrt{10}\, m/s$ ή $\upsilon_0 \cong 82{,}22\, m/s$]




**2.23.** Πάνω σε ανοιχτό όχημα μάζας M = 10 kg, που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ = 10 m/s, πέφτει κατακόρυφα σώμα μάζας m = 6 kg. Αν η κρούση είναι πλαστική, να υπολογίσετε την τελική ταχύτητα του οχήματος. [Απ. 6,25 m/s]

**2.24.** Ένα σώμα μάζας $m_1$ = 2 kg αφήνεται ελεύθερο από ύψος h = 80 m. Δύο δευτερόλεπτα αργότερα εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω ένα δεύτερο σώμα ίσης μάζας με το πρώτο, το οποίο συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο. Με πόση ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί το δεύτερο σώμα, ώστε τι συσσωμάτωμα να φτάσει στο αρχικό ύψος h; Δίνεται g = 10 m/s$^2$.

[Απ. 83,24 m/s]

**2.25.** Ένα φορτηγό βαγόνι μάζας $m_1$ = 32000 kg κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$ = 2 m/s και συγκρούεται με άλλο βαγόνι, μάζας $m_2$ = 25000 kg, που προπορεύεται με ταχύτητα $\upsilon_2$ = 1,2 m/s. Αν τα βαγόνια ενωθούν, ποια η ταχύτητά τους και ποια η απώλεια στην κινητική ενέργεια του συστήματος;

[Απ. 1,65 m/s 4400 J]