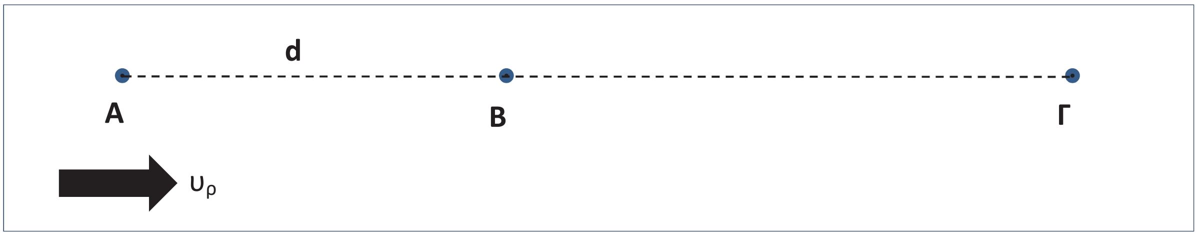
Κεφάλαιο 1

Καμπυλόγραμμες Κινήσεις: Οριζόντια Βολή, Κυκλική Κίνηση

Σύνθετες κινήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Μια βενζινάκατος κινείται κατά τη φορά ροής ενός ποταμού και σε ένα σημείο Α προσπερνάει μια σχεδία, την οποία παρασέρνει το ρεύμα του ποταμού (κινείται με την ταχύτητα ροής). Μετά από 1 h από τη συνάντηση η βενζινάκατος γυρίζει πίσω. Κατά την επιστροφή συναντάει τη σχεδία σε ένα σημείο Β που απέχει απόσταση (ΑΒ) = d = 6 km από το σημείο Α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ροής του ποταμού.

Απάντηση:



Έστω Α το πρώτο σημείο συνάντησης με τη σχεδία τη χρονική στιγμή t = 0, Γ το σημείο στο οποίο η βενζινάκατος γυρίζει πίσω τη χρονική στιγμή t_1 = 1 h και Β το δεύτερο σημείο συνάντησης, τη χρονική στιγμή t_2. Η σχεδία επομένως καλύπτει την απόσταση ΑΒ σε χρόνο t_2 με ταχύτητα $υ_ρ$, η βενζινάκατος την απόσταση ΑΓ σε χρόνο t_1 = 1 h με ταχύτητα $υ_β + υ_ρ$ και την απόσταση ΓΒ σε χρόνο $t_2 – t_1$ με ταχύτητα $υ_β – υ_ρ$.

Σχεδία: $$(AB) = d = \upsilon_\rho \cdot t_2 \qquad (1)$$

Βενζ/τος: $$(\text{ΑΓ}) = (\upsilon_\beta + \upsilon_\rho)t_1 \qquad (2)$$

$$(\text{ΓΒ}) = (\upsilon_\beta - \upsilon_\rho)(t_2 - t_1) \qquad (3)$$

Από το σχήμα: $d = (\text{ΑΓ}) - (\text{ΓΒ}) \overset{2,3}{\Leftrightarrow} d = (\upsilon_\beta + \upsilon_\rho)t_1 - (\upsilon_\beta - \upsilon_\rho)(t_2 - t_1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d = \upsilon_\beta \cdot t_1 + \cancel{\upsilon_\rho \cdot t_1} - (\upsilon_\beta - \upsilon_\rho)t_2 + \upsilon_\beta \cdot t_1 - \cancel{\upsilon_\rho \cdot t_1} \Leftrightarrow d = 2\upsilon_\beta \cdot t_1 - (\upsilon_\beta - \upsilon_\rho)t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{2\upsilon_\beta \cdot t_1 - d}{\upsilon_\beta - \upsilon_\rho}$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$d = \upsilon_\rho \cdot \frac{2\upsilon_\beta \cdot t_1 - d}{\upsilon_\beta - \upsilon_\rho} \Leftrightarrow d \cdot \upsilon_\beta - \cancel{d \cdot \upsilon_\rho} = 2\upsilon_\beta \cdot \upsilon_\rho \cdot t_1 - \cancel{d \cdot \upsilon_\rho} \Leftrightarrow \upsilon_\rho = \frac{d}{2 \cdot t_1} = 3\ \text{km/h}$$

1.1. Ένας παρατηρητής που είναι εφοδιασμένος με radar, στέκεται στην όχθη ενός ποταμού. Η ταχύτητα που μετράει ο παρατηρητής, για ένα ποταμόπλοιο που «κατεβαίνει» το ποτάμι είναι

V_1 = 10 m/s, ενώ όταν το ίδιο ποταμόπλοιο «ανεβαίνει» το ποτάμι η ταχύτητα που μετράει ο παρατηρητής είναι V_2 = 6 m/s. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του ποταμόπλοιου και την ταχύτητα ροής του ποταμού. *[Απ. 8 m/s, 2 m/s]*

1.2. Σε ένα ποτάμι υπάρχουν δύο αποβάθρες Α και Β. Ένα πλοίο χρειάζεται 2 h για να πάει από την αποβάθρα Α στην αποβάθρα Β και 4 h για να πάει από την Β προς την Α. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να διανύσει την απόσταση ΑΒ με σβηστές τις μηχανές; *[Απ. 8 h]*

1.3. Η ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ένα ποταμόπλοιο σε ήρεμα νερά είναι υ = 7 m/s. Το πλοίο αυτό κινείται αντίθετα προς την ταχύτητα ροής του ποταμού. Κάποια στιγμή μία βάρκα πέφτει από το πλοίο στο ποτάμι σε ένα σημείο Α. Το ποταμόπλοιο συνεχίζει την πορεία του και μετά από d = 2100 m, από το σημείο Α, αντιλαμβάνονται την απώλεια της βάρκας και επιστρέφουν να τη μαζέψουν. Αν η ταχύτητα ροής του ποταμού είναι $υ_ρ$ = 3 m/s να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που έπεσε η βάρκα μέχρι τη στιγμή που την έφτασε το ποταμόπλοιο.
[Απ. 1050 s]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Μια βάρκα προσπαθεί να φτάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμού πλάτους d = 12 m, κινούμενη με τον άξονά της κάθετα στο ρεύμα του ποταμού. Αν η ταχύτητα ροής του ποταμού είναι $υ_ρ$ = 0,9 m/s και η ταχύτητα της βάρκας σε ήρεμα νερά, $υ_β$ = 1,2 m/s, να υπολογίσετε

α. το χρόνο που θα χρειαστεί η βάρκα για να περάσει απέναντι.

β. την απόσταση το σημείου της όχθης που θα φτάσει η βάρκα από το σημείο που υπολόγιζε ότι θα φτάσει.

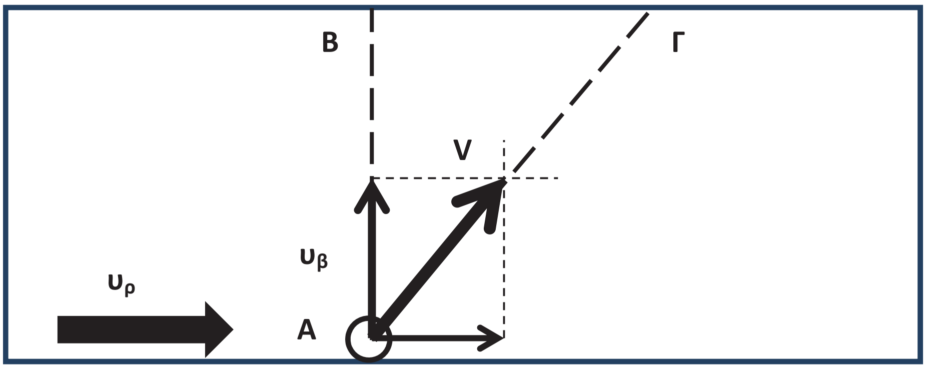
γ. το μέτρο της ταχύτητας V της βάρκας

Απάντηση: α. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων,

$$(AB) = d = \upsilon_\beta \cdot t \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{d}{\upsilon_\beta} \Rightarrow t = \frac{12m}{1,2m/s} \Rightarrow$$

$$t = 10 s$$



β. $(\mathrm{B}\Gamma) = \upsilon_\rho \cdot t \Rightarrow (\mathrm{B}\Gamma) = 0,9m/s \cdot 10s \Rightarrow (\mathrm{B}\Gamma) = 9\ m$

γ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

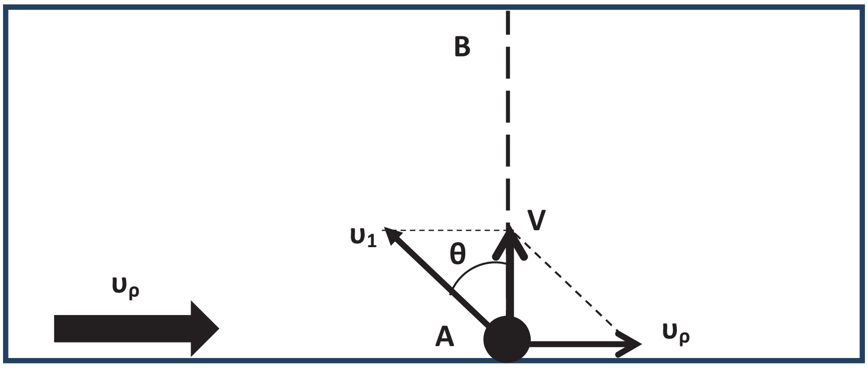
$$V^2 = \upsilon_\beta^2 + \upsilon_\rho^2 \Rightarrow V = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} \Rightarrow V = \sqrt{2,25}\ m/s \Rightarrow V = 1,5\ m/s$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Ένας κολυμβητής, που βρίσκεται στο σημείο Α κοντά στην όχθη ενός ποταμού, για να περάσει στο ακριβώς απέναντι σημείο Β, κολυμπάει με ταχύτητα $υ_1$ που σχηματίζει γωνία θ με την ΑΒ, έτσι ώστε η τελική του ταχύτητα V να έχει τη διεύθυνση της ΑΒ. Αν η ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ο κολυμβητής σε ήρεμα νερά είναι $υ_1$ = 2,5 m/s, η ταχύτητα ροής του ποταμού είναι $υ_ρ$ = 1,5 m/s και το πλάτος του ποταμού είναι d = 200 m,

α. σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο σημείο β;

β. ποια είναι η τιμή της γωνίας θ;

Απάντηση:



α. Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος :

$$\upsilon_1^2 = V^2 + \upsilon_\rho^2 \Leftrightarrow V = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_\rho^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{(2,5m/s)^2 - (1,5m/s)^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{4m^2/s^2} \Rightarrow V = 2\,m/s$$

$$(\mathrm{AB}) = d = V \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{d}{V} \Rightarrow$$

$$t = \frac{200m}{2m/s} \Rightarrow \mathbf{t = 100s}$$

β. Από το ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{V}{\upsilon_1} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2}{2,5} \Rightarrow$ **συνθ = 0,8** (δλδ $\theta \cong 37^0$)

1.4. Ταυτόχρονα με τον κολυμβητή του παραδείγματος 3, ξεκινά και ένας άλλος κολυμβητής ο οποίος κολυμπάει συνεχώς κάθετα στο ρεύμα του ποταμού, με αποτέλεσμα να φτάσει σε ένα σημείο Γ της απέναντι όχθης. Στη συνέχεια ο κολυμβητής αυτός διανύει την απόσταση ΓΒ περπατώντας με σταθερή ταχύτητα $υ_2$, με αποτέλεσμα να φτάσει στο σημείο Β ταυτόχρονα με τον πρώτο κολυμβητή. Αν και ο δεύτερος κολυμβητής όταν κολυμπά σε ήρεμα νερά μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα $υ_1$ = 2,5 m/s, να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ και την ταχύτητα $υ_2$. *[Απ. 120m, 6 m/s]*

Οριζόντια βολή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Από την ταράτσα ενός κτηρίου ύψους Η = 45 m, εκτοξεύουμε οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 20 m/s μια πέτρα.

α. Σε πόσο ύψος και σε πόση οριζόντια απόσταση από το κτήριο θα βρίσκεται η πέτρα, τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s;

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της πέτρας εκείνη τη χρονική στιγμή.

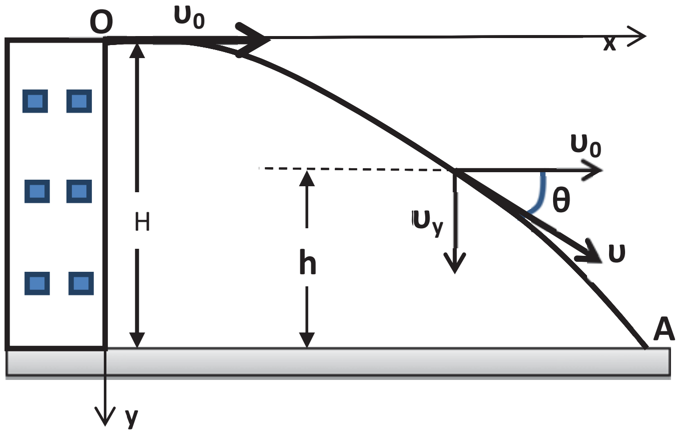
γ. Πόσο χρόνο η πέτρα βρίσκεται στον αέρα;

δ. Σε πόση οριζόντια απόσταση από τη βάση του κτηρίου θα πέσει η πέτρα;

ε. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος;

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και g = 10 m/s^2.

Απάντηση: Η κίνηση της πέτρας είναι σύνθετη (οριζόντια βολή) και μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια της αρχής ανεξαρτησίας των κινήσεων (αρχή της επαλληλίας).



Άξονας x: Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

$x = \upsilon_0 t$ (1)

Άξονας y: Ελεύθερη πτώση

$\upsilon_y = g t$ (2)

$y = ½ g t^2$ (3)

α. Για t = t_1 = 2 s, από την (3) έχουμε: $y = \frac{1}{2} \cdot 10 m/s^2 \cdot 4 s^2 \Rightarrow$ **y = 20 m**. Επομένως εκείνη τη στιγμή η πέτρα θα βρίσκεται σε ύψος h = H – y = 45 m – 20 m $\Rightarrow$ **h = 25m**

και από τη (2): x = 20m/s 2s $\Rightarrow$ **x = 40 m**.

β. Το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s είναι: $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + \upsilon_y^2 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + g^2 \cdot t_1^2 \Rightarrow \upsilon^2 = (20 m/s)^2 + (10 m/s^2 \cdot 2s)^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 800\ m^2/s^2 \Rightarrow \upsilon = 20\sqrt{2}\ m/s \Rightarrow$$

$\upsilon \cong$ **28,3 m/s**

Η διεύθυνση της ταχύτητας υπολογίζεται από $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_0} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{10 m/s^2 \cdot 2s}{20 m/s} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Rightarrow$ **θ = 45^0**

γ. Από τη σχέση (3) για y = H: $H = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 m}{10 m/s^2}} \Rightarrow$ **t = 3 s**

δ. Από τη σχέση (1) για t = 3 s: x = 20 m/s 3 s $\Rightarrow$ **x = 60 m** (Βεληνεκές).

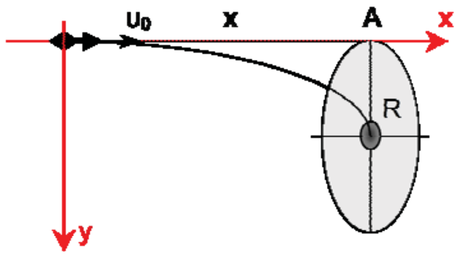
ε. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με τον ίδιο τρόπο όπως στο ερώτημα β με t = 3 s. Μπορούμε να το υπολογίσουμε και με εφαρμογή της ΑΔΜΕ:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow K_{(O)} + U_{(O)} = K_{(A)} + \cancel{U_{(A)}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + mgH = \frac{1}{2} m\upsilon_A^2 \Leftrightarrow \upsilon_A^2 = \upsilon_0^2 + 2gH \Rightarrow$$

$$\upsilon_A = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 45}\ m/s \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{1300}\ m/s \Rightarrow \upsilon_A = 10\sqrt{13}\ m/s \Rightarrow \upsilon_A \cong 36\ m/s.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Μαθητής πετάει ένα βελάκι με οριζόντια ταχύτητα υ_0 = 15 m/s με κατεύθυνση το πάνω άκρο Α ενός κυκλικού στόχου ακτίνας R = 0,2 m. Ο στόχος απέχει από το βελάκι οριζόντια απόσταση x = 3 m. Το βελάκι θα χτυπήσει το στόχο στο κέντρο ή όχι. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση



Το βελάκι στον άξονα χ κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση άρα $x = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon_0} \Rightarrow t = \frac{3\,m}{15\,m/s} \Rightarrow t = 0{,}2$ s , δηλαδή το βελάκι φτάνει στο στόχο σε χρόνο 0,2 s.

Στον άξονα y το βελάκι κάνει ελεύθερη πτώση. Στον χρόνο t θα έχει πέσει κατά y.

Είναι $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 10\,m/s^2 \cdot (0{,}2\,s)^2 \Rightarrow y = 0{,}2$ m. Η κατακόρυφη απόσταση είναι ίση με την ακτίνα R του στόχου , άρα το βελάκι θα χτυπήσει στο κέντρο του στόχου.

1.5. Ένα σώμα κινείται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι ύψους 80 cm και το εγκαταλείπει με οριζόντια ταχύτητα 3 m/s. Σε πόση οριζόντια απόσταση από την άκρη του τραπεζιού θα πέσει το σώμα στο δάπεδο και με πόση ταχύτητα; Δίνεται g = 10 m/s^2. *[Απ. 1,2 m, 5 m/s, εφϑ = 4/3]*

1.6. Από την ταράτσα ενός κτηρίου, τρία παιδιά ρίχνουν ταυτόχρονα και οριζόντια από ένα πετραδάκι με διαφορετικές αρχικές ταχύτητες. Να δικαιολογήσετε ότι τα πετραδάκια θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Θεωρείστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

1.7. Στο ζωολογικό κήπο, ένας κτηνίατρος θέλει να ναρκώσει έναν πίθηκο για να τον εξετάσει. Ο γιατρός διαθέτει το κατάλληλο όπλο με τη νάρκωση και κάποια στιγμή βρίσκεται στο ίδιο ύψος με τον πίθηκο, ο οποίος κρέμεται από το κλαδί ενός δέντρου. Ο γιατρός σημαδεύει τον πίθηκο, αλλά τη στιγμή που πατάει τη σκανδάλη, ο πίθηκος αφήνει το κλαδί και πέφτει ελεύθερα. Κατάφερε ή όχι ο γιατρός να ναρκώσει τον πίθηκο;

1.8. Βομβαρδιστικό αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος h = 500 m πάνω από ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα υ_0 = 100 m/s , έτσι ώστε να βρίσκεται πάνω από αυτόν. Στον δρόμο κινείται όχημα με σταθερή ταχύτητα υ_1 = 20 m/s . Από πόση οριζόντια απόσταση από το όχημα πρέπει το αεροπλάνο να αφήσει βόμβα για να κτυπήσει το όχημα. Δίνεται g = 10 m/s^2.

[Απ. x = 800 m ή x = 1200 m]

1.9. Από ένα σημείο που βρίσκεται σε ύψος 80 m από το οριζόντιο έδαφος, εκτοξεύεται οριζόντια ένα σώμα Α με ταχύτητα 30 m/s. Ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο αφήνεται ελεύθερο να πέσει ένα άλλο σώμα Β.

α. Να προσδιορίσετε τη θέση των 2 σωμάτων μετά από 2 s.

β. Σε πόσο χρόνο φτάνει κάθε σώμα στο έδαφος;

γ. Σε ποιο σημείο το σώμα Α θα χτυπήσει το έδαφος και με πόση ταχύτητα;

δ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος Α μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Αντίσταση αέρα αμελητέα και g = 10 m/s^2.

[Απ. *α. y_B = 20 m, y_A = 20 m, x_A = 60 m, β. 4 s, γ. 120 m, 50 m/s, εφϑ = 4/3, δ. περ 144 m*]

1.10. Ένα αεροπλάνο πετάει οριζόντια σε ύψος H = 2 km με ταχύτητα $υ_0$ = 100 m/s, πάνω από τη θάλασσα. Παράλληλα με το αεροπλάνο και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο κινείται ένα πλοίο με ταχύτητα 10 m/s. Σε πόση οριζόντια απόσταση από το πλοίο πρέπει να βρίσκεται το αεροπλάνο, ώστε αν αφεθεί ελεύθερο από το αεροπλάνο ένα πακέτο, αυτό να πέσει μέσα στο πλοίο; Να εξετάσετε την περίπτωση που οι ταχύτητες του πλοίου και του αεροπλάνου είναι **i.** ομόρροπες και **ii.** αντίρροπες. Δίνεται g = 10 m/s^2. [*1800 m, 2200 m*]

1.11. Ένα βλήμα βάλλεται οριζόντια. Το βλήμα κατά την κίνηση του συναντάει διαδοχικά δυο κατακόρυφους χάρτινους στόχους $Σ_1$ και $Σ_2$ που οι οριζόντιες αποστάσεις τους από το σημείο βολής είναι x_1 = 30 m και x_2 = 50 m αντίστοιχα. Οι δυο τρύπες που άνοιξε το βλήμα στους στόχους βρέθηκε ότι είχαν κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τους h = 5 m. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα του βλήματος. Δίνεται g = 10 m/s^2. [Απάντηση : υ = 40 m/s]

1.12. Από κάποιο σημείο που βρίσκεται σε ύψος h = 45 m πάνω από το έδαφος βάλλονται οριζόντια μια χρονική στιγμή, που θεωρείται αρχή μέτρησης των χρόνων, δύο μικρές σφαίρες με ταχύτητες που έχουν μέτρα $υ_{01}$ = 10 m/s η μία και $υ_{02}$ = 6 m/s η άλλη. Να παρασταθεί γραφικά η απόσταση των 2 σφαιρών σε συνάρτηση με το χρόνο. Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις, οι σφαίρες να έχουν **i)** ομόρροπες και **ii)** αντίρροπες αρχικές ταχύτητες. Δίνεται g = 10 m/s^2.

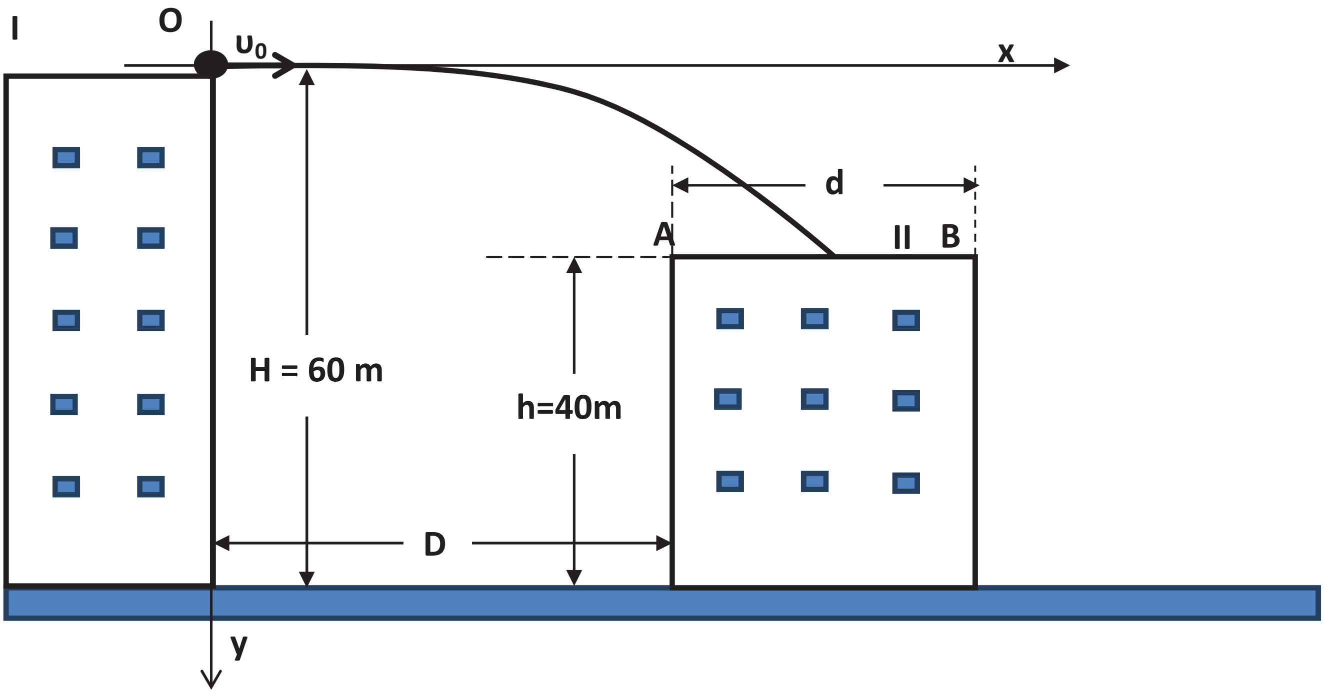
1.13. Δυο σημεία Α και Β βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και απέχουν από το έδαφος h και 4h αντίστοιχα. Από τα σημεία Α και Β την ίδια χρονική στιγμή βάλλονται οριζόντια δυο βλήματα. Αν τα βλήματα έχουν το ίδιο βεληνεκές να βρεθούν :

α. Ο λόγος των ταχυτήτων εκτόξευσης και

β. Αν h = 20 m με πόση διάφορα χρόνου πρέπει να εκτοξευτούν ώστε να φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Δίνεται g = 10 m/s^2. [Απ: α) $\frac{υ_{01}}{υ_{02}} = \frac{1}{2}$, β) Δt = 2 s]

1.14. Από τη βάση ενός κτηρίου ύψους 20 m, ξεκινά τη χρονική στιγμή t = 0 ένα όχημα και κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση α = 2 m/s^2. Μετά από πόσο χρόνο πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα από την κορυφή του κτηρίου με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$ = 32 m/s, ώστε να κτυπήσει το όχημα; Δίνεται g = 10 m/s^2. [Απ. 6 s]

1.15. Δύο κτήρια απέχουν D = 30 m. Από το ψηλότερο κτήριο (Ι), που έχει ύψος H = 60 m, εκτοξεύεται οριζόντια μια μπάλα με αρχική ταχύτητα υ_0 = 10 m/s, με σκοπό να φτάσει στο διπλανό κτήριο (ΙΙ), που έχει ύψος h = 40 m και **πλάτος** d = 10 m.



α. Θα φτάσει η μπάλα στην ταράτσα του κτηρίου ΙΙ;

β. Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της ταχύτητας υ_0, ώστε η μπάλα να πέσει στην ταράτσα του κτηρίου ΙΙ;

γ. Εκτοξεύουμε τη μπάλα με ταχύτητα 22 m/s. Ένα παιδί που βρίσκεται στην ταράτσα ΙΙ έχει την ικανότητα, πηδώντας να πιάσει τη μπάλα ακόμη και σε ύψος 2,80 m. Θα μπορέσει το παιδί να πιάσει τη μπάλα; Αντίσταση αέρα αμελητέα και g = 10 m/s^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

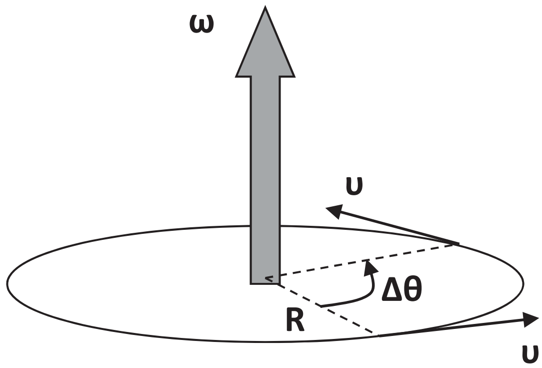
α. Αρκεί για y = H-h = 20 m να είναι $D \le x \le D+d \Rightarrow 30m \le \boldsymbol{x} \le 40m$ Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση τροχιάς $\left(y = \dfrac{g}{2\upsilon_0^2} \cdot x^2 \right)$ και λύσουμε ως προς x θα βρούμε x = 20 m. Η μπάλα θα περάσει 10 m αριστερά από το άκρο της Α.

β. $\upsilon_{0,min}$ = 15 m/s και $\upsilon_{0,max}$ = 20 m/s

γ. Είναι 22 m/s > 20 m/s. Η μπάλα θα περάσει πάνω από το ΙΙ. Το παιδί πρέπει να σταθεί στο άκρο Β του κτηρίου που η μπάλα θα βρίσκεται στην μικρότερη απόσταση. Είναι x_B = D+d = 40 m και από την εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε y = 16,5 m. Η απόσταση από το σημείο Β θα είναι:

H – h – y = 3,5 m > 2,8 m. Επομένως το παιδί δε θα μπορέσει να πιάσει τη μπάλα.

Ομαλή κυκλική κίνηση



Ταχύτητα (ή γραμμική ταχύτητα) **υ**: Διάνυσμα εφαπτόμενο στην κυκλική τροχιά με σταθερό μέτρο $\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, όπου Δs είναι το μήκος του τόξου και Δt ο απαιτούμενος χρόνος.

Γωνιακή ταχύτητα ω: Διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, με σημείο εφαρμογής το κέντρο, με τη φορά της δεξιόστροφης βίδας (κανόνας δεξιού χεριού) και με σταθερό μέτρο $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, όπου Δθ η **γωνιακή μετατόπιση** [σε rad] (επίκεντρη γωνία στην οποία αντιστοιχεί (βαίνει) το τόξο Δs).

Ισχύουν οι σχέσεις: $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\upsilon = \frac{2\pi R}{T},\ \ \upsilon = 2\pi R\cdot f\ \ (\text{σε } m/s)} \\ \boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T},\ \ \omega = 2\pi\cdot f\ \ (\text{σε } rad/s)} \\ \boldsymbol{\Delta s = R\cdot\Delta\theta} \end{array}\right],\ \boldsymbol{\upsilon = \omega\cdot R}$, όπου $\begin{array}{l} T = \text{περίοδος}\ (s) \\ f = \text{συχνότητα}\ (Hz) \\ R = \text{ακτίνα τροχιάς}\ (m) \end{array}$

Η ομαλή κυκλική κίνηση είναι μια ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ κίνηση. Η ταχύτητα υ μεταβάλλεται κατά κατεύθυνση και η επιτάχυνση που οφείλεται στη μεταβολή αυτή ονομάζεται ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ επιτάχυνση α_κ. Αποδεικνύεται ότι $\boldsymbol{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}}$ και $\boldsymbol{\alpha_\kappa = \omega^2 R}$

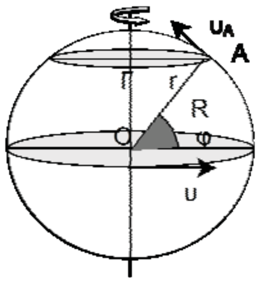
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6: Ένας ψηφιακός δίσκος (CD) μπορεί να περιστρέφεται μέσα στο cd-player, όταν αυτό λειτουργεί, μέχρι 500 στροφές το λεπτό. Πόσο είναι το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας;

Απάντηση: <u>Α τρόπος</u> .....με πρακτική αριθμητική: Ο δίσκος σε 1 min, δηλαδή σε 60 s κάνει 500 στροφές, δηλαδή μια ακτίνα του διαγράφει γωνία 500.2π = 1000π = 3140 rad. Επομένως η γωνιακή του ταχύτητα είναι 3140 rad / 60 s = 52,33 rad/s.

<u>Β τρόπος</u>: Το φυσικό μέγεθος στροφές ανά λεπτό που δίνεται, είναι η συχνότητα περιστροφής f του δίσκου. Δίνεται δηλαδή ότι $f = 500\text{στροφές}/\min = 500\text{στροφές}/60s \Rightarrow f = 8,33Hz$

Είναι $\omega = 2\pi f = 2\cdot 3,14\cdot 8,33 rad/s \Rightarrow \omega = 52,33 rad/s$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7: Θεωρούμε τη Γη σφαιρική με ακτίνα R = 6400 km και με περίοδο περιστροφής T = 24 h. Να υπολογιστούν: **α.** Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του ισημερινού **β.** Το διάστημα που διανύει αυτό το σημείο σε μία ημέρα **γ.** Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου σε γεωγραφικό πλάτος $\phi = 60^0$.



Απάντηση:

Οι μονάδες στο S.I. είναι : $R = 6400\ km = 6{,}4\cdot10^6\ m$ και

$T = 24\ h = 24\cdot3600\ s = 86400\ s = 8{,}64\cdot10^4\ s$.

α. Η γραμμική ταχύτητα των σημείων του ισημερινού δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon = \frac{2\pi\cdot R}{T} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\cdot3{,}14\cdot6{,}4\cdot10^6\ m}{8{,}64\cdot10^4\ s} \Rightarrow \upsilon = 465\ m/s.$$

β. Για το διάστημα που διανύει το σημείο του ισημερινού έχουμε :

$s = \upsilon\cdot T \Rightarrow s = 465\ m/s\cdot8{,}64\cdot10^4\ s \Rightarrow$ $s = 4{,}0176\cdot10^7\ m$.

γ) Το σημείο Α που βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος $\phi = 60^0$ διαγράφει κύκλο με ακτίνα r. Από το τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε : $r = R\sigma\upsilon\nu\phi$.

Για την ταχύτητα του σημείου Α ισχύει : $\upsilon_A = \dfrac{2\pi\cdot r}{T} \Rightarrow \upsilon_A = \dfrac{2\pi\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\phi}{T}$, αλλά είναι $\upsilon = \dfrac{2\pi\cdot R}{T}$

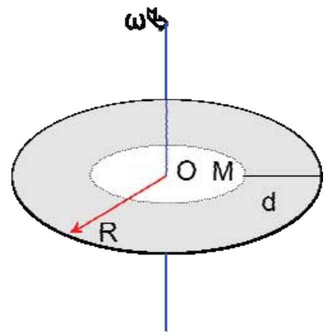
άρα $\upsilon_A = \upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu60^0 \Rightarrow \upsilon_A = 465\ m/s\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\upsilon_A = 232{,}5\ m/s$.

1.16. Κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας R = 10 m με γραμμική ταχύτητα υ = 2 m/s. Να υπολογιστούν : α) Η περίοδος T και η συχνότητα f της κυκλικής κίνησης , β) Η γωνιακή ταχύτητα ω , γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ , δ) Ο χρόνος που απαιτείται για να διαγράψει το κινητό τόξο 120^0.
[Απ: T = 31.4 s , ω = 0.2 rad/s , $\alpha_\kappa = 0.4\ m/s^2$, t = 10.46 s]

1.17. Η Σελήνη εκτελεί μια περιστροφή γύρω από τη Γη σε T = 28 ημέρες. Αν η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς της Σελήνης είναι $R = 60\ R_\Gamma$ να υπολογιστεί η γραμμική ταχύτητα της Σελήνης. Δίνεται η ακτίνα της Γης: $R_\Gamma = 6400$ km.
[Απ.: $\upsilon \approx 1000$ m/s]

1.18. Αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά με σταθερή ταχύτητα και σε χρόνο t = 10 s διανύει διάστημα x = 628 m. Αν η ακτίνα των τροχών του αυτοκίνητου είναι R = 0.4 m να υπολογιστούν : **α.** Η ταχύτητα του αυτοκίνητου. **β.** Η γωνιακή ταχύτητα. **γ.** Η συχνότητα περιστροφής των τροχών και **δ.** Ο αριθμός των περιστροφών κάθε τροχού.
[Απ: α) υ = 62.8 m/s , β) ω = 157 rad/s , γ) f = 25 Hz , δ) N = 250 στρ]

1.19. Δίσκος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου έχουν γραμμική ταχύτητα υ_1 = 5 m/s ενώ ένα σημείο Μ που απέχει από την περιφέρεια d = 10 cm έχει γραμμική ταχύτητα υ_2 = 3 m/s. Να υπολογιστούν: **α.** Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου ω. **β.** Η ακτίνα του δίσκου. **γ.** Ο λόγος των κεντρομόλων επιταχύνσεων του σημείου της περιφέρειας και του σημείου Μ.



[Απ. α) ω = 20 rad/s , β) R = 25 cm , γ) $\frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = \frac{5}{3}$]

1.20. Δυο κινητά αναχωρούν από το ίδιο σημείο περιφέρειας κύκλου ακτίνας R = 1 m κάνοντας ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο T_1 = 2 s και T_2 = 1,8 s. Αν τα κινητά κινούνται ομόρροπα να υπολογιστούν :

α. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν τα δυο κινητά για πρώτη φορά ,

β. Μετά από πόσες στροφές του πρώτου κινητού θα γίνει αυτή η συνάντηση και

γ. Πόσο διάστημα θα έχουν διανύσει τα δυο κινητά τότε.

[Απ.: α) t = 18 s , β) N = 9 , γ) s_1 = 56,52 m , s_2 = 62,8 m]

1.21. Δυο κινητά Α και Β ξεκινούν ταυτόχρονα από σημείο περιφέρειας κύκλου ακτίνας R = 1 m. Τα κινητά κινούνται ομόρροπα. Οι γωνιακές ταχύτητες είναι $\omega_1 = \pi/4$ rad/s και $\omega_2 = \pi/3$ rad/s αντίστοιχα. Να υπολογιστούν :

α. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά ,

β. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για δέκατη φορά και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει τότε το κινητό Α. [Απ.: α) t = 24 s , β) t = 240 s , $s_1 = 60\pi$ m]

1.22. Τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα. Οι μπροστινοί τροχοί έχουν ακτίνα R_1 = 0,4 m ενώ οι πίσω τροχοί έχουν ακτίνα $R_2 = 2\ R_1$. Αν οι μπροστινοί τροχοί κάνουν N_1 = 500 στροφές να υπολογιστούν :

α. Η απόσταση που έχει διανύσει το τρακτέρ.

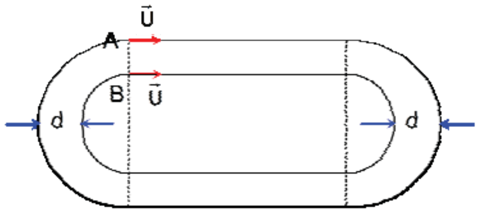
β. Ο αριθμός των στροφών που κάνουν οι πίσω τροχοί.

γ. Ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων των δυο τροχών.

δ. Ο λόγος των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων της περιφέρειας των δυο τροχών.

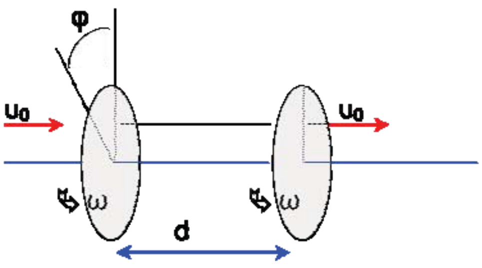
[Απ. α) x = 1256 m , β) N_2 = 250 στρ , γ) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$, δ) $\frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = 2$]

1.23. Ο στίβος ενός σταδίου του οποίου οι στροφές είναι ημικύκλια έχει τη μορφή του σχήματος. Δύο αθλητές ξεκινούν ταυτόχρονα από τα σημεία Α και Β με την ίδια ταχύτητα υ και κινούνται ο ένας στην εξωτερική και ο άλλος στην εσωτερική γραμμή. Οι γραμμές απέχουν d = 10 m. Κάθε αθλητής διανύει ένα γύρο και τερματίζουν με διάφορα χρόνου Δt = 12,56 s. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας υ.



[Απ. υ = 5 m/s]

1.24. Δυο παράλληλοι δίσκοι είναι στερεωμένοι στον ίδιο άξονα απέχουν απόσταση d = 1 m και περιστρέφονται με συχνότητα f = 50 Hz. Μια σφαίρα που εξέρχεται από όπλο με ταχύτητα υ_0 και κινείται παράλληλα στον άξονα περιστροφής των δίσκων τρυπάει και τους δυο δίσκους. Η τρύπα του δεύτερου δίσκου έχει μετατοπιστεί σε σχέση με τον πρώτο δίσκο κατά γωνία $\phi = 45^0$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας αν θεωρηθεί σταθερή κατά το πέρασμα της και από τους δυο δίσκους.



[Απ. υ_0 = 400 m/s]

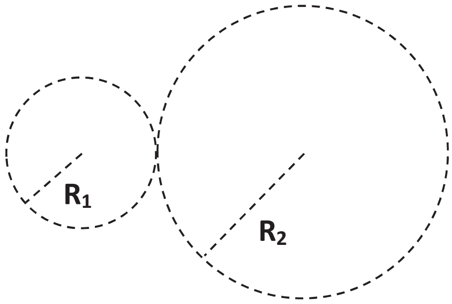
1.25. Το ρολόι του διπλανού σχήματος δείχνει 12:00:00. Μετά από πόσο χρόνο

α. οι δύο δείκτες θα είναι κάθετοι μεταξύ τους για πρώτη φορά;

β. ο δείκτης των δευτερολέπτων θα διχοτομεί για πρώτη φορά τη γωνία των δύο άλλων δεικτών;

1.26. Τη χρονική t = 0, δύο δρομείς Α και Β, που τρέχουν σε κυκλικό στίβο ακτίνας $R = \frac{100}{\pi} m$ με ταχύτητες σταθερών μέτρων $υ_A$ = 6 m/s και $υ_B$ = 4 m/s αντίστοιχα, διέρχονται από το ίδιο σημείο Σ του στίβου. Αν και οι δύο δρομείς κινούνται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν για $1^η$ φορά στο σημείο Σ; [Απ. 100 s]

1.27. Δύο κινητά κινούνται ομαλά σε δύο κυκλικές τροχιές που έχουν ακτίνες $R_1 = \frac{70}{\pi} m$ και $R_2 = \frac{300}{\pi} m$, με αντίστοιχες ταχύτητες μέτρων $υ_1$ = 20 m/s και $υ_2$ = 15 m/s.
Αν οι δύο κυκλικές τροχιές εφάπτονται εξωτερικά, όπως φαίνεται και στο σχήμα, να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των κινητών. [Απ. 120 s]



Δυναμική στην κυκλική κίνηση

Μεθοδολογία

Αν ένα σώμα κάνει κυκλική κίνηση τότε :

❶ Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

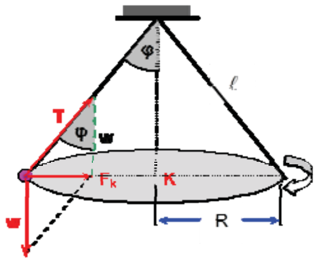
❷ Εκλέγουμε σύστημα ορθογώνιων αξόνων με αρχή το σώμα και τον άξονα x να συμπίπτει με την εφαπτομένη της τροχιάς ενώ ο άξονας y έχει την κατεύθυνση της επιβατικής ακτίνας με φορά προς το κέντρο.

❸ Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις στο σύστημα των αξόνων.
Αν το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ισχύει $\Sigma F_x = 0$.

❹ Η συνιστάμενη όλων των δυνάμεων στον άξονα y (η ΣF_y) ονομάζεται κεντρομόλος δύναμη και ισχύει $\Sigma F_y = m\alpha_\kappa$ (α_κ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση η οποία μεταβάλλει μόνο την διεύθυνση της ταχύτητας)

<u>Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι ξεχωριστή δύναμη , αλλά είναι η συνιστάμενη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στην κατεύθυνση της επιβατικής ακτίνας</u>.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8: Το εκκρεμές του σχήματος έχει μήκος ℓ = 5 m και στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το σταθερό σημείο ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία $\phi = 60^0$. Να υπολογιστεί η συχνότητα περιστροφής του σφαιριδίου του εκκρεμούς. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Λύση

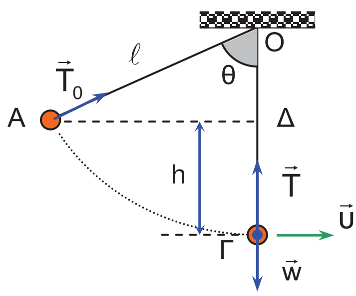
Στο σφαιρίδιο του σχήματος ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος w και η δύναμη T από το νήμα. Το σφαιρίδιο κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο το K και ακτίνα R , άρα η συνιστάμενη των w και T δίνει την κεντρομόλο δύναμη F_k . Από το τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις δυνάμεις w και F_k έχουμε : $F_k = w\varepsilon\phi\phi \Rightarrow \frac{mu^2}{R} = mg\varepsilon\phi\phi \Rightarrow \frac{u^2}{R} = g\varepsilon\phi\phi$ ❶ Αλλά $u = 2\pi fR$ άρα η σχέση ❶ $\Rightarrow (2\pi fR)^2 = Rg\varepsilon\phi\varphi \Rightarrow 4\pi^2 f^2 R^2 = Rg\varepsilon\phi\varphi \Rightarrow 4\pi^2 f^2 R = g\varepsilon\phi\varphi$ ❷.

Αλλά από το σχήμα είναι $R = \ell\cdot\eta\mu\phi$ άρα η σχέση ❷ $\Rightarrow 4\pi^2 f^2 \ell\,\eta\mu\phi = g\varepsilon\phi\phi \Rightarrow f^2 = \frac{g\varepsilon\phi\varphi}{4\pi^2\ell\eta\mu\varphi} \Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{g\varepsilon\phi\varphi}{4\pi^2\ell\eta\mu\varphi}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell\sigma\upsilon\nu\varphi}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{5\cdot\frac{1}{2}}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}\text{Hz}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Προσδένουμε ένα μικρό σώμα μάζας m = 1 kg στην άκρη νήματος με μήκος ℓ = 0,4 m. Κρατάμε το νήμα τεντωμένο ώστε να σχηματίζει γωνία $\theta = 60^0$ με τη κατακόρυφο. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος και η τάση του νήματος όταν το σώμα περνάει από την κατακόρυφο. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Απάντηση: Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος w και η τάση T του νήματος (Η τάση μεταβάλλεται συνέχεια κατά την κίνηση του σώματος , αλλά είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση γιατί έχει τη κατεύθυνση της ακτίνας , άρα δεν εκτελεί έργο).

Επειδή η μόνη δύναμη που εκτελεί έργο στο σώμα είναι το βάρος , η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Αν θεωρήσουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την κατώτερη θέση του σώματος έχουμε :

$E_{(A)} = E_{(\Gamma)}$ άρα $K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$ ή $0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$ άρα $\upsilon = \sqrt{2gh}$ ❶

Υπολογισμός της υψομετρικής διαφοράς :

Από το τρίγωνο ΟΑΔ το τμήμα ΟΔ είναι : ΟΔ = ΑΟ·συνθ επομένως ΟΔ = ℓ·συνθ.

Για το h είναι : h = ΟΓ – ΟΔ άρα h = $\ell - \ell$·συνθ ή h = ℓ·(1 – συνθ) ❷

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις που απαιτείται η υψομετρική διαφορά δύο θέσεων στην κίνηση εκκρεμούς.

Από τις σχέσεις ❶ και ❷ έχουμε : $\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot \ell \cdot (1 - συνθ)}$ ή $\upsilon = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,5)}$ ή υ = 2 m/s.

*** Υπολογισμός της τάσης του νήματος :

Η συνισταμένη των δυνάμεων στο κατώτερο σημείο της τροχιάς είναι η κεντρομόλος δύναμη άρα $\Sigma F_R = F_\kappa$ και σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο της κίνησης έχουμε : $T - w = m\frac{\upsilon^2}{\ell}$ άρα $T = mg + m\frac{\upsilon^2}{\ell}$ ή

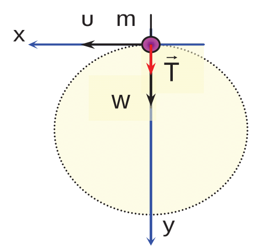
$T = mg + m\frac{2g\ell(1 - συνθ)}{\ell}$ ή T = mg + 2mg – 2mgσυνθ ή T = 3mg – 2mgσυνθ ή T = mg(3 – 2συνθ) άρα

T = 1·10·(3 – 2·0.5) ή **T = 20 N**.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις που απαιτείται η τάση του νήματος σε κάποια θέση στην κίνηση εκκρεμούς αφού υπολογίσουμε πρώτα την ταχύτητα του σώματος στη θέση αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10: Ταχύτητα ανακύκλωσης

Σώμα δεμένο στην άκρη νήματος και κινείται σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά ακτίνας R = 0,9 m. Να υπολογιστεί
α. η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ώστε να διαγράψει τον κατακόρυφο κύκλο.
β. η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του ώστε να διαγράψει τον κατακόρυφο κύκλο. (Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα ανακύκλωσης)
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2.



Απάντηση: α. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς όπως φαίνεται στο σχήμα ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος Β και η δύναμη από το νήμα Τ. Επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση έχουμε : $\Sigma F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow w + T = m\dfrac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{(w+T)R}{m}}$.

Η ταχύτητα υ γίνεται ελάχιστη όταν η Τ γίνει ελάχιστη δηλαδή όταν Τ = 0 . άρα $\upsilon = \sqrt{\dfrac{(mg+0)R}{m}}$

$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{mgR}{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{10\cdot 0{,}9} \Rightarrow \upsilon = 3$ m/s.

β. Αρκεί να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_0 που πρέπει να δώσουμε στο σώμα, ώστε να φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του με ταχύτητα υ = 3 m/s.

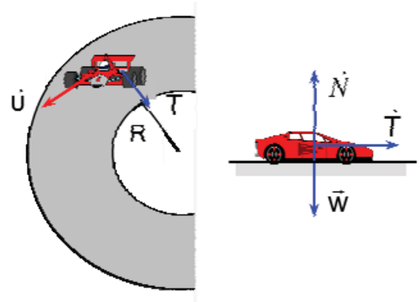
Η κίνηση του σώματος είναι κυκλική αλλά όχι ομαλή (ούτε ομαλά μεταβαλλόμενη). Επομένως ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μόνο ενεργειακά.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ στις 2 θέσεις (Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη χαμηλότερη θέση του σώματος.)

$$E_{ΑΡΧ} = E_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow K_{ΑΡΧ} + U_{ΑΡΧ} = K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 + mg\cdot 2\ell \Leftrightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon^2 + 4g\ell \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 + 4g\ell} \xrightarrow{(S.I)} \upsilon_0 = \sqrt{3^2 + 4\cdot 10\cdot 0{,}9}\ m/s \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{45} \Rightarrow \upsilon_0 \cong 6{,}7\ m/s$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10: Μέγιστη ταχύτητα στη στροφή



Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο κυκλικό δρόμο ακτίνας R = 80 m. Αν ο συντελεστής τριβής των ελαστικών του αυτοκινήτου και του δρόμου είναι μ = 0,5 να υπολογιστεί η μέγιστη γραμμική ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Απάντηση:

Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος w και η δύναμη από το δάπεδο που αναλύεται στην κάθετη αντίδραση Ν και την τριβή Τ. Το αυτοκίνητο δεν ολισθαίνει προς το κέντρο του κύκλου άρα η Τ είναι η στατική τριβή. Το αυτοκίνητο κάνει κυκλική κίνηση άρα η στατική τριβή Τ είναι η κεντρομόλος δύναμη , δηλαδή : $T = F_k \Rightarrow T = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$. Για να μην ολισθαίνει το αυτοκίνητο πρέπει $T \le T_{s,max}$ άρα $T \le \mu N \Rightarrow \dfrac{m\upsilon^2}{R} \le \mu N$ ①

Στον άξονα y έχουμε : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = mg$ ②

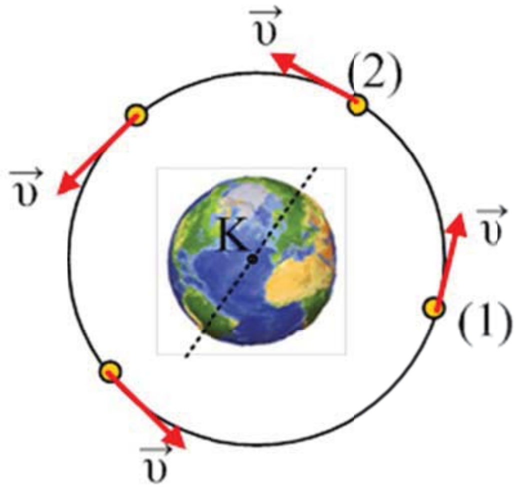
Από τις σχέσεις ① και ② έχουμε : $\dfrac{m\upsilon^2}{R} \le \mu mg \Rightarrow \upsilon^2 \le \mu gR \Rightarrow \upsilon \le \sqrt{\mu gR} \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\mu gR} \Rightarrow$

$\upsilon_{max} = \sqrt{0.5\cdot 10\cdot 80} \Rightarrow \upsilon_{max} = 20$ m/s

1.28. Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η Γη και ένα σώμα σε διάφορες θέσεις.

α. Να σχεδιάστε τη δύναμη που δέχεται το σώμα από τη Γη (το βάρος), στις διάφορες θέσεις.
β. Μπορείτε να προβλέψετε την κίνηση του σώματος αν αφεθεί ελεύθερο στη θέση Α;

1.29. Ένας δορυφόρος στρέφεται σε κυκλική τροχιά, με κέντρο το κέντρο της Γης, σε ύψος h από την επιφάνειά της, όπως στο σχήμα.



Α Ο δορυφόρος δεν πέφτει στη Γη γιατί:
α. Δεν δέχεται έλξη από τη Γη.
β. Δέχεται δύναμη από τη Γη, αλλά και αυτός της ασκεί μια αντίθετη δύναμη.
γ. Είναι έξω από την ατμόσφαιρα της Γης.
δ. Τίποτα από όλα αυτά.

Β. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δορυφόρο στις θέσει (1) και (2) και εξηγείστε γιατί ο δορυφόρος δεν πέφτει στην επιφάνεια της Γης.

Γ. Αν μετά από σύγκρουση του δορυφόρου με ένα μετεωρίτη, η ταχύτητά του μηδενιστεί, τότε αυτός:
α. Θα πέσει στη Γη.
β. Θα παραμείνει ακίνητος στη θέση του.
γ. Θα απομακρυνθεί από τη Γη κινούμενος στη διεύθυνση της εφαπτομένης.
δ. Δεν θα ασκεί πλέον ο δορυφόρος δύναμη στη Γη.

Δ. Αν ένας «μάγος» εξαφάνιζε σε μια στιγμή τη Γη, τότε ο δορυφόρος:
α. Θα εξαφανιζόταν και αυτός.
β. Θα συνέχιζε την κίνησή του στην ίδια κυκλική τροχιά.
γ. Θα κινείτο προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
δ. Θα εκτελούσε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

1.30. Ένα εκκρεμές μήκους ℓ = 2 m με μάζα του σφαιριδίου m = 1 kg εκτελεί ταλάντωση. Τη στιγμή που το νήμα του εκκρεμούς σχηματίζει γωνία φ = 60^0 με την κατακόρυφο , η ταχύτητα του είναι υ = 10 m/s. Δίνεται g = 10 m/s^2. Να υπολογιστεί :
α. Η κεντρομόλος δύναμη.
β. Η τάση του νήματος. [Απ. α) F_k = 50 N β) T = 55 N]

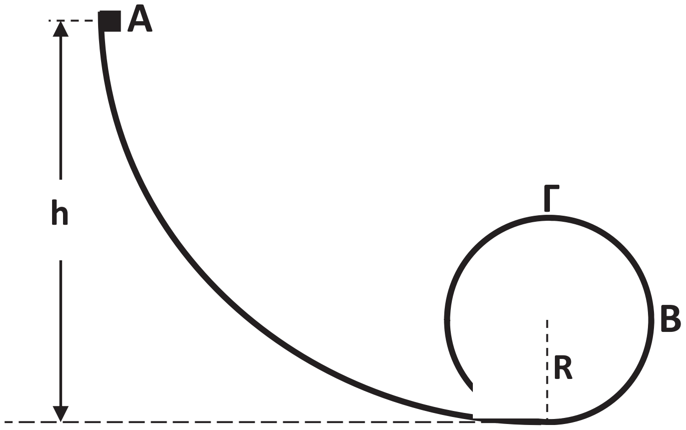
1.31. Σώμα μάζας m = 1 kg είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους ℓ = 1 m το οποίο έχει όριο θραύσης $T_θ$ = 100 N. Το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνάει από το άλλο άκρο του νήματος. Να υπολογιστεί η μέγιστη συχνότητα περιστροφής για να μην σπάσει το νήμα. [Απ. f = 5/π Hz]

1.32. Αυτοκινητόδρομος παρουσιάζει την κατάλληλη κλίση φ ώστε τα αυτοκίνητα να παίρνουν με ασφάλεια μια στροφή με ταχύτητα υ = 72 km/h. Η ακτίνα της στροφής είναι R = 50 m. Να υπολογιστεί η κλίση φ του δρόμου. Τριβές δεν υπάρχουν. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. [Απ. εφφ = 0,8]

1.33. Αυτοκίνητο πρόκειται να εκτελέσει κυκλική στροφή ακτίνας R = 50 m με ταχύτητα υ = 72 km/h. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος, ώστε το αυτοκίνητο να εκτελέσει τη στροφή με ασφάλεια. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. [Απ. μ_{min} = 0,8]

1.34. Ένα σώμα βάρους w, είναι δεμένο στο ένα άκρο νήματος και κινείται σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά της οποίας το κέντρο είναι το άλλο άκρο του νήματος. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τάσεων του νήματος στην κατώτερη και την ανώτερη θέση της τροχιάς του, είναι 6w.

1.35. Ένα μικρό σώμα, μάζας m = 0,1 kg αφήνεται από τη θέση Α και κινείται χωρίς τριβή κατά μήκος του κατακόρυφου οδηγού του διπλανού σχήματος.



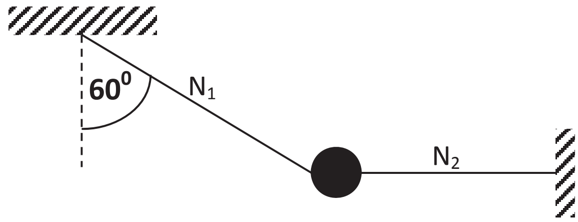
Α. Αν h = 5R = 1 m, όπου R η ακτίνα του κυκλικού οδηγού, να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο Β, το οποίο βρίσκεται σε ύψος R και από το σημείο Γ που βρίσκεται σε ύψος 2R.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από τον κυκλικό οδηγό στις θέσεις Β και Γ.

Γ. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του ύψος h από το οποίο πρέπει να αφήσουμε το σώμα, ώστε να διαγράψει ολόκληρο τον κύκλο (να εκτελέσει ανακύκλωση). Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

<u>Να θυμηθούμε λίγο και την ισορροπία….</u>

1.36. Τα δύο νήματα συγκρατούν μια μικρή σφαίρα βάρους 6 Ν, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα από τα δύο νήματα.

Β. Με ένα ξυραφάκι κόβουμε το οριζόντιο νήμα N_2.

i. Τη στιγμή αυτή να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα N_1 στη σφαίρα.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σφαίρα από το νήμα N_1 τη στιγμή που αυτό γίνεται κατακόρυφο. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.