5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

§5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

➢ **Ορμή** $\vec{p}$ ενός σώματος μάζας m, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. (5.1)

Σύμφωνα με τον ορισμό τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{\upsilon}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.

➢ **Σύστημα σωμάτων** ονομάζουμε δύο ή περισσότερα σώματα, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, συνεχώς ή στιγμιαία. Ένα σύστημα σωμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σώμα με μάζα ίση με το άθροισμα των μαζών των σωμάτων που το αποτελούν.

➢ **Ορμή συστήματος σωμάτων** $\vec{p}_{o\lambda}$, ονομάζουμε το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα. Δηλαδή

$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_\nu$ (5.2)

➢ **Ωστικές δυνάμεις** ονομάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt $(\Delta t \to 0)$ σε σχέση με το χρόνο παρατήρησης.

➢ **Εξωτερικές δυνάμεις** ενός συστήματος σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από άλλα σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα.

➢ **Εσωτερικές δυνάμεις** ενός συστήματος σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος. Οι δυνάμεις αυτές, ανά δύο, είναι δράση – αντίδραση. Θεωρώντας το σύστημα σαν ένα σώμα, οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν.

➢ **Μονωμένο σύστημα** ονομάζεται κάθε σύστημα στο οποίο ή δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν μηδενική συνισταμένη.

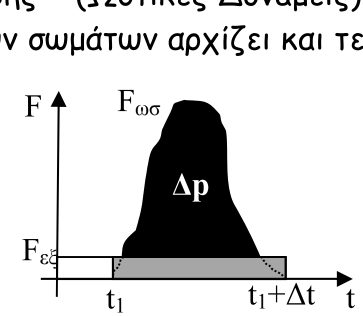
➢ **Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.)** Σε κάθε ΜΟΝΩΜΕΝΟ σύστημα σωμάτων η ορμή του διατηρείται σταθερή. $\vec{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$. (5.3)

§5.2 ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Κρούση, στη μηχανική, ονομάζουμε την επαφή δύο σωμάτων, η οποία διαρκεί ελάχιστα(1) και στη διάρκειά της εμφανίζονται πολύ ισχυρές δυνάμεις επαφής(2) (Ωστικές Δυνάμεις).

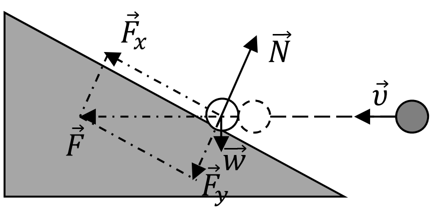
(1)Διαρκεί ελάχιστα: Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επαφή των σωμάτων αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση.

(2)Ισχυρές Δυνάμεις Επαφής: Είναι ωστικές δυνάμεις που είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα και επομένως δεν προκαλούν μεταβολή στην ορμή του συστήματος.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου μιας δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο. Το εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων εκφράζει, αριθμητικά, το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος.

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό της κρούσης, οι δυνάμεις επαφής είναι πολύ ισχυρές συγκρινόμενες με τις εξωτερικές, η μεταβολή στην ορμή του σώματος εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων είναι ασήμαντη, επομένως **μπορούμε να θεωρούμε το σύστημα μονωμένο και να εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. αλλά μόνο για το πολύ μικρό χρονικό διάστημα που διαρκεί η επαφή τους.** Έτσι, για παράδειγμα, για τη σύγκρουση δύο σωμάτων στον αέρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. στο ύψος που έγινε η σύγκρουση, θεωρώντας σαν αρχική κατάσταση τη στιγμή που αρχίζει η επαφή και σαν τελική τη στιγμή που ολοκληρώνεται, αγνοώντας τις εξωτερικές δυνάμεις (των βαρών τους), των οποίων η συνισταμένη είναι διάφορη από το μηδέν.



ΠΡΟΣΟΧΗ Στην περίπτωση της κρούσης του διπλανού σχήματος, η κάθετη δύναμη στήριξης Ν είναι εξωτερική δύναμη για το σύστημα των δύο σωμάτων. Η δύναμη αυτή όμως δε μπορεί να αγνοηθεί για το, έστω και πολύ μικρό, χρονικό διάστημα της κρούσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η δύναμη Ν είναι συνάρτηση της δύναμης επαφής F. $(N = F_y + w_y)$. Επομένως το σύστημα δεν είναι μονωμένο στον άξονα που είναι κάθετος στο πλάγιο επίπεδο, με αποτέλεσμα να μην ισχύει η ΑΔΟ για τον άξονα αυτόν. Αν όμως το πλάγιο επίπεδο είναι λείο, τότε στον παράλληλο προς το πλάγιο επίπεδο άξονα το σύστημα θεωρείται μονωμένο ($w_x \ll F_x$) και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ (λίγο πριν – λίγο μετά) $(\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x})$.

Κάτι αντίστοιχο ισχύει και στην περίπτωση της κρούσης μιας αρθρωμένης ράβδου με ένα σημειακό αντικείμενο. Και εκεί η δύναμη της άρθρωσης δεν μπορεί να αγνοηθεί, γιατί είναι συνάρτηση της δύναμης επαφής ράβδου – αντικειμένου, με αποτέλεσμα να ΜΗΝ ΙΣΧΥΕΙ για ΚΑΝΕΝΑΝ ΑΞΟΝΑ η Α.Δ.Ο. Επειδή όμως η ροπή της ως προς το σημείο που αρθρώνεται είναι μηδέν (αφού διέρχεται από το σημείο αυτό), η στροφορμή του συστήματος ράβδος – σημειακό αντικείμενο διατηρείται. (Παράδειγμα 5.10)

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της κρούσης και στην περίπτωση που τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή, αλλά όμως οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να είναι ισχυρές και το φαινόμενο να διαρκεί ελάχιστα. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται στην ατομική και πυρηνική Φυσική και το φαινόμενο το ονομάζουμε σ κ έ δ α σ η. Για παράδειγμα, το πείραμα του Rutherford που είναι γνωστό σαν πείραμα σκέδασης των σωματίων α (^4_2He). Τα σωμάτια α «συγκρούονται» με πυρήνες χρυσού$(^{197}_{79}Au)$, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι η απωστική δύναμη Coulomb, η οποία είναι ισχυρή, λόγω της μικρής απόστασης μεταξύ των πυρήνων και δρα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, σχετικά με το χρόνο που παρατηρούμε το σωμάτιο α και έχει σημαντική επίδραση στην κίνησή του.

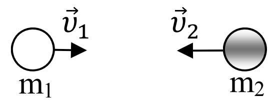
Μπορούμε να επεκτείνουμε ακόμη περισσότερο τον ορισμό της κρούσης, ώστε να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση της αυθόρμητης διάσπασης ενός σώματος σε δύο ή περισσότερα σώματα. Τέτοιο παράδειγμα είναι η έκρηξη ή οι ραδιενεργές διασπάσεις (α,β,γ) κλπ. Κατά τη διαδικασία αυτή, μπορεί να μην έχουμε επαφή των σωμάτων αλλά υπάρχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις κρούσεις, όπως ότι υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ των γεγονότων «πριν» και «μετά», η διάσπαση διαρκεί ελάχιστα και οι ωστικές δυνάμεις είναι ισχυρές.

§5.3 Τα ΕΙΔΗ των ΚΡΟΥΣΕΩΝ

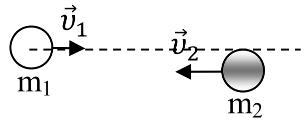
Α. Ανάλογα με τη <u>διεύθυνση</u> της κίνησης πριν την κρούση.

Μπορούμε να διακρίνουμε τις κρούσεις ανάλογα με τη διεύθυνση των ταχυτήτων των σωμάτων σε σχέση με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.

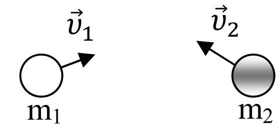
➢ **Α1.** ΚΕΝΤΡΙΚΗ και ΜΕΤΩΠΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων συμπίπτουν με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.



➢ **Α2.** ΕΚΚΕΝΤΡΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων δεν συμπίπτουν με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους και είναι παράλληλες μεταξύ τους.



➢ **Α3.** ΠΛΑΓΙΑ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.



Β. Ανάλογα με τη <u>διατήρηση της κινητικής ενέργειας</u> κατά την κρούση.

Σε κάθε κρούση, τα σώματα που έρχονται σε επαφή παραμορφώνονται, μέχρι μια μέγιστη παραμόρφωση και στη συνέχεια ή επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα ή αποκτούν μόνιμη παραμόρφωση. Τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης τα δύο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες. Η ενέργεια που απαιτείται για να γίνει η παραμόρφωση, προέρχεται από τη μηχανική ενέργεια των σωμάτων. Στη συνέχεια, ανάλογα με τη φύση των σωμάτων, μπορεί τα σώματα να επανέλθουν στο αρχικό τους σχήμα ή να παραμορφωθούν μόνιμα ή να μείνουν ενωμένα.

Επειδή η κρούση αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος ΔΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ, επομένως η όποια μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος θα οφείλεται στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

➢ **Β1.** ΕΛΑΣΤΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Δηλαδή κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύει:

$$K_{1,λίγο\,πριν} + K_{2,λίγο\,πριν} = K_{1,λίγο\,μετά} + K_{2,λίγο\,μετά} \qquad (5.4)$$

(όπου με *λίγο πριν* συμβολίζουμε την κατάσταση τη στιγμή που αρχίζει η κρούση και με *λίγο μετά* την κατάσταση τη στιγμή που ολοκληρώνεται η κρούση).

➢ **Β2.** i. ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία ΔΕΝ διατηρείται η συνολική κινητική ενέργεια, γιατί ένα μέρος της κινητικής ενέργειας που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση των σωμάτων δε γίνεται πάλι κινητική και τα σώματα παραμένουν με μια μικρή ή μεγάλη παραμόρφωση. Στην ανελαστική κρούση ισχύει ότι

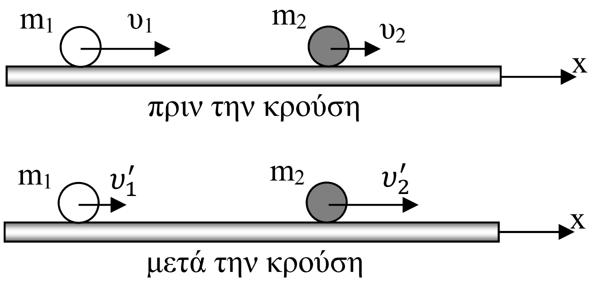
$$\left.\begin{aligned} &K_{1,λίγο\,πριν} + K_{2,λίγο\,πριν} > K_{1,λίγο\,μετά} + K_{2,λίγο\,μετά} \\ &και \quad Q = \left(K_{1,λίγο\,πριν} + K_{2,λίγο\,πριν}\right) - \left(K_{1,λίγο\,μετά} + K_{2,λίγο\,μετά}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (5.5)$$

όπου Q το ποσό θερμότητας που εκλύεται στο περιβάλλον ή και το ποσό της θερμικής ενέργειας, αν η θερμοκρασία των σωμάτων μεταβάλλεται.

ii. Μια ειδική περίπτωση της ανελαστικής κρούσης είναι η ΤΕΛΕΙΩΣ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ή ΠΛΑΣΤΙΚΗ κρούση, κατά την οποία τα σώματα παραμένουν ενωμένα και κινούνται σαν ένα σώμα.

> ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ότι σύμφωνα με τον ορισμό, <u>σε κάθε κρούση,</u> λίγο πριν και λίγο μετά, η ορμή του συστήματος διατηρείται.

§5.4 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ



Θεωρούμε δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 τα οποία κινούνται με ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. (Αν τα σώματα είναι σφαίρες, όπως στο σχήμα, τότε θεωρούμε ότι είναι λείες και δεν περιστρέφονται.)
Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Με γνωστές τις μάζες m_1, m_2 και τις ταχύτητες $υ_1$, $υ_2$ (αλγεβρικές τιμές) των δύο σωμάτων λίγο πριν την κρούση τους, ζητάμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες (αλγεβρικές τιμές) λίγο μετά την κρούση.
Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα x, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{λ.π.}=\vec{p}_{λ.μ.}\Rightarrow m_1\vec{υ}_1+m_2\vec{υ}_2=m_1\vec{υ}'_1+m_1\vec{υ}'_2\xrightarrow{αλγεβρικά}m_1υ_1+m_2υ_2=m_1υ'_1+m_2υ'_2. \quad (5.6)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$K_{λ.π.}=K_{λ.μ.}\Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2+\frac{1}{2}m_2υ_2^2=\frac{1}{2}m_1(υ'_1)^2+\frac{1}{2}m_2(υ'_2)^2. \quad (5.7)$$

Οι σχέσεις 5.6 και 5.7 αποτελούν σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Μια διαδικασία επίλυσης του συστήματος είναι και η παρακάτω:
Χωρίζουμε και στις δύο εξισώσεις τους όρους που περιέχουν τις μάζες:

$$5.6\Rightarrow m_1υ_1-m_1υ'_1=m_2υ'_2-m_2υ_2\Rightarrow m_1(υ_1-υ'_1)=m_2(υ'_2-υ_2) \quad (5.8)$$

$$5.7\Rightarrow m_1υ_1^2-m_1(υ'_1)^2 = m_2(υ'_2)^2-m_2υ_2^2\Rightarrow m_1(υ_1^2-(υ'_1)^2)=m_2((υ'_2)^2-υ_2^2)\xrightarrow{διαφ.τετρ.}$$

$$\Rightarrow m_1(υ_1-υ'_1)(υ_1+υ'_1)=m_2(υ'_2-υ_2)(υ'_2+υ_2). \quad (5.9)$$

Επειδή $υ_1 \neq υ'_1$ και $υ_2 \neq υ'_2$, διαιρούμε κατά μέλη τις 5.8 και 5.9:

$$\frac{(5.9)}{(5.8)}\rightarrow \frac{m_1(υ_1-υ'_1)(υ_1+υ'_1)}{m_1(υ_1-υ'_1)}=\frac{m_2(υ'_2-υ_2)(υ'_2+υ_2)}{m_2(υ'_2-υ_2)}\Rightarrow υ_1+υ'_1=υ'_2+υ_2. \quad (5.10)$$

Λύνουμε την 5.10 ως προς τον έναν άγνωστο: $υ'_2 = υ_1+υ'_1-υ_2$. (5.11)

$$5.8\overset{5.11}{\Longrightarrow} m_1(υ_1-υ'_1)=m_2(υ_1+υ'_1-υ_2-υ_2)\Rightarrow m_1υ_1-m_1υ'_1=m_2υ_1+m_2υ'_1-2m_2υ_2\Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)υ'_1=(m_1-m_2)υ_1+2m_2υ_2\Rightarrow υ'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}υ_2. \quad (5.12)$$

$$5.11\overset{5.12}{\Longrightarrow} \quad ... \quad υ'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}υ_2. \quad (5.13)$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Οι εξισώσεις 5.12 και 5.13 προέκυψαν θεωρώντας θετικές τις αλγεβρικές τιμές όλων των ταχυτήτων. Αν κάποια ταχύτητα από τις $υ_1$ και $υ_2$ δοθεί με αρνητική φορά, τότε την αντικαθιστούμε με πρόσημο -. Επίσης αν μετά τις αντικαταστάσεις κάποια από τις $υ'_1$ ή $υ'_2$ προκύψει αρνητική, σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από αυτή που ορίσαμε ως θετική.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Α. Τα δύο σώματα έχουν ΙΣΕΣ μάζες. ($m_1 = m_2$)

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις 5.12 και 5.13 όπου m_2 το m_1:

$$5.12 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_2$$

$$5.13 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_1 + \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων με ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους.

Β. Το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο.

Έστω ότι το αρχικά ακίνητο σώμα είναι αυτό που έχει μάζα m_2. Επομένως αντικαθιστούμε στις εξισώσεις 5.12 και 5.13 όπου **$\upsilon_2 = 0$**.

$$5.12 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.14)$$

$$5.13 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.15)$$

Β1. Αν επιπλέον είναι και $m_1 = m_2$, τότε από τις εξισώσεις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1$, δηλαδή το αρχικά κινούμενο σώμα ακινητοποιείται, ενώ το αρχικά ακίνητο σώμα κινείται με την ταχύτητα του πρώτου. (ανταλλαγή ταχυτήτων)

Β2. i. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει μεγαλύτερη μάζα ($m_1 > m_2$) τότε από τις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' > 0$ και $\upsilon_2' > 0$. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο σώματα, μετά την κρούση τους θα κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση (θετική).

Επειδή όμως $m_1 - m_2 < 2m_1$, θα είναι και $\upsilon_1' < \upsilon_2'$, επομένως τα δύο σώματα θα απομακρύνονται μεταξύ τους.

ii. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει μικρότερη μάζα ($m_1 < m_2$) τότε από τις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' < 0$ και $\upsilon_2' > 0$. Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση τους θα κινηθούν προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Β3. i. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει πολύ μικρότερη μάζα ($m_1 \ll m_2$) τότε για το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ ισχύει: $\frac{m_1}{m_2} \cong 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγάλη μάζα (m_2) στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 και έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_2}}{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{0 - 1}{0 + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -\upsilon_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_2}}{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 0}{0 + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 0$$

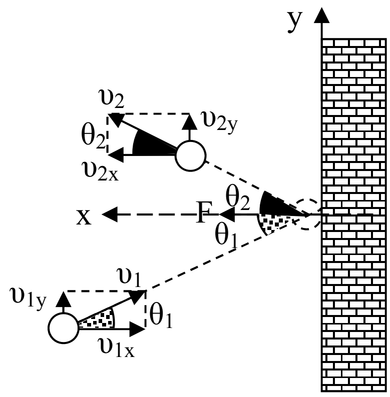
Μετά την κρούση το αρχικά κινούμενο σώμα κινείται αντίθετα με ταχύτητα ίδιου μέτρου, ενώ το αρχικά ακίνητο παραμένει ακίνητο και μετά την κρούση. Παράδειγμα τέτοιας κρούσης είναι η σύγκρουση μιας μικρής ελαστικής μπάλας με ακίνητο φορτηγό.

ii. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα ($m_1 \gg m_2$) τότε για το λόγο $\frac{m_2}{m_1}$ ισχύει: $\frac{m_2}{m_1} \cong 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγάλη μάζα (m_1) στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 και έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_1}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1-0}{1+0}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_1}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\frac{m_1}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 1}{1+0}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 2\cdot\upsilon_1$$

Μετά την κρούση το αρχικά κινούμενο σώμα εξακολουθεί να κινείται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και ίδιας φοράς, ενώ το αρχικά ακίνητο σώμα αποκτά ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από την ταχύτητα που είχε το αρχικά κινούμενο. Παράδειγμα τέτοιας κρούσης είναι η σύγκρουση φορτηγού με ένα ακίνητο μπαλάκι που κρέμεται από ένα νήμα.



Β4. Ένα μικρό ελαστικό μπαλάκι μάζας m, που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_1, σε λείο οριζόντιο δάπεδο, συγκρούεται ελαστικά με λείο τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε ότι η επαφή διαρκεί ελάχιστα. Μετά την κρούση το μπαλάκι έχει ταχύτητα μέτρου υ_2. Η δύναμη επαφής F μπάλας – τοίχου είναι κάθετη στον λείο τοίχο. Σύμφωνα με τον 2° νόμο του Newton ισχύει $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \Rightarrow$ $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p_x} + \overrightarrow{\Delta p_y}}{\Delta t}$. Η δύναμη F έχει τη διεύθυνση του άξονα x, άρα μεταβάλλει την ορμή της μπάλας μόνο κατά τον άξονα x. Επομένως θα είναι $\overrightarrow{\Delta p_y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{2y} - \vec{p}_{1y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{2y} = \vec{p}_{1y} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_{2y} = m\vec{\upsilon}_{1y} \longrightarrow$

$$\upsilon_{2y} = \upsilon_{1y} \Rightarrow \upsilon_2 \eta\mu\theta_2 = \upsilon_1 \eta\mu\theta_1 \qquad (5.16)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, δεν παρατηρείται απώλεια στην κινητική ενέργεια της μπάλας, επομένως ισχύει $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2$(μέτρα). Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό. Με αντικατάσταση στην 5.16 παίρνουμε ημθ_2 = ημθ_1 και επειδή οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι οξείες, προκύπτει $\theta_1 = \theta_2$. Η γωνία θ_1 που σχηματίζει η $\overrightarrow{\upsilon_1}$ με την κάθετη στον τοίχο αντιστοιχεί στη γωνία προσπτώσεως και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η $\overrightarrow{\upsilon_2}$ με την ίδια κάθετη αντιστοιχεί στη γωνία ανακλάσεως, οπότε προκύπτει ο νόμος της ανάκλασης (για την ελαστική κρούση)

ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΕΩΣ = ΓΩΝΙΑ ΑΝΑΚΛΑΣΕΩΣ

Για τη μεταβολή στην ορμή της μπάλας ισχύει $\overrightarrow{\Delta p} = \overrightarrow{\Delta p_x} = m(\vec{\upsilon}_{2x} - \vec{\upsilon}_{1x})$ ή για το μέτρο της μεταβολής $|\overrightarrow{\Delta p}| = m[|\upsilon_2|\sigma\upsilon\nu\theta_2 - (-|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta_1)] = 2m|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta_1$.

<u>**ΣΧΟΛΙΟ:**</u> Η εξίσωση 5.10 γράφεται $\upsilon_1 - \upsilon_2 = \upsilon_2' - \upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2 = -(\upsilon_1' - \upsilon_2')$. (5.17)

Η διαφορά $\upsilon_1 - \upsilon_2$ εκφράζει την ταχύτητα που μετράει για το σώμα μάζας m_1 ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς το σώμα μάζας m_2 (που κινείται μαζί με το m_2), δηλαδή τη **σχετική ταχύτητα** του m_1 ως προς το m_2. Επίσης η διαφορά $\upsilon_1' - \upsilon_2'$ εκφράζει την ταχύτητα που μετράει για το m_1 ο ίδιος παρατηρητής μετά την κεντρική ελαστική κρούση.
Σύμφωνα με την 5.17 οι σχετικές ταχύτητες, ως προς τον ίδιο παρατηρητή, των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες. Η 5.17 ισχύει και σε διανυσματική μορφή: $\boxed{\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2').}$

Παράδειγμα 5.1 Ένα σώμα $Σ_1$ έχει μάζα Μ και κινείται με ταχύτητα $υ_1$ = 10 m/s κατά μήκος του άξονα x. Το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα $Σ_2$ μάζας 4Μ, που κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 5 m/s. Να υπολογίσετε

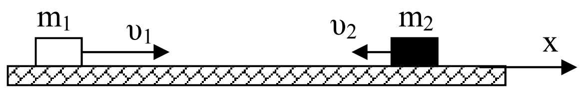
α. τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση τους.

β. το λόγο των σχετικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση τους, ως προς τον ίδιο παρατηρητή.

γ. το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μεταβιβάστηκε σε κάθε σώμα χωριστά.

Λύση

Θεωρούμε θετική τη φορά της ταχύτητας $υ_1$. Από την εκφώνηση δίνονται m_1 = Μ, m_2 = 4Μ, $υ_1$ = 10 m/s και $υ_2$ = - 5 m/s.

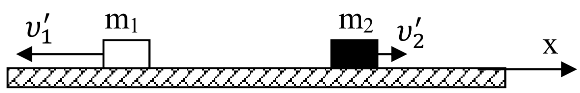


α. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στις εξισώσεις 5.12 και 5.13:

$\upsilon_1' = \frac{M-4M}{M+4M}10\frac{m}{s} + \frac{2\cdot4M}{M+4M}\left(-5\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \upsilon_1' = -\frac{3M}{5M}\cdot10\frac{m}{s} - \frac{8M}{5M}\cdot5\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = -14m/s$ και

$\upsilon_2' = \frac{2M}{M+4M}\ 10\frac{m}{s} + \frac{4M-M}{M+4M}\left(-5\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2M}{5M}10\frac{m}{s} - \frac{3M}{5M}5\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2' = 1\ m/s.$

Το σώμα $Σ_1$ μετά την κρούση θα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x, ενώ το σώμα $Σ_2$ θα κινείται προς τη θετική, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, με ταχύτητες μέτρων 14 m/s και 1 m/s, αντίστοιχα.



β. Η σχετική ταχύτητα του $Σ_1$ ως προς το $Σ_2$ πριν την κρούση είναι

$\upsilon_1 - \upsilon_2 = [10-(-5)]\frac{m}{s} = 15\frac{m}{s}$, ενώ μετά την κρούση είναι

$\upsilon_1' - \upsilon_2' = (-14-1)\frac{m}{s} = -15\frac{m}{s}$. Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η 5.17. Για το λόγο των σχετικών ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση ισχύει $\frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{\upsilon_1'-\upsilon_2'} = \frac{15}{-15} \Rightarrow \frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{\upsilon_1'-\upsilon_2'} = -1$, σχέση που ισχύει σε κάθε κεντρική ελαστική κρούση.

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι

$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}4M\upsilon_2^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} K_{\alpha\rho\chi} = 50M + 50M \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 100M$ (S.I.).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ είναι

$\Delta K_1 = K_{1,\tau\varepsilon\lambda} - K_{1,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}M(\upsilon_1')^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} \Delta K_1 = 98M - 50M \Rightarrow \Delta K_1 = 48M.$ (S.I.).

Το % ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ είναι

$$\frac{\Delta K_1}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{48M}{100M}100\% = 48\%$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ είναι

$\Delta K_2 = K_{2,\tau\varepsilon\lambda} - K_{2,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}4M(\upsilon_2')^2 - \frac{1}{2}4M\upsilon_2^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} \Delta K_2 = 2M - 50M \Rightarrow \Delta K_2 = -48M.$ (S.I.).

Το % ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ είναι

$$\frac{\Delta K_2}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{-48M}{100M}100\% = -48\%$$

Παρατηρήστε ότι $\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0$, σχέση που ισχύει σε κάθε ελαστική κρούση.

Παράδειγμα 5.2 Ένα σώμα Σ$_1$ μάζας m_1 = 4 kg έχει ταχύτητα $υ_1$ = 3 m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ$_2$, ίδιων διαστάσεων και μάζας m_2 = 2 kg. Να υπολογίσετε

α. τις τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση τους.

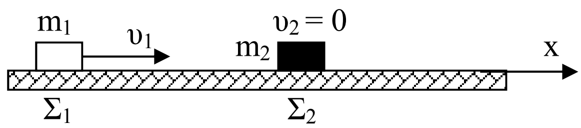
β. το ποσό της κινητικής ενέργειας που απέκτησε το Σ$_2$ και το ποσό της κινητικής ενέργειας που έχασε το σώμα Σ$_1$.

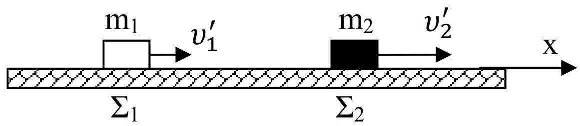
γ. τη μεταβολή της ορμής του Σ$_1$ και τη μεταβολή της ορμής του Σ$_2$.

δ. το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας που έχασε το Σ$_1$.

ε. το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ των μαζών που έπρεπε να είχαν τα δύο σώματα, ώστε το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σώμα Σ$_1$, να είναι μέγιστο.

Λύση





α. Επειδή το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις 5.14 και 5.15.

$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{4kg-2kg}{4kg+2kg} 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = 1\,m/s.$

$5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 4kg}{4kg+2kg} 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2' = 4\,m/s.$

β. $K_2' = \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2 \overset{S.I}{\Rightarrow} K_2' = \frac{1}{2}2\cdot 4^2 \Rightarrow K_2' = 16\,J.$

(Επειδή το σώμα Σ$_2$ ήταν αρχικά ακίνητο, η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας είναι $\Delta K_2 = K_2' - K_2 \Rightarrow \Delta K_2 = 16\,J - 0 \Rightarrow \Delta K_2 = 16\,J$).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Σ$_1$ είναι

$\Delta K_1 = K_1' - K_1 \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta K_1 = \frac{1}{2}4\cdot 1^2 - \frac{1}{2}4\cdot 3^2 \Rightarrow \Delta K_1 = -16\,J.$

Επομένως η ενέργεια που έχασε το Σ$_1$ είναι 16 J.

Παρατηρήστε ότι $ΔK_1 + ΔK_2 = 0$, σχέση που ισχύει σε κάθε ελαστική κρούση.

γ. $\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta p_1 = 4\cdot 1 - 4\cdot 3 \Rightarrow \Delta p_1 = -8\,kg\cdot m/s.$

$\Delta p_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta p_2 = 2\cdot 4 - 2\cdot 0 \Rightarrow \Delta p_2 = +8\,kg\cdot m/s.$

Παρατηρήστε ότι $Δp_1 + Δp_2 = 0$.

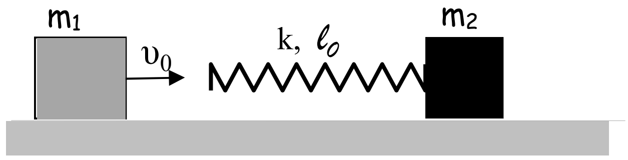
δ. Είναι $\Pi_1(\%) = \frac{\Delta K_1}{K_1}\cdot 100\% = -\frac{16}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3^2}\cdot 100\% = -88{,}9\%$. Το πρόσημο – δηλώνει την απώλεια της κινητικής ενέργειας. Προφανώς το ποσοστό αύξησης της κινητικής ενέργειας του Σ$_2$ είναι 88,9%.

ε. Το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το Σ$_1$ είναι ίσο με το ποσοστό της ενέργειας που κέρδισε το Σ$_2$. Η μέγιστη τιμή του ποσοστού αυτού είναι προφανώς το 100%.

Αυτό σημαίνει ότι το Σ$_1$ χάνει όλη του την κινητική ενέργεια, δηλαδή ακινητοποιείται.

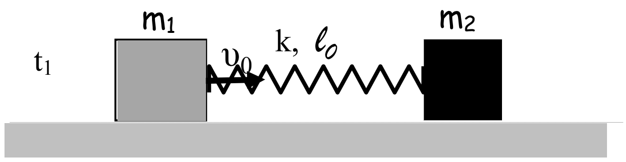
$K_1' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 = 0 \Rightarrow \upsilon_1' = 0 \overset{5.14}{\Longrightarrow} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$ ή $\frac{m_1}{m_2} = 1.$

Παράδειγμα 5.3 Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 που έχει ταχύτητα $υ_0$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο προς ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2, που έχει στο πίσω μέρος του δεμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ_0, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ζητάμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου (ή την ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν μεταξύ τους τα δύο σώματα) και να παραστήσουμε γραφικά, σε συνάρτηση με το χρόνο, την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (ποιοτικά διαγράμματα).



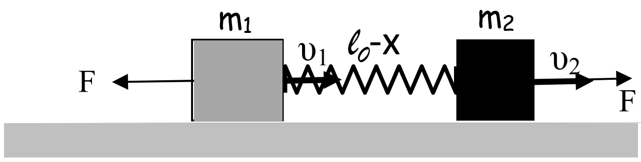
Λύση

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα $Σ_1$ έρχεται σε επαφή με το αριστερό άκρο του ελατηρίου (σχήμα 1). Τη στιγμή αυτή το σώμα $Σ_1$ έχει ταχύτητα $υ_0$, το σώμα $Σ_2$ είναι ακίνητο και κατά τον άξονα κίνησης x δεν ασκείται καμία δύναμη.



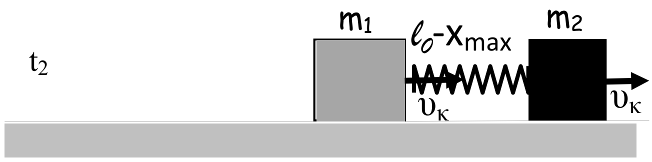
σχήμα 1

Κάποια στιγμή, λίγο μετά την t_1, το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά x και ασκεί στα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ δυνάμεις F ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς (σχήμα 2). Τη στιγμή αυτή το $Σ_1$ έχει ταχύτητα $υ_1$ και το $Σ_2$ ταχύτητα $υ_2$.



σχήμα 2

Επειδή η δύναμη F που ασκείται από το ελατήριο στο $Σ_1$ είναι αντίρροπη από την ταχύτητά του, το σώμα θα επιβραδύνεται και η ταχύτητα του θα μειώνεται. Αντίθετα, η ταχύτητα του $Σ_2$, από μηδέν που ήταν θα αρχίσει να αυξάνεται. Όσο χρόνο όμως η $υ_1$ είναι μεγαλύτερη από τη $υ_2$, το $Σ_1$ θα πλησιάζει το $Σ_2$ και το ελατήριο θα συμπιέζεται. Όμως η $υ_1$ μειώνεται συνεχώς και η $υ_2$ αυξάνεται συνεχώς. Κάποτε λοιπόν η $υ_2$ θα γίνει μεγαλύτερη από την $υ_1$, η απόσταση μεταξύ των σωμάτων θα αυξάνεται και το ελατήριο θα αποσυσπειρώνεται. Επομένως το ελατήριο θα έχει τη μεγαλύτερη συμπίεσή του τη στιγμή t_2 που τα δύο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες (σχήμα 3).



σχήμα 3

Μετά τη χρονική στιγμή t_2 το ελατήριο αποσυσπειρώνεται μέχρι να αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος και τα δύο σώματα να αποχωριστούν (χρονική στιγμή t_3).

Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα $υ_κ$ που έχουν τα δύο σώματα τη στιγμή της μέγιστης συμπίεσης. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια της Α.Δ.Ο για το σύστημα $Σ_1$ – $Σ_2$ – ελατήριο, το οποίο είναι συνεχώς μονωμένο μια και οι δυνάμεις F, -F στον οριζόντιο άξονα έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν και στον κατακόρυφο άξονα δεν υπάρχει κίνηση.

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_1\vec{υ}_0 + \vec{0} = m_1\vec{υ}_κ + m_2\vec{υ}_κ$ ή $m_1υ_0 = m_1υ_k + m_2υ_k \Rightarrow υ_κ = \frac{m_1υ_0}{m_1+m_2}$ (5.3.1)

Επειδή δεν υπάρχει απώλεια στη μηχανική ενέργεια του συστήματος, μια και όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε πριν την επαφή και στη μέγιστη συμπίεση.

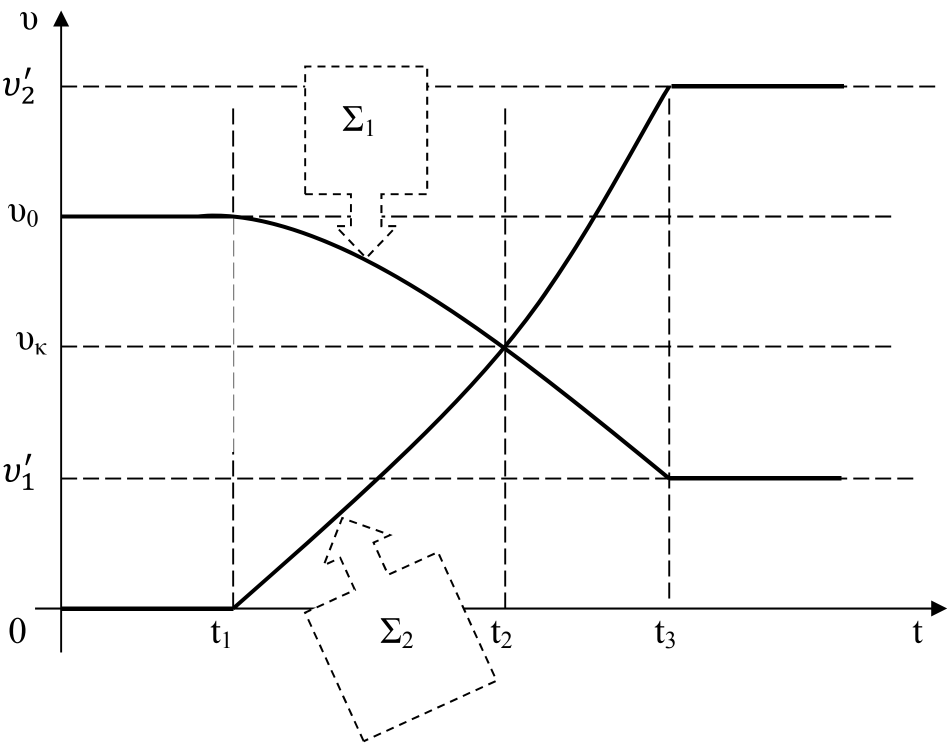
$$K_{αρχ} = K_{τελ} + U_{ελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1υ_κ^2 + \frac{1}{2}m_2υ_κ^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow$$

$$m_1υ_0^2 = (m_1+m_2)υ_κ^2 + kx_{max}^2 \overset{5.3.1}{\Longrightarrow} m_1υ_0^2 = (m_1+m_2)\left(\frac{m_1υ_0}{m_1+m_2}\right)^2 + kx_{max}^2 \Rightarrow$$

$$m_1υ_0^2 = \frac{m_1^2υ_0^2}{m_1+m_2} + kx_{max}^2 \Rightarrow kx_{max}^2 = m_1υ_0^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \Rightarrow$$

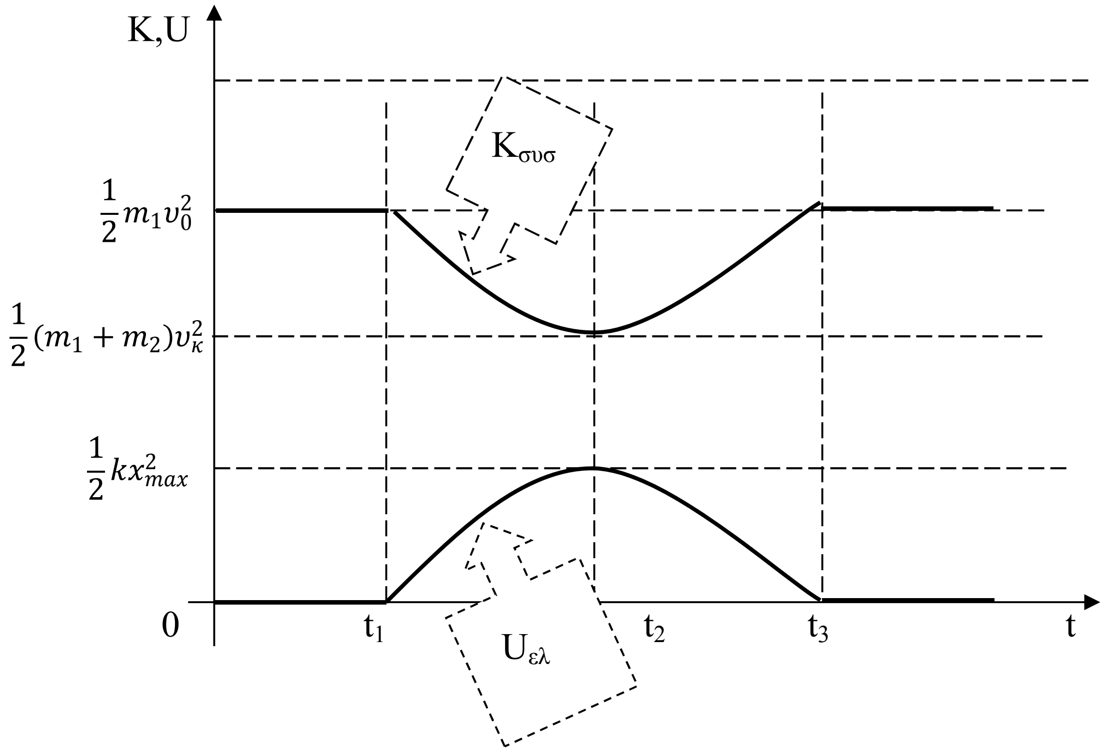
$$kx_{max}^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}υ_0^2 \Rightarrow x_{max} = υ_0\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}}$$

Ισοδύναμα, η ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν τα δύο σώματα είναι $\ell_0 - x_{max}$. Όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος τα δύο σώματα θα έχουν ταχύτητες $υ_1'$ και $υ_2'$, που υπολογίζονται από τις σχέσεις 5.14 και 5.15.



Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται, ποιοτικά, η μεταβολή της ταχύτητας για κάθε σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος, όσο το $Σ_1$ είναι σε επαφή με το ελατήριο, θα μεταβάλλεται, γιατί κάθε στιγμή πρέπει να ισχύει $K_{συστ} + U_{ελ}$ = σταθερό. Συγκεκριμένα θα μειώνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει τη μέγιστη συσπείρωσή του ($U_{ελ}$ = max) και στη συνέχεια θα αυξάνεται μέχρι να αποκτήσει σταθερή τιμή ίση με $K_{αρχ} = \frac{1}{2} m_1υ_0^2$. Αντίστοιχα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα αυξάνεται από την τιμή μηδέν μέχρι την τιμή $U_{ελ} = \frac{1}{2} kx_{max}^2$ και στη συνέχεια θα μειώνεται μέχρι να γίνει πάλι ίση με μηδέν.



Εφαρμογή: m_1 = 4 kg, m_2 = 2 kg, k = 300 N/m, υ_0 = 3 m/s και ℓ_0 = 1 m.

Η κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα δύο σώματα όταν το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συμπίεσή του είναι $\upsilon_\kappa = \frac{4kg \cdot 3\frac{m}{s}}{4kg+2kg} = 2\frac{m}{s}$.

Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι

$$x_{max} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{4kg \cdot 2kg}{(4kg+2kg)300\frac{N}{m}}} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{8}{1800} \cdot \frac{kgm}{N}} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{4}{900}s^2} = 0{,}2\,m$$

Η ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν τα δύο σώματα είναι $\ell_0 - x_{max}$ = 0,8 m.

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{max,\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}300\frac{N}{m}(0{,}2m)^2$ ή

$$U_{max,\varepsilon\lambda} = 6\,J$$

Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4kg \cdot \left(3\frac{m}{s}\right)^2$ ή

$$K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau} = 18\,J$$

Η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2 =$

$= \frac{1}{2}(4kg+2kg)\left(2\frac{m}{s}\right)^2$ ή $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} = 12\,J$.

Παρατηρείστε ότι $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} + U_{max,\varepsilon\lambda} = 18\,J = K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau}$.

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την αποσυσπείρωση του ελατηρίου, υπολογίζονται από τις εξισώσεις 5.14 και 5.15.

$$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{4kg - 2kg}{4kg+2kg} \cdot 3\frac{m}{s} = 1\frac{m}{s}$$

$$5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 4kg}{4kg+2kg} \cdot 3\frac{m}{s} = 4\frac{m}{s}$$

Παράδειγμα 5.4 Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται από πολύ μακριά με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 10^6 m/s προς ένα ακίνητο σωμάτιο α (^4_2He), το οποίο είναι ελεύθερο να κινηθεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα κάθε σωματίου τη στιγμή που βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

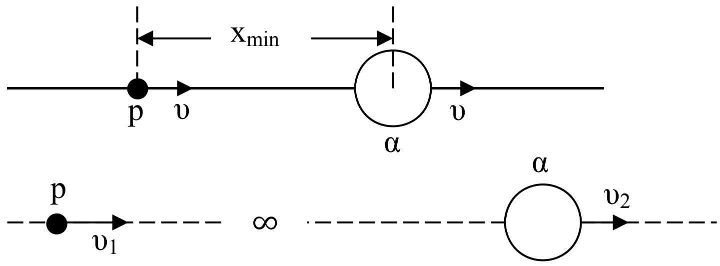
β. τη μεταβολή $K_{αρχ}$ - $K_{τελ}$, όπου $K_{αρχ}$ η αρχική κινητική ενέργεια του πρωτονίου και $K_{τελ}$ η κινητική ενέργεια του συστήματος στην ελάχιστη απόσταση. Τι εκφράζει αυτή η διαφορά;

γ. την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν.

δ. την ταχύτητα κάθε σωματίου, όταν θα βρεθούν ξανά σε πολύ μεγάλη απόσταση.

Δίνονται: $m_α = 4m_p$ και $m_p = 1{,}6\cdot10^{-27}$ kg, $q_a = 2q_p = 2e = 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}C$, $1keV = 1{,}6\cdot 10^{-16}J$, $k_C = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}$. Οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες.

Λύση



Στο σύστημα πρωτόνιο – πυρήνας ηλίου, ασκούνται μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις Coulomb (απωστικές). Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές του συστήματος, επομένως το σύστημα είναι ΣΥΝΕΧΩΣ μονωμένο, άρα ισχύει η Α.Δ.Ο. Επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι συντηρητικές, ισχύει και η Α.Δ.Μ.Ε (ΠΡΟΣΟΧΗ: Όχι η Α.Δ.Κ.Ε. γιατί το σύστημα έχει ΚΑΙ ηλεκτρική ΔΥΝΑΜΙΚΗ ενέργεια, η οποία μεταβάλλεται).

α. Σκεπτόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση έχουν ίσες ταχύτητες.

Θεωρούμε σαν αρχική κατάσταση όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται σε άπειρη απόσταση και σαν τελική όταν απέχουν την ελάχιστη απόσταση.

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_p\vec{υ}_0 + \vec{0} = m_p\vec{υ} + m_a\vec{υ} \longrightarrow m_pυ_0 = (m_p + m_a)υ \Rightarrow m_pυ_0 = 5m_pυ$

$$\Rightarrow υ = \frac{υ_0}{5} \Rightarrow υ = 2\cdot 10^5\frac{m}{s}$$

β. $K_{τελ} = \frac{1}{2}(m_p + m_a)υ^2 = \frac{5}{2}m_pυ^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{5}{2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}kg\cdot\left(2\cdot 10^5\frac{m}{s}\right)^2$

$$\Rightarrow K_{τελ} = 1{,}6\cdot 10^{-16}J = 1keV$$

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_pυ_0^2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{1}{2}1{,}6\cdot 10^{-27}kg\left(10^6\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{αρχ} = 8\cdot 10^{-16}J = 5keV$$

$$K_{αρχ} - K_{τελ} = 8\cdot 10^{-16}J - 1{,}6\cdot 10^{-16}J = 6{,}4\cdot 10^{-16}J = 4keV$$

Α.Δ.Μ.Ε. $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow K_{αρχ} - K_{τελ} = U_{τελ} - U_{αρχ} \rightarrow \underline{K_{αρχ} - K_{τελ} = U_{τελ}}$, επειδή $U_{αρχ} = 0$.

γ. Με τη βοήθεια της σχέσης $U_{τελ} = k_C\cdot\frac{q_pq_a}{x_{min}} = k_C\cdot\frac{2e^2}{x_{min}}$, μπορούμε να υπολογίσουμε και την ελάχιστη απόσταση που πλησιάζουν. Με αντικατάσταση: $x_{min} = 7{,}2\cdot10^{-13}$ m.

δ. Θεωρούμε σαν τελική την κατάσταση όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται ξανά σε άπειρη απόσταση, έχοντας ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$. ($3^{ο}$ σχήμα)

Α.Δ.Ο. $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_p\vec{υ}_0 + \vec{0} = m_p\vec{υ}_1 + m_a\vec{υ}_2 \longrightarrow m_pυ_0 = m_pυ_1 + m_aυ_2$

Α.Δ.Μ.Ε. $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_pυ_0^2 = \frac{1}{2}m_pυ_1^2 + \frac{1}{2}m_αυ_2^2$

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το ίδιο με το σύστημα των εξισώσεων 5.6 και 5.7 με $υ_2 = 0$. Η λύση του θα μας οδηγήσει στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 της ελαστικής κρούσης με το ένα σώμα αρχικά ακίνητο (το σωμάτιο α στο παράδειγμά μας).

$$5.14 \Rightarrow υ_1 = \frac{m_p - m_a}{m_p + m_a}υ_0 \Rightarrow υ_1 = \frac{m_p - 4m_p}{m_p + 4m_p}υ_0 \Rightarrow υ_1 = -\frac{3}{5}υ_0 \Rightarrow υ_1 = -6\cdot 10^5\frac{m}{s}$$

$$5.15 \Rightarrow υ_2 = \frac{2m_p}{m_p + m_a}υ_0 \Rightarrow υ_2 = \frac{2m_p}{m_p + 4m_p}υ_0 \Rightarrow υ_2 = \frac{2}{5}υ_0 \Rightarrow υ_2 = 4\cdot 10^5\frac{m}{s}$$

Το πρόσημο – στην ταχύτητα $υ_1$ δηλώνει ότι το πρωτόνιο κινείται αντίρροπα από την $υ_0$, δηλαδή αντίθετα από τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, με μέτρο ταχύτητας $6\cdot 10^5$ m/s.

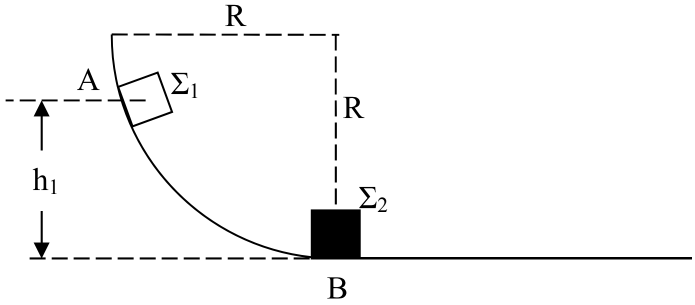
ΣΧΟΛΙΑ: 1. Επειδή η τελική ταχύτητα του πρωτονίου είναι αρνητική, σημαίνει ότι κάποια στιγμή είχε μηδενιστεί. Προσπαθήστε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο σωματίων τη στιγμή του μηδενισμού της ταχύτητας, καθώς και την ταχύτητα του σωματίου α τη στιγμή εκείνη.

2. Μπορούμε να συγκρίνουμε τα μέτρα των εσωτερικών δυνάμεων Coulomb στην ελάχιστη απόσταση με τις εξωτερικές δυνάμεις βαρύτητας. Ας πάρουμε το πιο βαρύ, που είναι το σωμάτιο α: $w_a = m_a g = 4m_p g = 4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}\cdot 10\,N = 6{,}4\cdot 10^{-26}\,N$

$$F = k_C\frac{q_p q_a}{x_{min}^2} \Rightarrow F = k_C\frac{2e^2}{x_{min}^2} \overset{S.I}{\Rightarrow} F = 9\cdot 10^9\frac{2\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(7{,}2\cdot 10^{-13})^2}N = 8{,}9\cdot 10^{-4}N$$

$\frac{F}{w_a} = \frac{8{,}9\cdot 10^{-4}N}{6{,}4\cdot 10^{-26}\,N} \cong 1{,}4\cdot 10^{22}$ δηλαδή $w_a \ll F$.

Παράδειγμα 5.5 Από το σημείο Α ενός λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου αφήνουμε ελεύθερο να ολισθήσει ένα μικρό σώμα $Σ_1$ που έχει μάζα m_1 = 1 kg. Στο κατώτερο σημείο Β του τεταρτοκυκλίου συναντά ένα άλλο ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 3 kg, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Το $Σ_2$ στη συνέχεια κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, που βρίσκεται στη διεύθυνση της εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο Β και σταματά αφού διανύσει διάστημα 1 m. Τα δύο σώματα έχουν με το οριζόντιο επίπεδο τον ίδιο συντελεστή κινητικής τριβής μ = 0,2. Να υπολογίσετε



α. το μέτρο της ταχύτητας $υ_2'$ του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

β. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ λίγο πριν την κρούση.

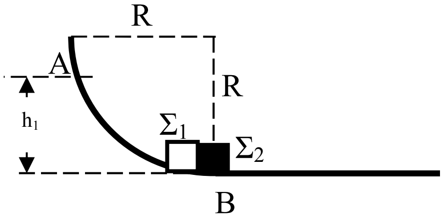
γ. το ύψος h_1 από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα $Σ_1$.

δ. την υψομετρική διαφορά μεταξύ της θέσης A από την οποία αφέθηκε το σώμα Σ_1 και της θέσης στην οποία θα σταματήσει στιγμιαία μετά την κρούση.

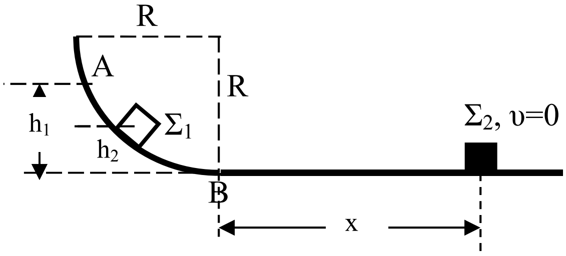
ε. την οριζόντια απόσταση μεταξύ των σωμάτων όταν θα σταματήσουν οριστικά.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση



Στο **πρώτο σχήμα** φαίνονται τα δύο σώματα τη στιγμή της κρούσης τους. Στο **δεύτερο σχήμα**, φαίνονται οι θέσεις, που τα δύο σώματα έχουν σταματήσει (το Σ_1 για πρώτη φορά). Αυτό φυσικά δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει ταυτόχρονα. Στο **τρίτο σχήμα** φαίνονται τα δύο σώματα σταματημένα οριστικά, σε απόσταση d μεταξύ τους.



α. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση θα σταματήσει, εξαιτίας της τριβής, αφού διανύσει διάστημα x = 1 m. Για την κίνηση του Σ_2, εφαρμόζου-με ΘΜΚΕ: $K_{τελ}$ - $K_{αρχ}$ = W (5.5.1)

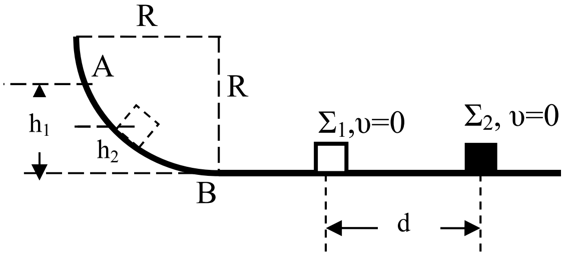
Η μόνη δύναμη που έχει έργο είναι η τριβή.

$$\Im_{\kappa,2} = \mu N_2 \Rightarrow \Im_{\kappa,2} = \mu m_2 g$$

$$5.5.1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 (\upsilon_2')^2 = -\Im_{\kappa,2} \cdot x \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_2 (\upsilon_2')^2 = -\mu m_2 g \cdot x \Rightarrow \upsilon_2' = \sqrt{2\mu g x}$$

$$\overset{S.I}{\Rightarrow} \upsilon_2' = \sqrt{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = 2\frac{m}{s}}$$



β. $5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_1+m_2}{2m_1}\upsilon_2' \Rightarrow$

$$\upsilon_1 = \frac{1kg + 3kg}{2 \cdot 1kg} \cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}}$$

γ. Επειδή το τεταρτοκύκλιο είναι λείο, εφαρμόζουμε για την κίνηση του Σ_1 από το σημείο A στο σημείο B, την ΑΔΜΕ: $K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow 0 + m_1 g h_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow$

$$h_1 = \frac{16}{20} m \Rightarrow \boldsymbol{h_1 = 0{,}8\, m}$$

δ. Το Σ_1 αμέσως μετά την κρούση θα έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση 5.14

$$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1kg - 3kg}{1kg + 3kg} \cdot 4\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = -2\frac{m}{s}$$

Το πρόσημο – δηλώνει ότι η υ_1' έχει αντίθετη φορά από αυτή που θεωρήσαμε θετική (της ταχύτητας υ_1). Δηλαδή το σώμα θα κινηθεί προς το τεταρτοκύκλιο.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την κίνηση του Σ_1 από λίγο μετά την κρούση μέχρι το ύψος h_2, που θα σταματήσει στιγμιαία: $\frac{1}{2} m_1 (\upsilon_1')^2 = m_1 g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{(\upsilon_1')^2}{2g} \Rightarrow h_2 = \frac{4}{20} m = 0{,}2\, m.$

Η διαφορά $h_1 - h_2 = 0{,}8\, m - 0{,}2\, m \Rightarrow \boldsymbol{h_1 - h_2 = 0{,}6\, m}$.

ε. $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_{\Im} \Rightarrow 0 - 0 = m_1 g h_2 - \Im_{k,1}(x - d) \Rightarrow m_1 g h_2 = \mu m_1 g x - \mu m_1 g d \Rightarrow$

$$d = \frac{\mu x - h_2}{\mu} \Rightarrow d = x - \frac{h_2}{\mu} \Rightarrow d = 1m - \frac{0{,}2m}{0{,}2} \Rightarrow \boldsymbol{d = 0}$$

Τα σώματα σταματούν στην ίδια θέση.

Παράδειγμα 5.6 Ένα σώμα Σ με μάζα M = 4,5 kg αφήνεται να πέσει από ορισμένο ύψος. Μετά από χρόνο 2 s ένα βλήμα με μάζα m = 0,5 kg, που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του σώματος Σ, με ταχύτητα μέτρου $υ_0$. Μετά την κρούση, η οποία διαρκεί ελάχιστα, το συσσωμάτωμα κινείται προς τα πάνω και φτάνει μέχρι το ίδιο ύψος από το οποίο αφέθηκε το σώμα Σ. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

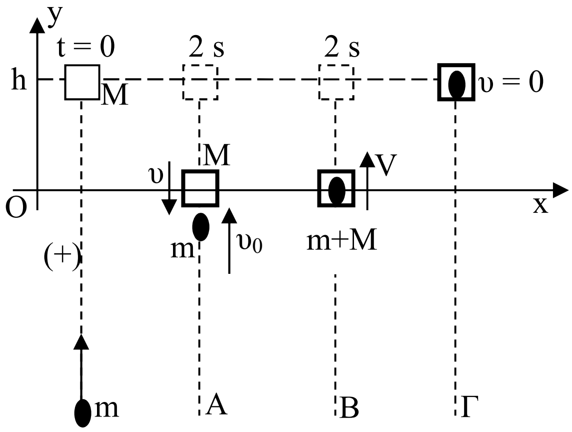
β. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος.

γ. το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμική ενέργεια κατά την κρούση.

δ. τους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση



α. Υπολογίζουμε τη μετατόπιση h του Σ από τη χρονική στιγμή t = 0 που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή t = 2 s που συγκρούστηκε με το βλήμα.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\ (2\ s)^2 \Rightarrow$$
$$h = 20\ m$$

Εφαρμόζουμε για το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση (θέση B) και μέχρι τη θέση (Γ) που σταματάει στιγμιαία, το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = -(M+m)gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boldsymbol{V = 20\frac{m}{s}}$$

β. Για το σύστημα βλήμα – σώμα Σ, εφαρμόζουμε την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + M\vec{υ} = (M+m)\vec{V} \rightarrow +mυ_0 - Mυ = (M+m)V$ (5.6.1)

Για την ταχύτητα υ του σώματος Σ λίγο πριν την κρούση, ισχύει υ = gt = 20 m/s.

$$5.6.1 \Rightarrow υ_0 = \frac{(M+m)V + Mυ}{m} \Rightarrow υ_0 = \frac{5\cdot 20 + 4{,}5\cdot 20}{0{,}5}\cdot\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{υ_0 = 380\frac{m}{s}}$$

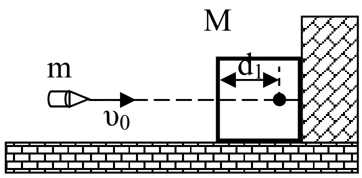
γ. Το ποσό της ενέργειας που έγινε θερμική είναι $Q = K_{συσ,λπ} - K_{συσ,λμ}$. Το ζητούμενο κλάσμα θα υπολογιστεί από τη σχέση $\frac{Q}{K_{συσ,λπ}} = \frac{K_{συσ,λπ} - K_{συσ,λμ}}{K_{συσ,λπ}} = 1 - \frac{K_{συσ,λμ}}{K_{συσ,λπ}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}mυ_0^2 + \frac{1}{2}Mυ^2}$

$$= 1 - \frac{5\cdot 20^2}{0{,}5\cdot 380^2 + 4{,}5\cdot 20^2} = 1 - \frac{2000}{74000} = \frac{72}{74} = \frac{36}{37} = 0{,}973$$

δ. $\frac{dK_{συστ}}{dt} = ΣF\cdot V\cdot συν180 = (M+m)gV(-1) = -5\cdot 10\cdot 20\ \frac{J}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK_{συστ}}{dt} = -1000\ \frac{J}{s}}$

$E = σταθ \Rightarrow U + K_{συσ} = σταθ. \Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{dK_{συστ}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK_{συστ}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dU}{dt} = 1000\ \frac{J}{s}}.$

Παράδειγμα 5.7 Βλήμα μάζας m = 0,2 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ και σφηνώνεται σε σταθερό ξύλινο κύβο μάζας M = 4,8 kg σε βάθος d_1 = 0,2 m. Αν ο κύβος ήταν ελεύθερος να κινηθεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε



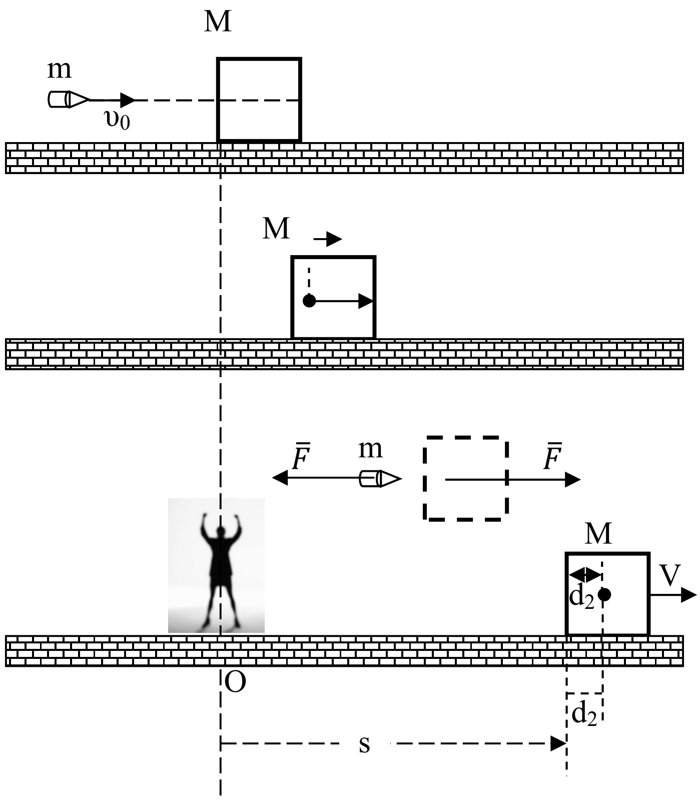
α. το βάθος στο οποίο θα εισχωρούσε το βλήμα μέσα σε αυτόν. Θεωρήστε ότι η μέση αντίσταση του ξύλου είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

β. το ποσοστό % της ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήμα – κύβος κατά την κρούση.

Λύση

α. **Κύβος σταθερός.** Στο βλήμα ασκείται η δύναμη αντίστασης από το ξύλο, την οποία θεωρούμε σταθερή και η οποία είναι αντίρροπη από την ταχύτητα του βλήματος. Εφαρμόζουμε για το βλήμα το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -\bar{F} \cdot d_1$ (5.7.1)

Κύβος ελεύθερος. Καθώς το βλήμα κινείται μέσα στον κύβο, δέχεται δύναμη F, αντίρροπη στην ταχύτητά του. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton και ο κύβος δέχεται από το βλήμα δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι το μεν βλήμα θα επιβραδύνεται, ο δε κύβος θα επιταχύνεται, μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V ως προς ακίνητο παρατηρητή. Από τη στιγμή που τα δύο σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα και μετά, το βλήμα παύει να κινείται σχετικά με τον κύβο, άρα δε θα εισχωρεί άλλο μέσα στον κύβο.



Το σύστημα βλήμα – κύβος είναι συνεχώς μονωμένο, επομένως ισχύει η Α.Δ.Ο.

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + 0 = (M+m)\vec{V} \rightarrow mυ_0 = (M+m)V$ (5.7.2)

Η μετατόπιση του κύβου ως προς τον ακίνητο παρατηρητή στη θέση O είναι s, ενώ του βλήματος, ως προς τον ίδιο ακίνητο παρατηρητή, είναι s + d_2.

Εφαρμόζουμε για το βλήμα το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -\bar{F}(s+d_2)$
(5.7.3)

Εφαρμόζουμε για τον κύβο το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow \frac{1}{2}MV^2 - 0 = +\bar{F} \cdot s$ (5.7.4)

Οι εξισώσεις 5.7.1 έως 5.7.4 αποτελούν σύστημα 4 εξισώσεων με 5 αγνώστους, τα $υ_0$, V, s, F και το ζητούμενο d_2.

$5.7.1 \Rightarrow \bar{F} = \frac{mυ_0^2}{2d_1}$ (5.7.5)

$5.7.2 \Rightarrow V = \frac{mv_0}{M+m}$ (5.7.6)

$5.7.4 \xrightarrow{(5.7.5),(5.7.6)} \frac{1}{2}M\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2d_1}s \Rightarrow s = \frac{Mm}{(M+m)^2}d_1$ (5.7.7)

$5.7.3 \xrightarrow{(5.7.6),(5.7.5)} \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\left(\frac{m\cancel{v_0}}{M+m}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{mv_0^2} = -\frac{\cancel{mv_0^2}}{\cancel{2}d_1}(s+d_2) \Rightarrow \frac{m^2}{(M+m)^2} - 1 = -\frac{s+d_2}{d_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow s + d_2 = d_1\left[1 - \frac{m^2}{(M+m)^2}\right] \Rightarrow d_2 = d_1\frac{(M+m)^2 - m^2}{(M+m)^2} - s \xrightarrow{(5.7.7)}$

$d_2 = d_1\frac{(M+m)^2 - m^2}{(M+m)^2} - \frac{Mm}{(M+m)^2}d_1 \Rightarrow d_2 = d_1\frac{M^2+Mm}{(M+m)^2} \Rightarrow d_2 = d_1\frac{M\cancel{(M+m)}}{(M+m)^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{d_2 = \frac{M}{M+m}d_1}.$

Με αντικατάσταση στο S.I. έχουμε: $d_2 = \frac{4{,}8\ kg}{5\ kg}0{,}2\ m \Rightarrow \boldsymbol{d_2 = 0{,}192\ m}$.

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\Pi(\%) = \frac{K_{\beta\lambda} - K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}}100\%$

$\Rightarrow \Pi(\%) = \left(1 - \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}}\right)100\%$. Είναι $\frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \xrightarrow{5.7.6} \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}} = \frac{M+m}{m}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 = \frac{m}{M+m}$

$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)100\% = \frac{M}{M+m}100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{4{,}8\ kg}{5\ kg}100\% \Rightarrow \boldsymbol{\Pi(\%) = 96\%}.$

Παράδειγμα 5.8 Ένα ξύλινο σώμα μάζας M = 1,9 kg είναι δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα (μη εκτατό = σταθερό μήκος) μήκους ℓ και ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας m = 0,1 kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_0$ σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του ξύλινου σώματος. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος, ώστε το νήμα να εκτραπεί κατά γωνία θ = 60^0, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 90 cm.

β. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος, ώστε το συσσωμάτωμα να φτάσει μέχρι τη θέση που το νήμα γίνεται οριζόντιο, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 80 cm. Πόσο είναι το μέτρο της τάσης του νήματος τότε;

γ. τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική κατακόρυφη θέση του, τη στιγμή που μηδενίζεται η τάση του, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 80 cm και το βλήμα ταχύτητα $υ_0$ = 100 m/s.

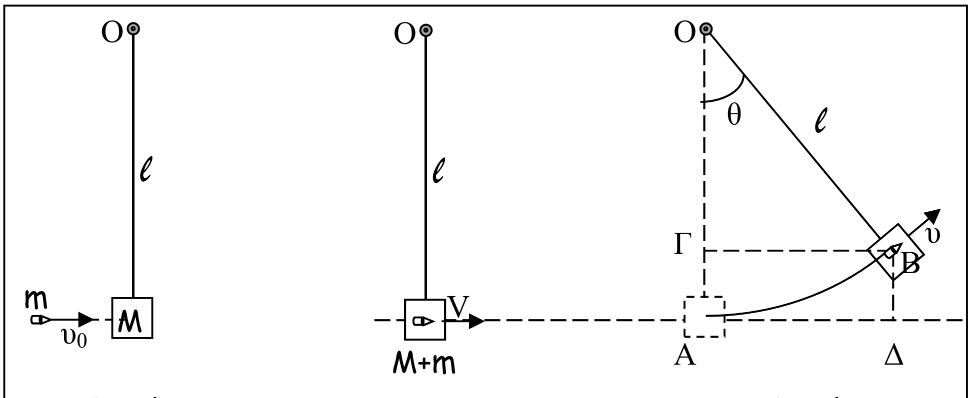
δ. την ελάχιστη ταχύτητα του βλήματος και το ποσοστό % της απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει ανακύκλωση, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 50 cm.

ε. τη μέγιστη ταχύτητα του βλήματος, ώστε να μη σπάσει το νήμα, αν το μήκος του είναι ℓ = 50 cm και το όριο θραύσης του είναι $T_{θρ}$ = 120 N.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

[Πριν προχωρήσετε στη λύση – μελέτη του παραδείγματος, καλό θα ήταν να ξαναθυμηθείτε τα σχετικά με την ανακύκλωση στη σελίδα 49].



Στο σχήμα 1α φαίνεται το βλήμα λίγο πριν σφηνωθεί στο ξύλο, στο σχήμα 1β φαίνεται το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την πλαστική κρούση και στο σχήμα 1γ φαίνεται το συσσωμάτωμα όταν το νήμα έχει σχηματίσει μια γωνία θ με την αρχική κατακόρυφη θέση ισορροπίας του.

Εφαρμόζουμε για την πλαστική κρούση την Α.Δ.Ο.

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_0 + 0 = (M+m)\vec{V} \to m\upsilon_0 = (M+m)V \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{M+m}{m}V$ (5.8.1)

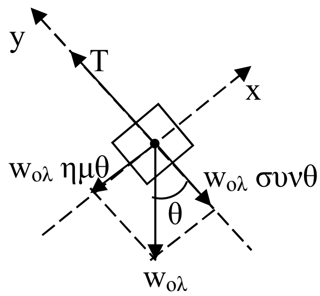
Κατά τη διάρκεια της κρούσης ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια. Μετά την κρούση η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για αμέσως μετά την κρούση μέχρι την τυχαία γωνιακή απόκλιση θ του νήματος: $E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \to K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$. Θεωρούμε $U_{\alpha\rho\chi} = 0$, επομένως $U_{\tau\varepsilon\lambda} = (M+m)gh = (M+m)g(\text{ΑΓ})$. Από τη γεωμετρία του σχήματος 1γ, προκύπτει ότι ΑΓ = ΟΑ – ΟΓ = $\ell - \ell$ συνθ = ℓ(1-συνθ)

Από την ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}(M+m)V^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 + (M+m)g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow$

$V^2 = \upsilon^2 + 2g\ell(1-\text{συνθ}).$ (5.8.2)

Βρίσκουμε την τάση του νήματος:

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το (συνολικό) βάρος του $w_{ο\lambda}$ και η τάση του νήματος Τ. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση του νήματος (άξονας y) και μία κατά τον κάθετο άξονα (άξονας x). (σχήμα 2)



σχήμα 2

Η κίνηση του σώματος είναι κυκλική με ακτίνα ℓ, η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη F_κ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα κατά τη διεύθυνση του νήματος και με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

$$F_\kappa = T - w_{o\lambda}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} = T - (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow T = \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \quad (5.8.3)$$

Παρατηρούμε ότι για συνθ ≥ 0, $\left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right]$, η τάση είναι θετικός αριθμός, σαν άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων, επομένως το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο.

α. Για θ = $\theta_{max} = 60^0$ είναι υ = 0 (σχ. 1γ) και από την 5.8.2 προκύπτει

$$V^2 = 2g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow V = \sqrt{2g\ell(1-\text{συν}\varphi)} \overset{S.I}{\Rightarrow} V = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9\cdot(1-\frac{1}{2})} \Rightarrow V = 3\frac{m}{s}$$

Από την 5.8.1 προκύπτει $\upsilon_0 = \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 60\frac{m}{s}}$ και από την 5.8.3 Τ = 10 Ν.

β. Στην οριζόντια θέση είναι θ = 90^0 και υ = 0.

Στη θέση αυτή, η τάση του νήματος δίνεται από τη σχέση 5.8.3 και με αντικατάσταση προκύπτει Τ = 0.

Με αντικατάσταση στην 5.8.2 έχουμε: $V^2 = 0 + 2\cdot 10\cdot 0{,}8\cdot(1-0) \Rightarrow V = 4\frac{m}{s}$.

Από την 5.8.1: $\upsilon_0 = \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\cdot 4\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 80\frac{m}{s}}$

γ. Από την 5.8.2: $V = \frac{m}{M+m}\upsilon_0 \Rightarrow V = \frac{0{,}1}{1{,}9+0{,}1}100\frac{m}{s} \Rightarrow \mathrm{V} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Από την 5.8.3 για Τ = 0: $0 = \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \upsilon^2 = -g\ell\sigma\upsilon\nu\theta$

Από την 5.8.2: $V^2 = -g\ell\sigma\upsilon\nu\theta + 2g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow V^2 = 2g\ell - 3g\ell\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2g\ell - V^2}{3g\ell} \overset{S.I}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}8-25}{3\cdot 10\cdot 0{,}8} \Rightarrow \boldsymbol{\text{συνθ} = -\frac{3}{8}}$ $\quad (\boldsymbol{\theta \cong 112^0})$

δ. Για να εκτελέσει ανακύκλωση, πρέπει στην ψηλότερη θέση να ισχύει $T \geq 0$ και θ = π.

Από την 5.8.3: $\frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \geq 0 \Rightarrow \upsilon^2 \geq -g\ell\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \upsilon^2 \geq g\ell.$ (5.8.4)

Από την 5.8.2: $V^2 - 2g\ell(1-\text{συνπ}) = \upsilon^2$ και με αντικατάσταση στην 5.8.4

$$V^2 - 2g\ell(1+1) \geq g\ell \Rightarrow V^2 \geq 5g\ell \overset{5.8.1}{\Longrightarrow} \left(\frac{m}{M+m}\upsilon_0\right)^2 \geq 5g\ell \Rightarrow \upsilon_0 \geq \frac{M+m}{m}\sqrt{5g\ell} \overset{S.I}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_0 \geq \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\sqrt{5\cdot 10\cdot 0{,}5} \Rightarrow \upsilon_0 \geq 100\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{0,min} = 100\frac{m}{s}}$$

Το ποσοστό της ελάττωσης της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_{0,min}^2}\right)\cdot 100\% =$$

$$\left(1 - \frac{(M+m)5g\ell}{m\left(\frac{M+m}{m}\sqrt{5g\ell}\right)^2}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\cdot 100\% = \frac{M}{M+m}\cdot 100\% = 95\%$$

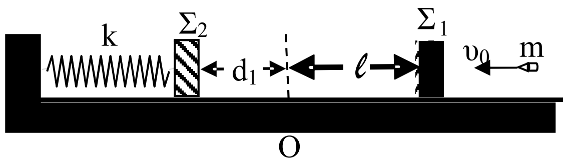
ε. Μετά την κρούση και καθώς το συσσωμάτωμα ανεβαίνει, η ταχύτητά του μειώνεται, η γωνία θ αυξάνεται και επομένως το συνθ μειώνεται. Σύμφωνα με την 5.8.3 η τάση του νήματος θα μειώνεται. Επομένως αν το νήμα δεν σπάσει στην αρχική κατακόρυφη θέση, δε θα σπάσει ποτέ. Αντικαθιστούμε στην 5.8.3 όπου υ = V και θ = 0:

$T = \frac{(M+m)V^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu 0$. Για να μη σπάσει το νήμα πρέπει $T \leq T_{\theta\rho} \Rightarrow$

$$\frac{(M+m)V^2}{\ell} + (M+m)g \leq T_{\theta\rho} \overset{5.8.1}{\Longrightarrow} \frac{2V^2}{0{,}5} + 2\cdot 10 \leq 120 \Rightarrow V^2 \leq 25 \Rightarrow V \leq 5\frac{m}{s}$$

$5.8.1 \Rightarrow \upsilon_0 \leq \frac{2}{0{,}1}\cdot 5\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_0 \leq 100\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{0,max} = 100\frac{m}{s}}$.

Παράδειγμα 5.9 Ένα βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 16 m/s, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 3m που βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση $\ell = 15{,}7\ cm$ από σημείο Ο του επιπέδου στην ευθεία κίνησης του βλήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα.



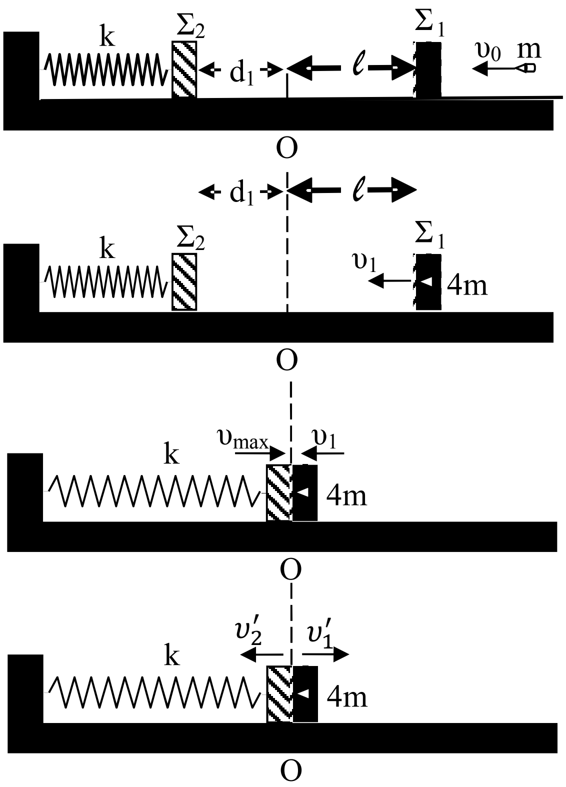
Σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 4m είναι προσδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με τη διεύθυνση κίνησης του βλήματος. Αρχικά το ελατήριο είναι συμπιεσμένο, ώστε το σώμα $Σ_2$ να απέχει απόσταση d_1 από το σημείο Ο που αντιστοιχεί στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη χρονική στιγμή που το βλήμα προσκρούει στο σώμα $Σ_1$, το σώμα $Σ_2$ αφήνεται ελεύθερο. Το συσσωμάτωμα του βλήματος και του σώματος $Σ_1$ κινούμενο με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_2$ τη στιγμή που αυτό έχει τη μέγιστη ταχύτητά του για πρώτη φορά. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο $υ_1$ της ταχύτητας του συσσωματώματος.

β. το μέτρο $υ_2'$ της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση του με το συσσωμάτωμα.

γ. την περίοδο της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$.

δ. το νέο πλάτος d_2 της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση του με το συσσωμάτωμα. Δίνεται π = 3,14. *[Επαναλ. Εξετάσεις 2002]*



Λύση

Αρχικά το βλήμα συγκρούεται πλαστικά με το σώμα $Σ_1$ και το συσσωμάτωμα που προκύπτει συγκρούεται ελαστικά με το σώμα $Σ_2$.

α. Για την πλαστική κρούση βλήματος – $Σ_1$:

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + 0 = (m+3m)\vec{υ}_1$.

Θεωρούμε θετική τη φορά της ταχύτητας $υ_0$.

Από την ΑΔΟ: $mυ_0 = 4mυ_1 \Rightarrow υ_1 = \frac{υ_0}{4} \Rightarrow υ_1 = 4\frac{m}{s}$

β. Επειδή το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, το συσσωμάτωμα θα φτάσει στο σημείο Ο με ταχύτητα $υ_1$ = 4 m/s. Το σώμα $Σ_2$ όταν φτάσει στο Ο θα έχει ταχύτητα μέτρου $υ_{max} = ωA = ωd_1$.

Τα δύο σώματα που συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά έχουν ίσες μάζες, 4m το καθένα, επομένως θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Θα ισχύει $υ_2' = υ_1 \Rightarrow \boldsymbol{υ_2' = 4\frac{m}{s}}$.

γ. Τα δύο σώματα ($Σ_1$+βλήμα) και $Σ_2$, συναντώνται στο Ο, επομένως έχουν ίσους χρόνους κίνησης. Ο χρόνος κίνησης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση $\ell = υ_1 t \Rightarrow t = \frac{0{,}157}{4}s$ ή $t = \frac{\frac{π}{20}}{4} \Rightarrow t = \frac{π}{80}\ s$

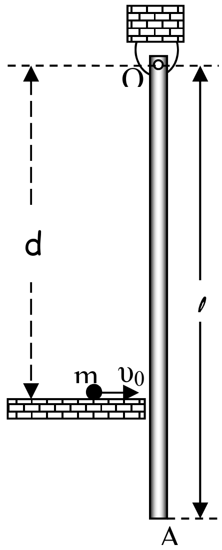
Ο χρόνος για να φτάσει το $Σ_2$ στο Ο είναι T/4, όπου T η περίοδός του. Επομένως

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{80}\ s \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{\pi}{20}\ s \Rightarrow \mathbf{T = 0,157\ s}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης του $Σ_2$ και μετά την κρούση θα είναι ίδια.

δ. Η ταχύτητα $υ'_2$ του $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσής του. Επομένως $υ'_2 = \omega d_2 \Rightarrow υ'_2 = \frac{2\pi}{T} d_2 \overset{S.I}{\Rightarrow} 4 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{20}} d_2 \Rightarrow 4 = 40 d_2 \Rightarrow \boldsymbol{d_2 = 0,1\ m.}$

Παράδειγμα 5.10 Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΟΑ, μάζας *Μ* και μήκους ℓ, στερεώνεται με άρθρωση σε οριζόντιο άξονα στο άκρο της Ο, γύρω από τον οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη στην κατακόρυφη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Ένα σώμα το οποίο θεωρούμε σαν σημειακό αντικείμενο μάζας *m = 1 kg*, κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου *υ₀ = 20 m/s* και συγκρούεται με τη ράβδο ελαστικά σε ένα σημείο της που απέχει από το άκρο της Ο απόσταση *d = 0,9 m*. Αμέσως μετά την κρούση το μικρό σώμα κινείται αντίθετα με οριζόντια ταχύτητα υ.



Α. Να υπολογίσετε αμέσως μετά την κρούση

α. το μέτρο της ταχύτητας υ του σώματος.

β. τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος.

γ. τη δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο, αν $\ell = 1{,}2\ m$.

Β. Να εξετάσετε αν η ράβδος θα εκτελέσει ανακύκλωση, αν $\ell = 0{,}6\ m$.

Γ. *** Να αποδείξετε ότι για το σύστημα σώμα – ράβδος μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής μόνο αν $d = \frac{2}{3}\ell$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στον άξονά της: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2 = 0{,}36\ kgm^2$ και g = 10 m/s^2.

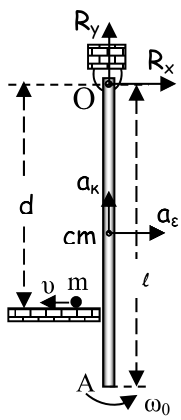
Λύση

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της που διέρχεται από το άκρο Ο, με εφαρμογή του θεωρήματος Steiner:

$$I_O = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_O = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_O = \frac{4}{12}M\ell^2 \Rightarrow I_O = 4I_{cm} \Rightarrow I_O = 1{,}44 kgm^2$$

Α. α. Τη στιγμή της κρούσης, στο σύστημα ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις των βαρών και της άρθρωσης. Οι ροπές αυτών των δυνάμεων ως προς το σημείο Ο είναι μηδέν γιατί οι φορείς τους διέρχονται από το Ο. Επομένως για το σύστημα ράβδος – σώμα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής (αρχή συστήματος αναφοράς το Ο): $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$ ή

$$L_{σωμ,αρχ} + 0 = L_{σωμ,τελ} + L_{ραβδ} \Rightarrow \mathrm{m}υ_0\mathrm{d} = -\mathrm{m}υd + I_O\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{md(υ_0+υ)}{I_O} \quad (5.10.1)$$



όπου υ είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αμέσως μετά την κρούση και ω_0 η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά η ράβδος την ίδια στιγμή. Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας για το σύστημα, λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση: $K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}mυ_0^2 = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I_0}\omega_0^2 \overset{5.10.1}{\Longrightarrow} mυ_0^2 = mυ^2 + \mathrm{I_0}\frac{m^2\mathrm{d}^2(υ_0+υ)^2}{\mathrm{I_0^2}}$, την οποία λύνουμε ως προς υ:

$$(I_O + md^2)υ^2 + 2md^2υ_0 \cdot υ - (I_O - md^2)υ_0^2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού και έχει δύο λύσεις, την υ = - $υ_0$ και την $\upsilon = \frac{(I_O - md^2)\upsilon_0}{I_O + md^2}$. Η πρώτη λύση όμως απορρίπτεται, γιατί έχει γίνει η κρούση, ενώ η δεύτερη είναι δεκτή. Με αντικατάσταση στο S.I. παίρνουμε

$$\upsilon = \frac{(1{,}44 - 1\cdot 0{,}9^2)20}{1{,}44 + 1\cdot 0{,}9^2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 5,6\frac{m}{s}}$$

β. Αντικαθιστούμε στην 5.10.1 στο S.I. $\omega_0 = \frac{1\cdot 0{,}9(20+5{,}6)}{1{,}44} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0 = 16\frac{rad}{s}}$

γ. [Πριν προχωρήσετε στη λύση – μελέτη του ερωτήματος, καλό θα ήταν να ξαναθυμηθείτε τα σχετικά με τη δύναμη από άρθρωση στη σελίδα 52].

Από τη ροπή αδράνειας, υπολογίζουμε τη μάζα της ράβδου: Είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2 \Rightarrow$

$$\mathrm{M} = \frac{12\cdot I_{cm}}{\ell^2} \Rightarrow \mathrm{M} = \frac{12\cdot 0{,}36}{1{,}2^2}kg \Rightarrow \mathrm{M} = 3\ \mathrm{kg}$$

Στην κατακόρυφη θέση αμέσως μετά την κρούση είναι Στ = 0. Από το ΘΝΣΚ παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$. Επειδή $a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \Rightarrow a_\varepsilon = 0$. Είναι $\Sigma F_x = Ma_\varepsilon \Rightarrow \mathbf{R_x = 0}$ και $\Sigma F_y = F_{\kappa\varepsilon\nu} \Rightarrow$

$$\mathrm{R}_y - \mathrm{Mg} = \mathrm{M}\omega_0^2\frac{\ell}{2} \overset{\text{S.I.}}{\Rightarrow} \mathrm{R}_y = 3\cdot 10 + 3\cdot 16^2\cdot 0{,}6 \Rightarrow \mathbf{R_y = 490,8\ N}$$

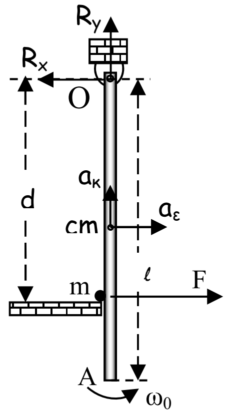
Επομένως **R = 490,8 N.**

Β. Για να εκτελέσει ανακύκλωση πρέπει να μπορέσει να φτάσει στην κατακόρυφη θέση, ώστε το άκρο της Α να είναι στο ψηλότερο σημείο. Πρέπει $K_{\alpha\rho\chi} \geq U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{I_O}\omega^2 \geq \mathrm{Mg}\ell$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\mathrm{M}\ell^2\omega^2 \geq \mathrm{Mg}\ell \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{6g}{\ell} \Rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{60}{0{,}6}}\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega \geq 10\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega_{\min} = 10\frac{rad}{s}$$

Επειδή $ω_0$ = 16 rad/s, είναι $ω_0$ > $ω_{min}$, άρα η ράβδος θα εκτελέσει ανακύκλωση.

Γ. Σύμφωνα με τον ορισμό της κρούσης, η κρούση διαρκεί ελάχιστα και στη διάρκειά της οι δυνάμεις επαφής που εμφανίζονται είναι πολύ ισχυρές, ώστε να αγνοούμε τις όποιες εξωτερικές δυνάμεις υπάρχουν για το πολύ χρονικό διάστημα της επαφής.



Στην περίπτωση της αρθρωμένης ράβδου όμως, η εξωτερική δύναμη R που ασκείται από τον άξονα, δεν μπορεί να αγνοηθεί γιατί είναι συνάρτηση της δύναμης επαφής, άρα ισχυρή. Τη στιγμή της κρούσης ασκείται η δύναμη επαφής F κάθετα στη ράβδο.

<u>Υπολογισμός της R_y</u>: $\Sigma F_y = F_{\kappa\varepsilon\nu} \Rightarrow \mathrm{R}_y - \mathrm{Mg} = \mathrm{M}\omega_0^2\frac{\ell}{2} \Rightarrow$

$\mathrm{R}_y = Mg + \mathrm{M}\omega_0^2\frac{\ell}{2}$, ανεξάρτητη της δύναμης F, άρα μπορεί να αγνοηθεί.

<u>Υπολογισμός της R_x</u>: Στ = $I_O\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mathrm{Fd} = \mathrm{I_O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{Fd}{\mathrm{I_O}} \Rightarrow$

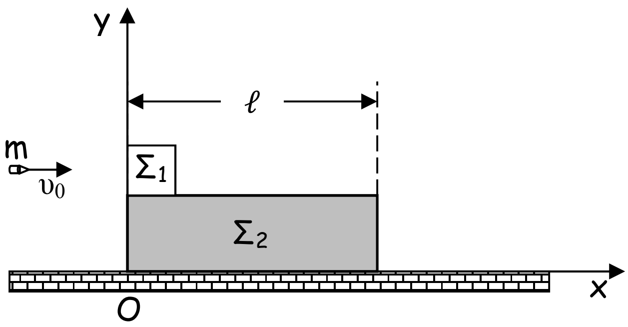
$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3Fd}{M\ell^2}$. Η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου δίνεται από τη σχέση $a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_\varepsilon = \frac{3Fd}{M\ell^2}\cdot\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_\varepsilon = \frac{3Fd}{2M\ell}$.

$$\Sigma F_x = Ma_\varepsilon \Rightarrow \mathrm{F} - \mathrm{R_x} = \frac{3Fd}{2\ell} \Rightarrow \mathrm{R_x} = \mathrm{F}\left(1 - \frac{3d}{2\ell}\right)$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη R_x είναι, γενικά, ανάλογη στην δύναμη επαφής F. Αυτός είναι και ο λόγος που ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. **εκτός αν** $1 - \frac{3d}{2\ell} = 0$, οπότε θα είναι R_x = 0 και τότε θα ισχύει η Α.Δ.Ο. Αυτό θα συμβεί αν $3d = 2\ell \Rightarrow \boldsymbol{d = \frac{2}{3}\ell}$.

(Το ίδιο ακριβώς θα ισχύει ακόμη κι αν η κρούση είναι πλαστική, μόνο που τότε πρέπει να πάρουμε υπόψη μας και την αλλαγή της θέσης του κέντρου μάζας της ράβδου.)

Παράδειγμα 5.11 Ένα ξύλινο σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1{,}8$ kg, ηρεμεί πάνω σε σώμα $Σ_2$ μάζας $M = 3$ kg, το οποίο με τη σειρά του ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους. Ένα βλήμα μάζας $m = 0{,}2$ kg, το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_0 = 50$ m/s, σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του $Σ_1$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του $Σ_1$ και της πάνω επιφάνειας του $Σ_2$ είναι $μ = 0{,}25$. Να υπολογίσετε



α. την τελική ταχύτητα του συστήματος βλήμα - σώμα $Σ_1$ – σώμα $Σ_2$.

β. το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να τη στιγμή που αποκτούν την τελική τους ταχύτητα.

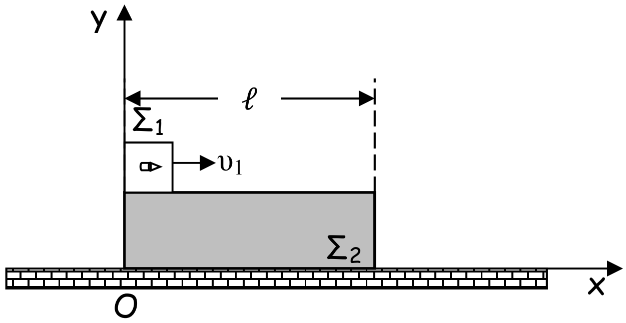
γ. το ελάχιστο μήκος ℓ που πρέπει να έχει το $Σ_2$, ώστε το $Σ_1$ να παραμένει συνέχεια πάνω σ' αυτό.

δ. το συνολικό ποσό της θερμικής ενέργειας που παράχθηκε.

Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

Λύση

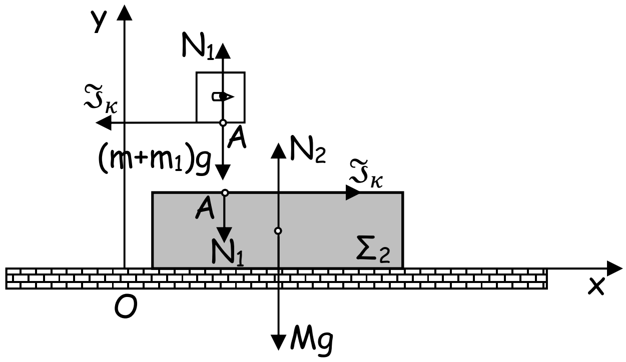
Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, λίγο μετά την κρούση και μέχρι τη στιγμή που το $Σ_1$ θα σταματήσει να κινείται σχετικά με το $Σ_2$, είναι



- Σώμα $Σ_1$ – βλήμα:

Άξονας x: Η τριβή ολίσθησης $\mathfrak{I}_κ$, με φορά αντίρροπη της ταχύτητας.

Άξονας y: Το συνολικό βάρος $(m+m_1)g$ και η κάθετη δύναμη στήριξης N_1. Ισχύουν οι εξισώσεις



$$ΣF_y = 0 \Rightarrow \mathrm{N}_1 - (m+m_1)g = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}_1 = (m+m_1)g. \qquad (5.11.1)$$

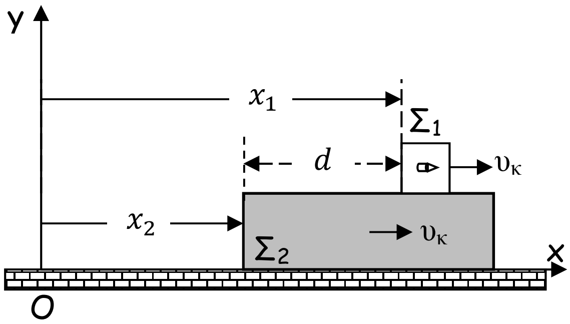
$$ΣF_x = (m+m_1)α_1 \Rightarrow -\mathfrak{I}_\mathrm{K} = (m+m_1)α_1$$

$$\Rightarrow -μ\mathrm{N}_1 = (m+m_1)α_1 \overset{5.11.1}{\Longrightarrow}$$

$$-μ(m+m_1)g = (m+m_1)α_1 \Rightarrow$$

$$α_1 = -μg \Rightarrow α_1 = -2{,}5\frac{m}{s^2}. \qquad (5.11.2)$$

Το συσσωμάτωμα εξ αιτίας της τριβής επιβραδύνεται ομαλά.



- Σώμα $Σ_2$:

Άξονας x: Η τριβή ολίσθησης $\mathfrak{I}_κ$, με φορά ομόρροπη της ταχύτητας (ως δράση – αντίδραση).

Άξονας y: Το βάρος του $Σ_2$, η δύναμη

N_1 ως αντίδραση της κάθετης δύναμης στήριξης που ασκείται στο $Σ_1$ και η κάθετη δύναμη στήριξης N_2 από το λείο οριζόντιο επίπεδο.

Ισχύουν οι εξισώσεις: $ΣF_y = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 - Mg = 0 \xRightarrow{5.11.1} N_2 = (m + m_1)g + Mg \Rightarrow$
$N_2 = (m + m_1 + M)g$.

$$ΣF_x = Mα_2 \Rightarrow \mathfrak{I}_K = Mα_2 \Rightarrow μN_1 = Mα_2 \xRightarrow{5.11.1} μ(m + m_1)g = Mα_2 \Rightarrow α_2 = \frac{μ(m + m_1)g}{M}$$

$$\Rightarrow α_2 = \frac{5}{3}\frac{m}{s^2} \qquad (5.11.3)$$

Το σώμα $Σ_2$ εξ αιτίας της τριβής επιταχύνεται ομαλά.

Το συσσωμάτωμα θα ολισθαίνει πάνω στο $Σ_2$, για όσο χρόνο η ταχύτητά του είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του $Σ_2$. Όταν οι ταχύτητες γίνουν ίσες, τότε θα σταματήσει και η ολίσθηση και θα μηδενιστεί η τριβή.

α. Στον οριζόντιο άξονα κίνησης ασκείται μόνο η τριβή, η οποία είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος συσσωμάτωμα – $Σ_2$. Το σύστημα είναι μονωμένο από λίγο πριν την κρούση βλήματος – $Σ_1$, μέχρι τέλους, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + \vec{0} + \vec{0} = (m + m_1 + M)\vec{υ}_κ \longrightarrow mυ_0 = (m + m_1 + M)υ_κ \Rightarrow$$

$$υ_κ = \frac{m}{m + m_1 + M}υ_0 \xRightarrow{S.I} υ_κ = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 1{,}8 + 3}50\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{υ_κ = 2\frac{m}{s}}$$

β. Το σώμα $Σ_2$ επιταχύνεται από την ηρεμία, με σταθερή επιτάχυνση $α_2 = \frac{5}{3}\frac{m}{s^2}$. Για την κίνηση του ισχύει η εξίσωση $υ_κ = α_2 t \Rightarrow t = \frac{υ_κ}{α_2} \Rightarrow t = \frac{2\frac{m}{s}}{\frac{5m}{3s^2}} \Rightarrow \boldsymbol{t = 1{,}2\ s}$.

γ. Στο χρονικό διάστημα του προηγούμενου ερωτήματος, το συσσωμάτωμα διανύει απόσταση x_1 και το $Σ_2$ απόσταση x_2, ως προς την αρχή Ο του συστήματος αναφοράς.

Ισχύουν οι εξισώσεις: $x_1 = υ_1 t + \frac{1}{2}α_1 t^2$, όπου $υ_1$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση του βλήματος με το $Σ_1$, και $x_2 = \frac{1}{2}α_2 t^2$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα $υ_1$ είτε από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση, είτε από την εξίσωση κίνησης $υ_κ = υ_1 + α_1 t$, με $α_1 = -2{,}5\frac{m}{s^2}$. Από την Α.Δ.Ο.:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + \vec{0} = (m + m_1)\vec{υ}_1 \longrightarrow mυ_0 = (m + m_1)υ_1 \Rightarrow υ_1 = \frac{mυ_0}{m + m_1} \Rightarrow υ_1 = 5\frac{m}{s}$$

$$x_1 = υ_1 t + \frac{1}{2}α_1 t^2 \xRightarrow{S.I} x_1 = 5 \cdot 1{,}2 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}5) \cdot 1{,}2^2 \Rightarrow x_1 = 6 - 1{,}8 \Rightarrow x_1 = 4{,}2\ m$$

$$x_2 = \frac{1}{2}α_2 t^2 \xRightarrow{S.I} x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 1{,}2^2 \Rightarrow x_2 = 1{,}2\ m$$

Η μετατόπιση του συσσωματώματος πάνω στο $Σ_2$ είναι $d = x_1 - x_2 \Rightarrow d = 3\ m$.

Αν ℓ είναι το μήκος του $Σ_2$, τότε για να παραμείνει το συσσωμάτωμα πάνω στο $Σ_2$, πρέπει $d \le \ell \Rightarrow \ell \ge 3\ m \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{min} = 3\ m}$.

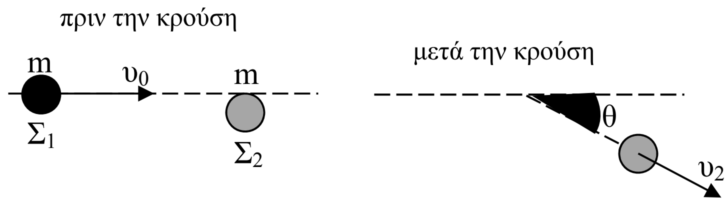
δ. Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{αρχ} = K_{βλ} + K_1 + K_2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{1}{2}mυ_0^2 + 0 + 0$

$$\Rightarrow K_{αρχ} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 50^2 \Rightarrow K_{αρχ} = 250\ J$$

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}(m + m_1 + M)υ_κ^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{1}{2} \cdot 5kg\left(2\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{τελ} = 10\ J$$

Είναι $Q = K_{αρχ} - K_{τελ}$ άρα $Q = 240\ J$.

Παράδειγμα 5.12 Μια λεία σφαίρα $Σ_1$ μάζας m, κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα $υ_0$, χωρίς να περιστρέφεται. Η σφαίρα $Σ_1$ συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη πανομοιότυπη σφαίρα $Σ_2$. Η κρούση των δύο σφαιρών είναι πλάγια και διαρκεί ελάχιστα.



Α. Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση και οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους.

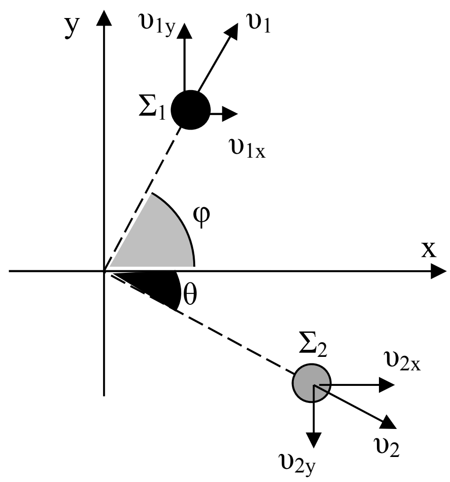
Β. Αν $υ_0$ = 8 m/s και η σφαίρα $Σ_2$ μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία $θ = 30^0$ με τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $υ_0$, να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα $υ_1$ της σφαίρας $Σ_1$ και το μέτρο της ταχύτητας $υ_2$ της σφαίρας $Σ_2$ μετά την κρούση.

β. το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της $Σ_1$ το οποίο μεταβιβάστηκε στη $Σ_2$ κατά την κρούση.

Λύση

Α. Το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο, άρα ισχύει η Α.Δ.Ο.



$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (5.12.1)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα ισχύει και η Α.Δ.Κ.Ε.

Εκφράζουμε την κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την ορμή: $\left.\begin{matrix} K = \frac{1}{2}mυ^2 \\ p = mυ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} K = \frac{1}{2}mυ^2 \\ υ = \frac{p}{m} \end{matrix}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \Rightarrow$

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow K_0 = K_1 + K_2 \Rightarrow \frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \Rightarrow$$

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2. \quad (5.12.2)$$

Υψώνουμε και το δύο μέλη της 5.12.1 στο τετράγωνο και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε

$$(\vec{p}_0)^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \Rightarrow p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 \xRightarrow{5.12.2} 2\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ \vec{p}_1 \perp \vec{p}_2 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} υ_1 = 0 \\ υ_2 = 0 \\ \vec{υ}_1 \perp \vec{υ}_2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{matrix}$$

(i) Αν $υ_1 = 0$, τότε από την 5.12.2 προκύπτει $υ_2 = υ_0$, δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο αν η ελαστική κρούση ήταν κεντρική. Επομένως η λύση ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ.

(ii) Αν $υ_2 = 0$, τότε από την 5.12.2 προκύπτει ότι $υ_1 = υ_0$, δηλαδή δεν έγινε κρούση. Επομένως και η λύση αυτή ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ.

(iii) Η λύση αυτή είναι η μόνη ΔΕΚΤΗ. Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους.

Β. α. Από την Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + \vec{0} = m\vec{υ}_1 + m\vec{υ}_2$.

Άξονας x: $mυ_0 + 0 = mυ_{1x} + mυ_{2x} \Rightarrow υ_0 = υ_{1x} + υ_{2x} \Rightarrow υ_0 = υ_1 συνφ + υ_2 συνθ$ (5.12.3)

Άξονας y: $0 + 0 = mυ_{1y} - mυ_{2y} \Rightarrow υ_{1y} = υ_{2y} \Rightarrow υ_1 ημφ = υ_2 ημθ$ (5.12.4)

Σύμφωνα με το ερώτημα Α οι δύο σφαίρες θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις, δηλαδή θα ισχύει φ + θ = 90^0, άρα **φ = 60^0**.

$5.12.4 \Rightarrow υ_1 ημ60^0 = υ_2 ημ30^0 \Rightarrow υ_1\sqrt{3} = υ_2$ (5.12.5)

$$5.12.3 \Rightarrow υ_0 = υ_1\frac{1}{2} + υ_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2υ_0 = υ_1 + \sqrt{3}\cdot υ_2 \xRightarrow{5.12.5} 2υ_0 = υ_1 + \sqrt{3}\cdot υ_1\sqrt{3} \Rightarrow 2υ_0 = 4υ_1$$

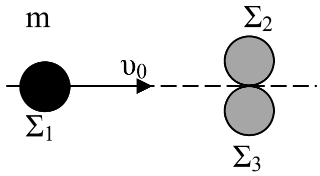
$$υ_1 = \frac{υ_0}{2} \Rightarrow \boldsymbol{υ_1 = 4\frac{m}{s}}$$

$$5.12.5 \Rightarrow \boldsymbol{υ_2 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$$

β. Είναι $K_{1,αρχ} = \frac{1}{2}mυ_0^2$ και $K_{2,τελ} = \frac{1}{2}mυ_2^2$

$$Π(\%) = \frac{K_{2,τελ}}{K_{1,αρχ}}100\% \Rightarrow Π(\%) = \frac{\frac{1}{2}mυ_2^2}{\frac{1}{2}mυ_0^2}100\% \Rightarrow Π(\%) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right)^2 \cdot 100\% \Rightarrow \boldsymbol{Π(\%) = 75\%}$$

Παράδειγμα 5.13 Τρεις πανομοιότυπες λείες σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$, μπορούν να κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο Οι σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ ηρεμούν εφαπτόμενες μεταξύ τους. Η σφαίρα $Σ_1$ κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $υ_0$ = 10 m/s, χωρίς να περιστρέφεται. Η διεύθυνση της ταχύτητας $υ_0$ διέρχεται από το σημείο επαφής των σφαιρών $Σ_2$ και $Σ_3$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κρούση της $Σ_1$ με τις σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ είναι ελαστική. Να υπολογίσετε



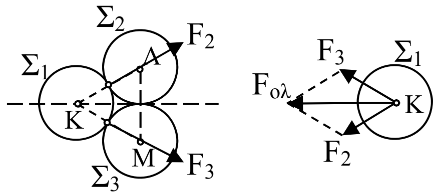
α. τις ταχύτητες των τριών σφαιρών μετά την κρούση τους.

β. το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας της $Σ_1$ που μεταβιβάστηκε σε κάθε μία από τις σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ μετά την κρούση.

γ. τη μεταβολή της ορμής της $Σ_1$, αν η μάζα κάθε σφαίρας είναι m = 0,1 kg.

Λύση

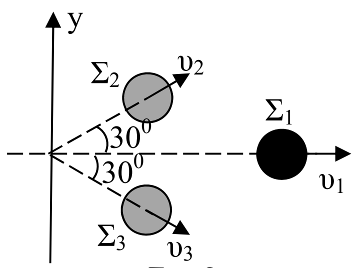
Οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα R, επομένως τη στιγμή της κρούσης τα κέντρα τους σχηματίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ, πλευράς 2R.



Σχ. 1 Σχ. 2

Οι δυνάμεις επαφής, ανά δύο, έχουν τη διεύθυνση της διακέντρου (σχ.1). Επομένως οι σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ θα κινηθούν σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία $θ_2 = θ_3$ = 30^0 με τη διεύθυνση της $υ_0$. Επειδή $F_2 = F_3$, η σφαίρα $Σ_1$ θα κινηθεί στη διεύθυνση της συνισταμένης τους, δηλαδή στη διεύθυνση της διχοτόμου, άρα στην αρχική της διεύθυνση (σχ.2).

α. Αναλύουμε τις ταχύτητες $υ_2$ και $υ_3$ σε συνιστώσες, μία κατά τον άξονα της αρχικής ταχύτητας (άξονας x) και μία κατά τον κάθετο άξονα y. Είναι $υ_{2x} = υ_2 συν30$, $υ_{2y} = υ_2 ημ30$, $υ_{3x} = υ_3 συν30$ και $υ_{3y} = υ_3 ημ30$.



Σχ. 3

Το σύστημα των τριών σφαιρών είναι μονωμένο και κατά τους δύο άξονες, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. για κάθε άξονα χωριστά.

Άξονας x: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x} \rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + m\upsilon_{2\chi} + m\upsilon_{3\chi} \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\sigma\upsilon\nu30 + \upsilon_3\sigma\upsilon\nu30$

$\Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2} + \upsilon_3\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5.13.1)

Άξονας y: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi,y} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,y} \rightarrow 0 = 0 + m\upsilon_{2\chi} - m\upsilon_{3\chi} \Rightarrow \upsilon_2\eta\mu30 = \upsilon_3\eta\mu30 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3$ (5.13.2)

$5.13.1 \xRightarrow{5.13.2} \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\sqrt{3}.$ (5.13.3)

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η Α.Δ.Κ.Ε. $K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \xRightarrow{5.13.2} \upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2.$ (5.13.4)

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων 5.13.3 και 5.13.4:

$5.13.3 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0 - \upsilon_2\sqrt{3}.$ (5.13.5)

$$5.13.4 \xRightarrow{5.13.5} \upsilon_0^2 = \left(\upsilon_0 - \upsilon_2\sqrt{3}\right)^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon_0^2 - 2\sqrt{3}\upsilon_2\upsilon_0 + 3\upsilon_2^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$5\upsilon_2^2 = 2\sqrt{3}\upsilon_2\upsilon_0$. Είναι $\upsilon_2 \neq 0$, γιατί αν $\upsilon_2 = 0$ τότε σημαίνει ότι δεν έγινε κρούση.

Άρα $5\upsilon_2 = 2\sqrt{3}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\upsilon_0 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.

Από την 5.13.2 προκύπτει $\boldsymbol{\upsilon_2 = \upsilon_3 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.

Από την 5.13.5 (στο S.I): $\upsilon_1 = 10 - 4\sqrt{3}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = -2\frac{m}{s}}$. Το πρόσημο – δηλώνει ότι η υ_1 έχει φορά αντίθετη από αυτή που σημειώνεται στο σχήμα 3.

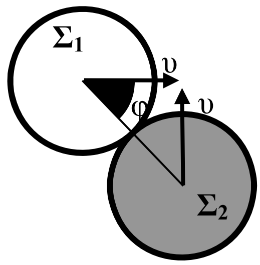
β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$. Επειδή $\upsilon_2 = \upsilon_3$ είναι $K_2 = K_3 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$. Το ζητούμενο κλάσμα είναι

$$\frac{K_2}{K_{1,\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_0}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{10}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{48}{100}}$$

γ. $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta p_1 = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \Rightarrow \Delta p_1 = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) \xRightarrow{S.I} \Delta p_1 = 0{,}1[-2 - 10] \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\Delta p_1 = -1{,}2\frac{kgm}{s}}$$

****Παράδειγμα 5.14** Δύο λείες σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες και ίσες ακτίνες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες υ, χωρίς να περιστρέφονται, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται ελαστικά. Τη στιγμή που αρχίζει η σύγκρουση η ταχύτητα της Σ_1 σχηματίζει γωνία φ με τη διάκεντρο των σφαιρών. Μετά την κρούση οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 κινούνται με ταχύτητες μέτρων υ_1' και υ_2' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν



α. φ = 0 τότε $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon\sqrt{2}, \theta = 45^0$ (με τον οριζόντιο άξονα).

β. φ = 90^0 τότε $\upsilon_1' = \upsilon\sqrt{2}, \theta = 45^0$ και $\upsilon_2' = 0$.

γ. φ = 45^0 τότε οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

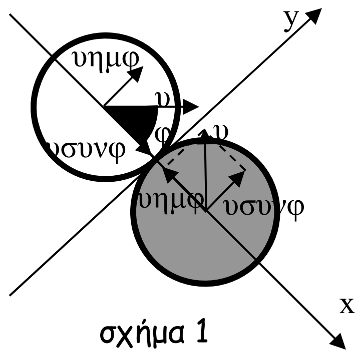
Σε κάθε μία περίπτωση να κάνετε και ένα σχήμα στο οποίο να φαίνονται οι σφαίρες λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση.

Οι κινήσεις των σφαιρών γίνονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Λύση

Επιλέγουμε δύο ορθογώνιους άξονες, x και y, έτσι ώστε ο άξονας x να συμπίπτει με τη διάκεντρο των σφαιρών, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1. Αναλύουμε τις ταχύτητες υ των δύο σφαιρών σε αυτούς τους άξονες. Είναι $υ_{1,x}$ = υσυνφ, $υ_{1,y}$ = υημφ για τη $Σ_1$ και $υ_{2,x}$ = - υημφ, $υ_{2,y}$ = υσυνφ για τη $Σ_2$.

Η κρούση των δύο σφαιρών γίνεται κατά τον άξονα x, ενώ κατά τον άξονα y δεν υπάρχει κρούση (οι σφαίρες κινούνται εφαπτομενικά).



σχήμα 1

Άξονας x: Οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, επομένως θα ανταλλάξουν ταχύτητες: $\upsilon'_{1x} = \upsilon_{2x} \Rightarrow \upsilon'_{1x} = -\upsilon\eta\mu\phi$ (5.14.1)

$\upsilon'_{2x} = \upsilon_{1x} \Rightarrow \upsilon'_{2x} = \upsilon\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.2)

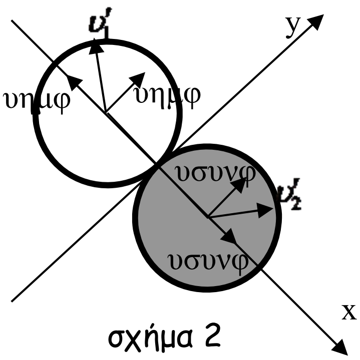
Άξονας y: Οι σφαίρες διατηρούν τις ταχύτητές τους επειδή κατά τον άξονα y δεν συμβαίνει κρούση.

Είναι $\upsilon'_{1y} = \upsilon_{1y} \Rightarrow \upsilon'_{1y} = \upsilon\eta\mu\phi$ (5.14.3)

$\upsilon'_{2y} = \upsilon_{2y} \Rightarrow \upsilon'_{2y} = \upsilon\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.4)

Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει: $\upsilon'_1 = \sqrt{\left(\upsilon'_{1x}\right)^2 + \left(\upsilon'_{1y}\right)^2} \overset{5.14.1}{\underset{5.14.3}{\Rightarrow}}$

$\upsilon'_1 = \sqrt{\upsilon^2\eta\mu^2\phi + \upsilon^2\eta\mu^2\phi} \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon\sqrt{2}\cdot\eta\mu\phi$ (5.14.5)



σχήμα 2

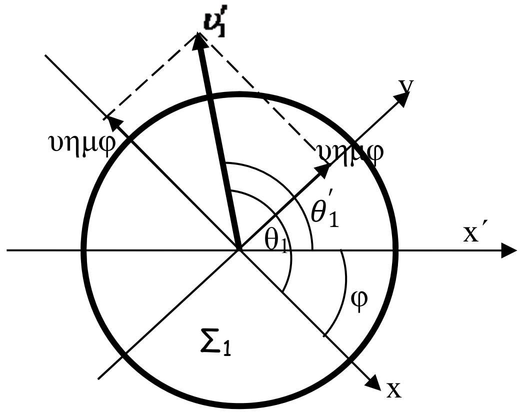
$\upsilon'_2 = \sqrt{\left(\upsilon'_{2x}\right)^2 + \left(\upsilon'_{2y}\right)^2} \overset{(5.14.2)}{\underset{(5.14.4)}{\Rightarrow}} \upsilon'_2 = \sqrt{\upsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\phi + \upsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\phi} \Rightarrow$

$\upsilon'_2 = \upsilon\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.6)

Η γωνία $θ_1$ που σχηματίζει η υ'_1 με τον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{\upsilon'_{1y}}{\upsilon'_{1x}} \overset{5.14.3}{\underset{5.14.2}{\Rightarrow}}$

$\varepsilon\varphi\theta_1 = -1 \Rightarrow \theta_1 = 135^0$. Η γωνία $θ_2$ που σχηματίζει η υ'_2 με τον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{\upsilon'_{2y}}{\upsilon'_{2x}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta_2 = 1 \Rightarrow \theta_2 = 45^0$.

Για να υπολογίσουμε τη γωνία θ'_1 που σχηματίζει η ταχύτητα υ'_1 με τον οριζόντιο άξονα (έστω x'), δουλεύουμε στο διπλανό σχήμα 3:



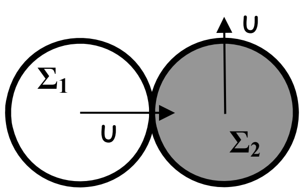
σχήμα 3

Όπως προκύπτει, η σχέση μεταξύ των γωνιών είναι: $\theta_1 = \theta'_1 + \varphi \Rightarrow \theta'_1 = \theta_1 - \varphi \Rightarrow \theta'_1 = 135^0 - \varphi$ (5.14.7)

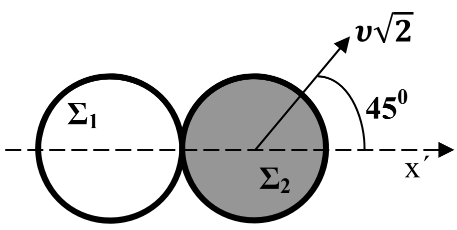
Με ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η ταχύτητα υ'_2 της σφαίρας $Σ_2$ σχηματίζει, με τον οριζόντιο άξονα x', γωνία $\theta'_2 = 45^0 - \varphi$ (5.14.8)

α. Αν φ = 0, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_1 = 0}$, γιατί ημ$0^0$ = 0 και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_2 = \upsilon\sqrt{2}}$, γιατί συν$0^0$ = 1.

Από την 5.14.8 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta'_2 = 45^0}$.

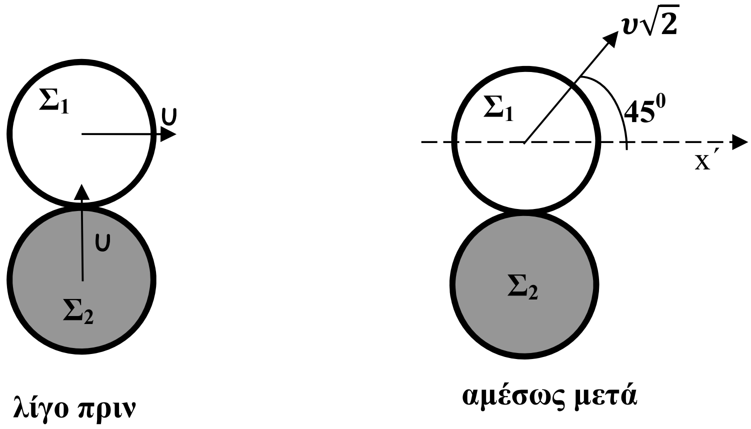


λίγο πριν

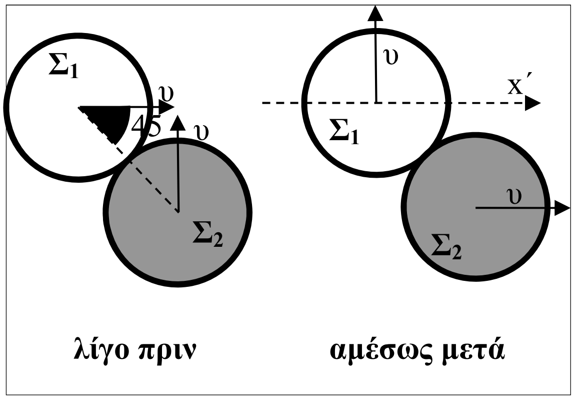


αμέσως μετά

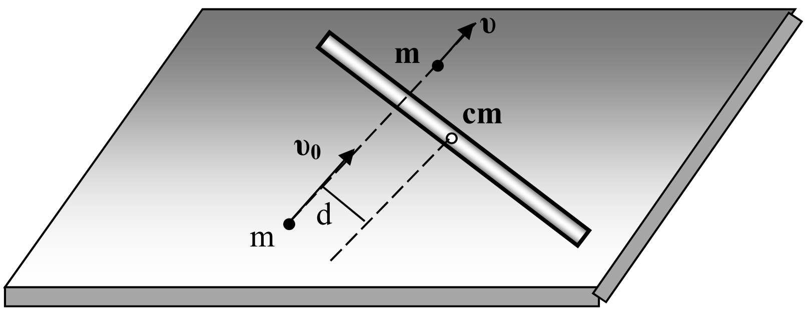
β. Αν φ = 90^0, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_1 = \upsilon\sqrt{2}}$, γιατί ημ$90^0$ = 1 και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_2 = 0}$, γιατί συν$90^0$ = 0.
Από την 5.14.7 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta'_1 = 45^0}$.



γ. Αν φ = 45^0, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_1 = \upsilon}$, γιατί ημ$45^0$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_2 = \upsilon}$, γιατί συν$45^0$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Από την 5.14.7 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta'_1 = 90^0}$ και από την 5.14.8 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta'_2 = 0^0}$. Όπως φαίνεται και από το σχήμα οι δύο σφαίρες έχουν ανταλλάξει ταχύτητες.



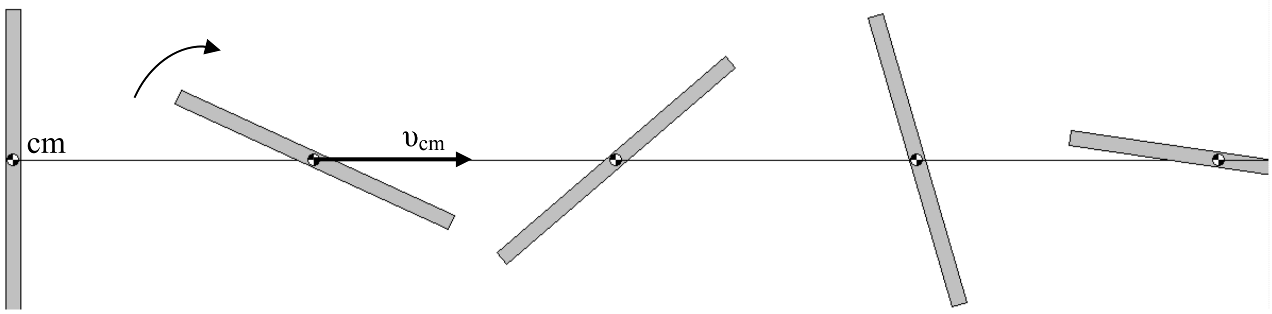
****Παράδειγμα 5.15** Μια οριζόντια ομογενής και ισοπαχής ράβδος έχει μήκος $\ell = 1\,m$, μάζα M = 1 kg και είναι ελεύθερη να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας m = 0,1 kg κινούμενο με οριζόντια ταχύτητα υ_0 = 100 m/s, της οποίας η διεύθυνση είναι κάθετη στον άξονα της ράβδου, διαπερνά τη ράβδο σε απόσταση d = 1/8 m από το κέντρο μάζας της και βγαίνει από αυτή με ταχύτητα υ = 20 m/s. Να υπολογίσετε

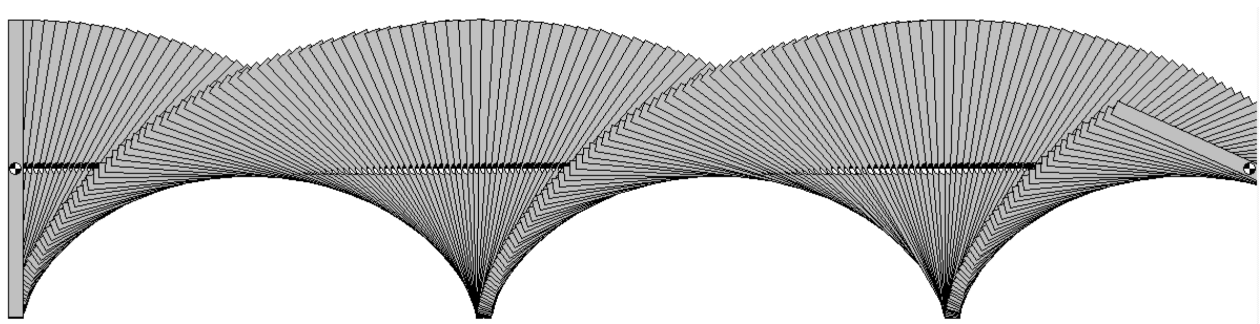


α. τη μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
β. τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση.
γ. τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της ράβδου και τη γωνία που διέγραψε 2 s μετά την κρούση.
δ. τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος βλήμα - ράβδος.
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στον άξονά της, $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

Λύση

Η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί με οποιονδήποτε τρόπο. Τη στιγμή της κρούσης δέχεται από το βλήμα δύναμη, η οποία δε διέρχεται από το κέντρο μάζας της, επομένως εξαιτίας της ροπής της, ως προς το κέντρο μάζας, θα περιστραφεί γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η δύναμη αυτή, για το ελάχιστο χρονικό διάστημα που ασκείται, θα δώσει στη ράβδο και γραμμική επιτάχυνση, με αποτέλεσμα η ράβδος να αποκτήσει και μεταφορική ταχύτητα και επομένως να εκτελέσει και μεταφορική κίνηση. Όταν το βλήμα βγει από τη ράβδο, τόσο η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας της, όσο και η γωνιακή της ταχύτητα, θα παραμένουν σταθερές. Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η κίνηση της ράβδου μετά την κρούση της με το βλήμα. Στο πρώτο σχήμα φαίνονται οι διάφορες θέσεις της ράβδου ανά ίσα χρονικά διαστήματα, καθώς και η τροχιά που θα διαγράψει το κέντρο μάζας της. Παρατηρούμε ότι το κέντρο μάζας της ελεύθερης ράβδου κινείται ευθύγραμμα. Στο δεύτερο σχήμα φαίνονται πάλι οι διάφορες θέσεις της ράβδου ανά ίσα χρονικά διαστήματα, τα οποία όμως είναι πολύ μικρά.





Τα θεωρήματα που μπορούμε να εφαρμόσουμε είναι i. η Αρχή Διατήρησης της Ορμής γιατί στο σύστημα οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις, το Βάρος της και η κάθετη δύναμη στήριξης έχουν συνισταμένη μηδέν και ii. η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής, γιατί και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων έχουν μηδενική συνισταμένη.

α. Α.Δ.Ο. $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_0 + \vec{0} = m\vec{\upsilon} + M\vec{\upsilon}_{cm} \to m\upsilon_0 = m\upsilon + M\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m(\upsilon_0-\upsilon)}{M} \overset{S.I}{\Rightarrow}$

$$\upsilon_{cm} = \frac{0{,}1(100-20)}{1}\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{cm} = 8\frac{m}{s}}$$

β. Α.Δ.Σ: $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \to m\upsilon_0 d + 0 = m\upsilon d + I\omega \Rightarrow \omega = \frac{md(\upsilon_0-\upsilon)}{I} \Rightarrow \omega = \frac{md(\upsilon_0-\upsilon)}{\frac{1}{12}M\ell^2} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{12md(\upsilon_0-\upsilon)}{M\ell^2} \overset{S.I}{\Rightarrow} \omega = \frac{12\cdot 0{,}1\cdot\frac{1}{8}\cdot(100-20)}{1\cdot 1^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 12\frac{rad}{s}}$$

γ. $\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm} t \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta x_{cm} = 8 \cdot 2\, m \Rightarrow \boldsymbol{\Delta x_{cm} = 16\, m}$

$$\Delta\theta = \omega \cdot t \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta\theta = 12 \cdot 2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\theta = 24}\ (rad).$$

δ. $\Delta E_{\mu\eta\chi} = \Delta K + \Delta U = \Delta K + 0 \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$

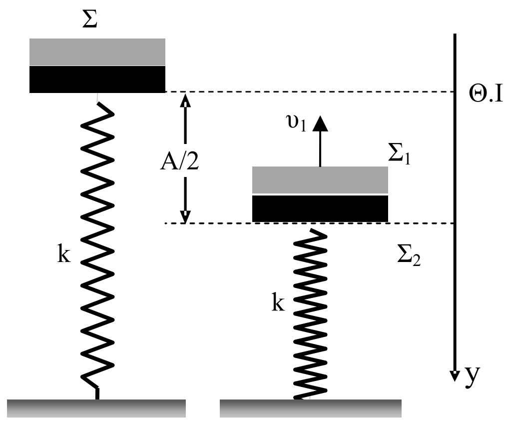
$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \left(\frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2\right) - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} m(\upsilon^2 - \upsilon_0^2) + \frac{1}{24} M\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2 \overset{S.I}{\Rightarrow}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} 0{,}1 \cdot (20^2 - 100^2) + \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8^2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E_{\mu\eta\chi} = -442\, J}$$

Το πρόσημο – δηλώνει την απώλεια της μηχανικής ενέργειας εξ αιτίας της ανελαστικής κρούσης.

Σημείωση: Στο ερώτημα β. για την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής, επιλέξαμε (υποχρεωτικά) τον άξονα z να ταυτίζεται με τον νοητό άξονα περιστροφής της ράβδου, σαν αρχή O του άξονα το κέντρο μάζας της ράβδου, και σαν θετική φορά, τη φορά του βάρους.

Παράδειγμα 5.16 Ένα σώμα Σ με μάζα M = 6 kg είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερωμένο στο έδαφος. Το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 0,4 m. Τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από το μέσο της απόστασης μεταξύ της θέσης ισορροπίας του και της κάτω ακραίας θέσης κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του. Τη στιγμή αυτή, λόγω εσωτερικού μηχανισμού, διασπάται ακαριαία σε δύο σώματα Σ_1 και Σ_2, με μάζες m_1 = 4 kg και m_2 = 2 kg, αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 παραμένει συνδεδεμένο με το ελα-τήριο, ενώ το Σ_1 τη στιγμή της διάσπασης αποκτά κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω και με μέτρο υ_1 = 4 m/s.



Α. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ λίγο πριν τη διάσπαση και την ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά τη διάσπαση.

β. την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_2.

γ. τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάσπαση.

Β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σώμα Σ_2. Θεωρήστε θετική τη φορά του βάρους και ότι η απομάκρυνση είναι ημιτονική συνάρ-τηση του χρόνου.

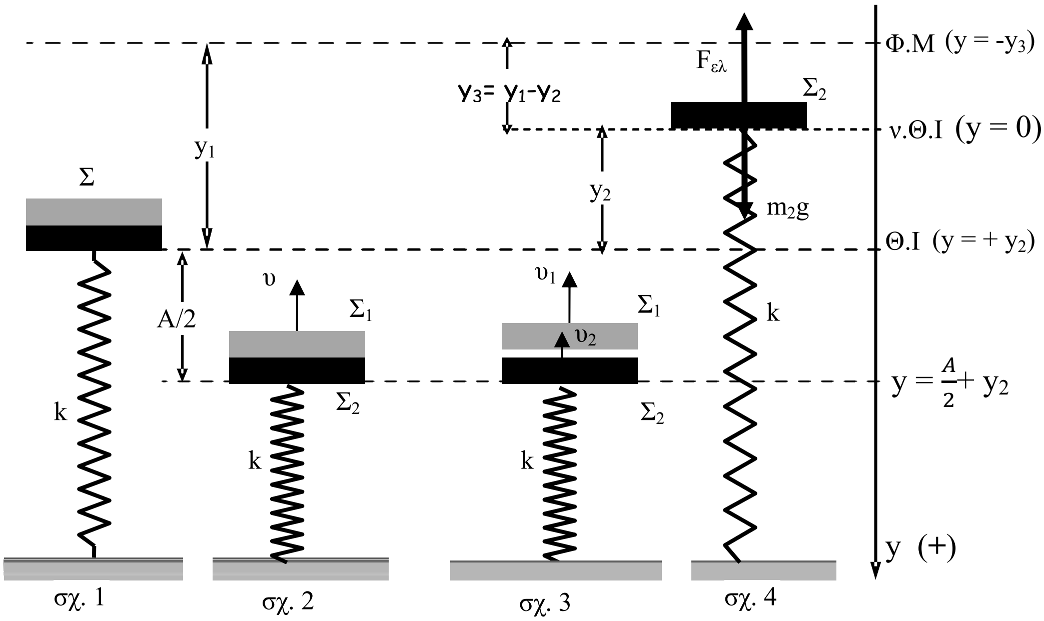
Λύση

Σχήμα 1: Φαίνεται το συμπαγές σώμα Σ στη θέση ισορροπίας του.

Σχήμα 2: Φαίνεται το συμπαγές σώμα σε θέση που βρίσκεται χαμηλότερα από τη Θ.Ι κατά A/2 τη χρονική στιγμή t = 0 λίγο πριν τη διάσπαση.

Σχήμα 3: Φαίνονται τα σώματα Σ_1 και Σ_2 λίγο μετά την διάσπαση στην ίδια θέση. Θεωρούμε, αυθαίρετα, ότι το Σ_2 αποκτά ταχύτητα υ_2 με φορά προς τα πάνω.

Σχήμα 4: Φαίνεται το σώμα Σ_2 στη θέση ισορροπίας του, η οποία θα είναι και η νέα θέση ισορροπίας (ν.Θ.Ι) της ταλάντωσής του.



Στον κατακόρυφο άξονα y έχουμε σημειώσει τις απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (ν.Θ.Ι), την οποία θεωρούμε σαν αρχή του άξονα (y = 0). Έτσι, η θέση ισορροπίας του συμπαγούς σώματος Σ βρίσκεται στη θέση $y = y_2$, η θέση που έγινε η διάσπαση βρίσκεται σε απομάκρυνση $y = y_2 + A/2$ και η θέση που αντιστοιχεί στο Φυσικό Μήκος του ελατηρίου (Φ.Μ.) στη θέση $y = -(y_1 - y_2)$. [η θέση αυτή βρίσκεται πάνω από τη θέση y = 0, δηλαδή σε αρνητική απομάκρυνση].

α. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος Σ, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε για την ταλάντωσή του: $K_{αρχ} + U_{T,αρχ} = E \Rightarrow \frac{1}{2}Mυ^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow υ^2 = \frac{3kA^2}{4M} \Rightarrow υ = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{3k}{M}}$

$$\overset{S.I}{\Rightarrow} υ = \frac{0{,}4}{2}\sqrt{\frac{3 \cdot 200}{6}} \Rightarrow \boldsymbol{υ = 2\frac{m}{s}}$$

Στο σύστημα τη στιγμή της διάσπασης ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις των βαρών και η δύναμη επαφής από το ελατήριο. Οι δυνάμεις αυτές όμως μπορούν να αγνοηθούν συγκρινόμενες με την πολύ ισχυρή δύναμη της διάσπασης έτσι το σύστημα θεωρείται μονωμένο για το πολύ μικρό χρονικό διάστημα της διάσπασης και επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η Α.Δ.Ο. $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow M\vec{υ} = m_1\vec{υ}_1 + m_2\vec{υ}_2 \rightarrow -Mυ = -m_1υ_1 - m_2υ_2 \Rightarrow$

$$υ_2 = \frac{Mυ - m_1υ_1}{m_2} \overset{S.I}{\Rightarrow} υ_2 = \frac{6 \cdot 2 - 4 \cdot 4}{2} \Rightarrow \boldsymbol{υ_2 = -2\frac{m}{s}}$$

Το πρόσημο – δηλώνει ότι η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ έχει φορά αντίθετη από αυτή που σημειώνεται στο σχήμα, δηλαδή προς τα κάτω.

β. Για την περίοδο T_2 του σώματος $Σ_2$, έχουμε: $T_2 = 2π\sqrt{\frac{m_2}{k}} \overset{S.I}{\Rightarrow} T_2 = 2π\sqrt{\frac{2}{200}} \Rightarrow \boldsymbol{T_2 = \frac{π}{5}\,s}$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος A_2 της ταλάντωσης του $Σ_2$, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. μεταξύ μιας ακραίας θέσης και της θέσης $y = \frac{A}{2} + y_2$ που έγινε η διάσπαση.

K + U = E $\Rightarrow \frac{1}{2}m_2υ_2^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \Rightarrow m_2υ_2^2 + k\left(\frac{A}{2} + y_2\right)^2 = kA_2^2.$ (5.16.1)

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το y_2, το οποίο εκφράζει την απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων ισορροπίας. Καταφεύγουμε στη συνθήκη ισορροπίας για κάθε θέση

Θ.Ι: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mathrm{Mg} = \mathrm{ky_1}$ (5.16.2)

ν.Θ.Ι: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mathrm{m_2}g = ky_3 \Rightarrow \mathrm{m_2}g = k(y_1 - y_2) \Rightarrow (\mathrm{M} - \mathrm{m_1})g = ky_1 - ky_2 \Rightarrow$

$$Mg - m_1 g = ky_1 - ky_2 \overset{5.16.2}{\Longrightarrow} y_2 = \frac{m_1 g}{k} \overset{S.I.}{\Rightarrow} y_2 = \frac{4\cdot 10}{200}\ m \Rightarrow \mathrm{y_2} = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

$$5.16.1 \overset{S.I.}{\Rightarrow} 2\cdot(-2)^2 + 200\cdot\left(\frac{0{,}4}{2} + 0{,}2\right)^2 = 200\mathrm{A}_2^2 \Rightarrow 8 + 32 = 200\mathrm{A}_2^2 \Rightarrow \mathbf{A_2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ \boldsymbol{m}$$

γ. $\Delta E_{M\eta\chi} = \Delta K + \Delta U_{o\lambda} = \Delta K + 0 = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}M\upsilon^2 \overset{S.I.}{\Rightarrow}$

$$\Delta E_{M\eta\chi} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-2)^2 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2^2 \Rightarrow \Delta E_{M\eta\chi} = 32 + 4 - 12 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E_{M\eta\chi} = 24J}$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta E_{M\eta\chi} > 0$, δηλαδή η μηχανική ενέργεια κατά τη διάσπαση αυξάνεται. Αυτό οφείλεται στην απελευθέρωση ενέργειας κατά τη διάσπαση.

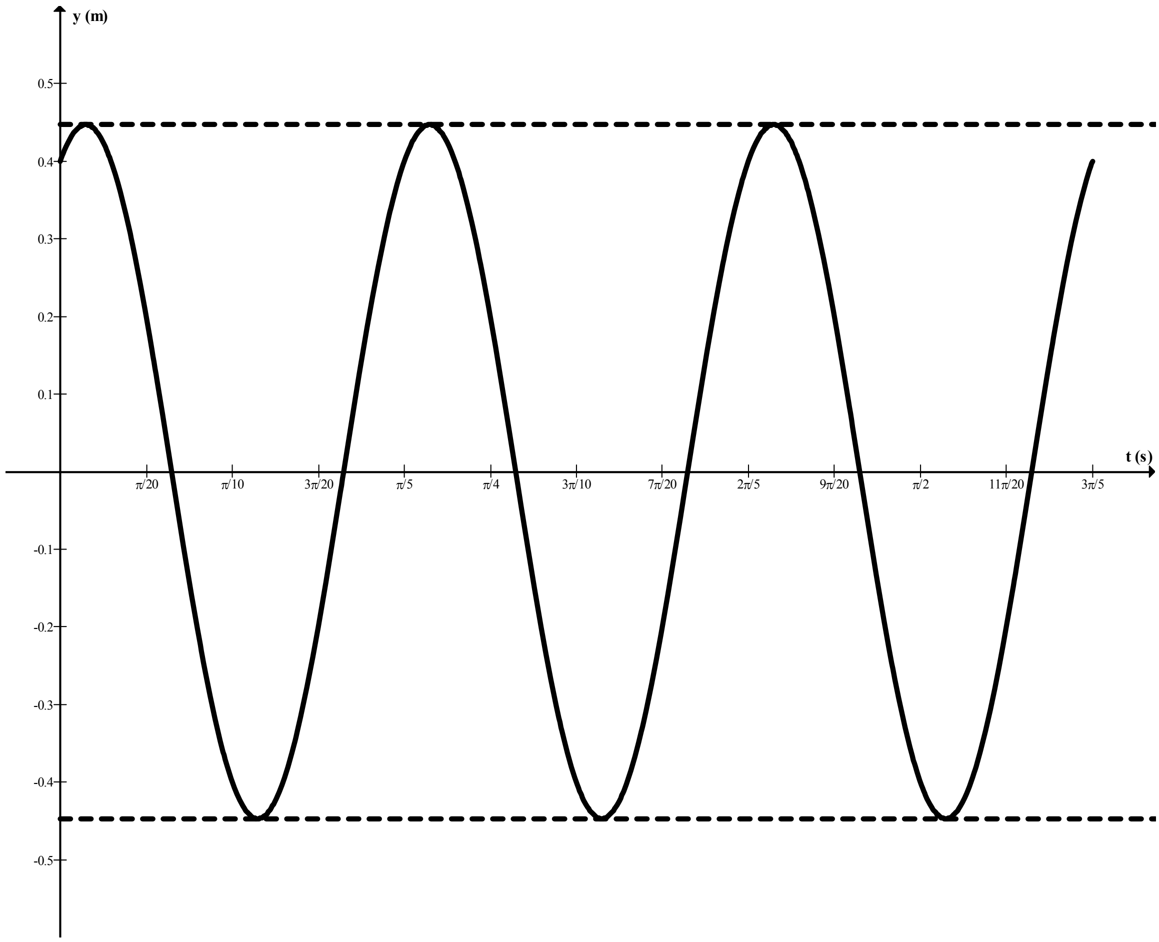
Β. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση $y = \frac{A}{2} + y_2 = 0{,}4\, m$ και κινείται προς τα κάτω, δηλαδή με υ > 0.

$$\begin{cases} y = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ \upsilon = \omega A_2 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)\end{cases} \overset{t=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{y}{A_2} \\ \omega A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0\end{cases} \overset{S.I.}{\Rightarrow} \begin{cases} \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{0{,}4}{\frac{\sqrt{5}}{5}} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0\end{cases} \overset{S.I.}{\Rightarrow} \begin{cases} \eta\mu\varphi_0 = 0{,}4\cdot\sqrt{5} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0\end{cases} \overset{1o\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau}{\Longrightarrow}$$

$\left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right)\ \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{\eta}$. $[\varphi_0 \cong 1{,}107\ (rad)]$ και

$$\omega = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

Άρα $\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{\eta\mu(10t + \varphi_0)}\ (S.I)$



Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

<u>Οδηγία:</u> Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

5.1. Μια μπάλα, κινούμενη κατά τη θετική φορά του άξονα y΄y, πέφτει κατακόρυφα σε οριζόντιο έδαφος με ορμή 10 *kg·m/s*. Η κρούση θεωρείται ελαστική και διαρκεί 0,2 *s*.

Α. Η μεταβολή της ορμής της (στο SI) είναι

α. – 20. **β.** – 10. **γ.** +20. **δ.** +10.

Β. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της (στο SI) είναι

α. – 200. **β.** – 100. **γ.** +200. **δ.** +100.

5.2. Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή μόνον όταν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα

α. είναι συντηρητικές.
β. είναι μη συντηρητικές.
γ. έχουν συνισταμένη μεγαλύτερη του μηδενός.
δ. έχουν μηδενική συνισταμένη.

5.3. Στο μικρόκοσμο, κρούση (σκέδαση) μεταξύ δύο σωματίων συμβαίνει όταν τα σωμάτια,

α. έρχονται σε επαφή.
β. ανταλλάσσουν τις ορμές τους.
γ. αλληλεπιδρούν για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, αναπτύσσοντας πολύ ισχυρές απωστικές δυνάμεις.
δ. ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους.

5.4. Δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά. Αν συμβολίσουμε με $p_{αρχ}$ και $p_{τελ}$ τα μέτρα των ολικών ορμών πριν και μετά την κρούση τους, αντίστοιχα, τότε το πηλίκο $p_{αρχ}$ / $p_{τελ}$ παίρνει

α. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι ελαστική.
β. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι ημιελαστική.
γ. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι πλαστική.
δ. ίδια τιμή για όλα τα είδη των κρούσεων.

5.5. Δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά. Αν συμβολίσουμε με $K_{αρχ}$ και $K_{τελ}$ τις ολικές κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση τους, αντίστοιχα, τότε το πηλίκο $K_{τελ}$ / $K_{αρχ}$ παίρνει

α. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι ελαστική.
β. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι ημιελαστική.
γ. τη μέγιστη τιμή του, όταν η κρούση είναι πλαστική.
δ. ίδια τιμή για όλα τα είδη των κρούσεων.

5.6. Ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα της ίδιας μάζας. Αν η διάρκεια της κρούσης είναι Δt, τότε το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε πάνω στο δεύτερο σώμα είναι

α. mυ/Δt. **β.** 2mυ/Δt. **γ.** mυ/2Δt. **δ.** μηδέν.

5.7. Μία σφαίρα μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ, συγκρούεται κάθετα και απολύτως ελαστικά σε κατακόρυφο τοίχο. Ο χρόνος επαφής σφαίρας – τοίχου είναι Δt.

Α. Η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας είναι

α. mυ. **β.** 2mυ. **γ.** μηδέν. **δ.** mυ/Δt.

Β. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι

α. mυ. **β.** 2mυ. **γ.** μηδέν. **δ.** mυ/Δt.

Γ. Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε από τη σφαίρα στον τοίχο είναι

α. mυ/Δt. **β.** 2mυ/Δt. **γ.** mυ/2Δt. **δ.** μηδέν.

5.8. Αν ένα κινούμενο σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο ίσης μάζας, τότε η ταχύτητά του

α. θα διπλασιαστεί. **β.** θα διατηρηθεί σταθερή.
γ. θα μηδενιστεί. **δ.** θα αναστραφεί.

5.9. Μια σφαίρα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση θα είναι

α. ίση με την ταχύτητα που είχε πριν την κρούση.
β. αντίθετη της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση.
γ. ίση με την ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα Β.
δ. μηδέν.

5.10. Όταν δύο σώματα ίσης μάζας, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, τότε ανταλλάσουν

α. μόνο τις ταχύτητές τους.
β. μόνο τις ορμές τους.
γ. μόνο τις κινητικές τους ενέργειες.
δ. και τις ταχύτητες και τις κινητικές ενέργειες και τις ορμές τους.

5.11. Για να χαρακτηρίσουμε ως ελαστική μια κρούση δύο σωμάτων, πρέπει να

α. διατηρείται σταθερή η συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων που συγκρούονται.
β. διατηρείται σταθερή η συνολική ορμή των σωμάτων που συγκρούονται.
γ. παραμένει ακίνητο το ένα από τα δύο σώματα μετά την κρούση.
δ. είναι ίσες οι μάζες των δύο σωμάτων.

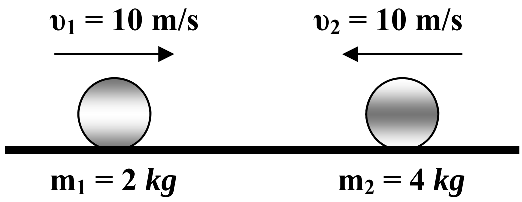
5.12. Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων

α. η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή.
β. η κινητική ενέργεια κάθε σώματος παραμένει σταθερή.
γ. η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων αυξάνεται.
δ. η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων ελαττώνεται.

5.13. Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, της ίδιας μάζας που κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες 10 *m/s* και – 15 *m/s* αντίστοιχα, συγκρούονται μετωπικά και τελείως ελαστικά. Μετά την κρούση η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ σε *m/s* είναι

α. 15. **β.** 10 **γ.** – 5. **δ.** – 10.

5.14. Μετά τη μετωπική κρούση η σφαίρα μάζας m_1 έχει ταχύτητα μέτρου 5 m/s με φορά προς τα αριστερά. Η κρούση αυτή



α. είναι ελαστική.
β. είναι ημιελαστική.
γ. είναι πλαστική.
δ. με τα δεδομένα αυτά δε μπορεί να χαρακτηριστεί.

5.15. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η κινητική ενέργεια
α. του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή.
β. του συστήματος των σωμάτων αυξάνεται.
γ. του συστήματος των σωμάτων ελαττώνεται.
δ. και η ορμή του συστήματος των σωμάτων ελαττώνεται.

5.16. Μια σφαίρα Α μάζας m συγκρούεται κεντρικά και τελείως ελαστικά με μια άλλη σφαίρα Β τετραπλάσιας μάζας. Αν η σφαίρα Α ασκεί δύναμη F στη σφαίρα Β, τότε η σφαίρα Β ασκεί στη σφαίρα Α δύναμη με μέτρο
α. F. **β.** 2F. **γ.** 4F. **δ.** F / 4.

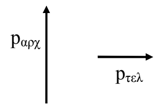
5.17. Δύο σώματα Α και Β με μάζες 2 *kg* και 6 *kg* αντίστοιχα, κινούνται με αντίθετη κατεύθυνση. Λίγο πριν την κεντρική και πλαστική κρούση τους έχουν αντίστοιχα ταχύτητες με μέτρα 8 *m/s* και 2 *m/s*. Το ποσό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατράπηκε σε θερμική εξ αιτίας της κρούσης είναι (στο S.I)
α. 75. **β.** 64 **γ.** 12 **δ.** 76

5.18. Ένα σώμα που έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα υ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητο σώμα ίσης μάζας. Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που έχασε το σύστημα είναι
α. 1/4. **β.** 1/2. **γ.** 1/3. **δ.** 1

5.19. Δύο σώματα με ίσες μάζες κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες 2υ και υ της ίδιας φοράς και συγκρούονται πλαστικά και κεντρικά. Το ποσοστό επί % της κινητικής ενέργειας του συστήματος που χάθηκε κατά την κρούση είναι
α. 90%. **β.** 10%. **γ.** 5%. **δ.** 50%.

5.20. Αν ένα κινούμενο σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο μεγαλύτερης μάζας, τότε θα
α. ελαττωθεί το μέτρο της ταχύτητάς του και η φορά της ταχύτητας θα διατηρηθεί.
β. ελαττωθεί το μέτρο της ταχύτητάς του και η φορά της ταχύτητας θα αναστραφεί.
γ. αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητάς του και η φορά της ταχύτητας θα διατηρηθεί.
δ. αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητάς του και η φορά της ταχύτητας θα αναστραφεί.

5.21. Η αρχική και η τελική ορμή ενός σημειακού αντικειμένου φαίνονται στο σχήμα Α. Ποιο από τα διανύσματα του σχήματος Β παριστάνει την δύναμη που ασκήθηκε πάνω του;



Α

Β

5.22. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων η διαφορά των ταχυτήτων τους πριν την κρούση είναι

α. μεγαλύτερη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
β. μικρότερη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
γ. ίση με τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
δ. αντίθετη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.

5.23. Δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$, τότε ισχύει

α. $\upsilon_1 + \upsilon_1' > \upsilon_2' + \upsilon_2$. **β.** $\upsilon_1 + \upsilon_1' < \upsilon_2' + \upsilon_2$.
γ. $\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2$. **δ.** $\upsilon_1 + \upsilon_1' = -(\upsilon_2' + \upsilon_2)$.

5.24. Όταν μια ελαστική σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε ένα λείο τοίχο

α. γυρίζει πίσω με ίδια ταχύτητα.
β. δέχεται δύναμη από τον τοίχο, η οποία έχει διεύθυνση κάθετη στον τοίχο.
γ. γυρίζει πίσω με ίδια ορμή.
δ. γυρίζει πίσω στην ίδια διεύθυνση με την αρχική.

5.25. Ένα πρωτόνιο με μάζα m_p εκτοξεύεται προς ακίνητο πυρήνα Π με ταχύτητα μέτρου υ και τελικά επανέρχεται στο σημείο βολής με ταχύτητα σχεδόν του ίδιου μέτρου υ. Ο πυρήνας Π θα μπορούσε να είναι ένας πυρήνας

α. υδρογόνου ($M_H = m_p$). **β.** ηλίου ($M_{He} = 4m_p$).
γ. σιδήρου ($M_{Fe} = 56m_p$). **δ.** χρυσού ($M_{Au} = 197m_p$).

5.26. Μια σφαίρα προσκρούει κάθετα στην επιφάνεια ενός δαπέδου. Αν η κρούση είναι ανελαστική, τότε

α. η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται κατά την κρούση.
β. το μέτρο της ορμής της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση είναι το ίδιο με αυτό λίγο πριν την κρούση.
γ. η ολική ενέργεια του συστήματος Γη – σφαίρα διατηρείται.

δ. η κινητική ενέργεια του συστήματος Γη – σφαίρα διατηρείται.

5.27. Όταν δύο σώματα συγκρούονται πλάγια τότε

α. οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση βρίσκονται σε διαφορετικές διευθύνσεις.

β. η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων μεταβάλλεται.

γ. η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

δ. μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα.

5.28. Στο διπλανό σχήμα η κρούση των m_1, m_2 είναι απολύτως ελαστική. Με δεδομένα και σταθερά τα m_1 και $υ_1$

i) η ταχύτητα του σώματος Β μετά την κρούση είναι μέγιστη (σε μέτρο) όταν

α. $m_1 = m_2$ **β.** $m_1 \gg m_2$

γ. $m_1 \ll m_2$ **δ.** τίποτα από όλα αυτά.

ii) η ορμή του σώματος Β μετά την κρούση είναι μέγιστη κατά μέτρο όταν

α. $m_1 = m_2$ **β.** $m_1 \gg m_2$

γ. $m_1 \ll m_2$ **δ.** τίποτα από όλα αυτά.

iii) η κινητική ενέργεια του σώματος Β μετά την κρούση είναι μέγιστη αν

α. $m_1=m_2$ **β.** $m_1 \gg m_2$

γ. $m_1 \ll m_2$ **δ.** τίποτα από όλα αυτά.

5.29. Ένα σώμα Α με πολύ μεγάλη μάζα, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{υ}_1$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα Β μικρής μάζας. Συνεπώς

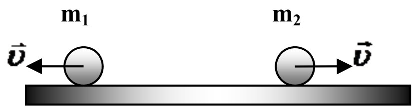
α. το σώμα Β μετά την κρούση παραμένει ακίνητο.

β. το σώμα Β μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα $2\vec{υ}_1$.

γ. το σώμα Α μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα $-\vec{υ}_1$.

δ. το σώμα Α μετά την κρούση παραμένει ακίνητο.

5.30. Λεία σφαίρα μάζας m_1 ενώ κινείται με ταχύτητα $υ_0$ (βλ. σχήμα) χωρίς να περιστρέφεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται



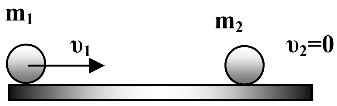
κεντρικά και τελείως ελαστικά με άλλη επίσης λεία σφαίρα μάζας m_2 που είναι ακίνητη. Παρατηρούμε ότι μετά την κρούση τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, αλλά με αντίθετες φορές (όπως στο σχήμα). Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών m_1/m_2 είναι ίσος με:

α. $\frac{3}{1}$ **β.** $\frac{2}{1}$ **γ.** $\frac{1}{3}$ **δ.** $\frac{1}{2}$

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

5.31. Η κρούση των δύο σωμάτων του διπλανού σχήματος είναι κεντρική και ελαστική. Επομένως



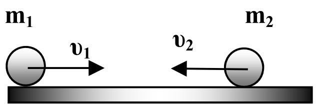
α. η ορμή του συστήματος αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο $m_1υ_1$ και φορά προς τα δεξιά.

β. η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι $\frac{1}{2}m_1υ_1^2$.

γ. αν $m_1 < m_2$ οι ταχύτητες μετά την κρούση έχουν αντίθετες φορές.

δ. αν $m_1 = m_2$ η σφαίρα m_1 μετά την κρούση έχει αντίθετη ταχύτητα απ' την αρχική.

5.32. Η κρούση των δύο σωμάτων του σχήματος είναι κεντρική και ελαστική. Σημειώστε τις σωστές σχέσεις:



α. $K_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ}$. **β.** $K_{ολ,αρχ} > K_{ολ,τελ}$

γ. $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ **δ.** $\Delta\vec{p}_{m1} = -\Delta\vec{p}_{m2}$

ε. $\Delta K_{m1} = -\Delta K_{m2}$

5.33. α. Στις μετωπικές κρούσεις δύο σωμάτων οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση.

β. Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

γ. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται.

δ. Αν η μετωπική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες είναι ελαστική, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

5.34. Σε όλες τις κρούσεις

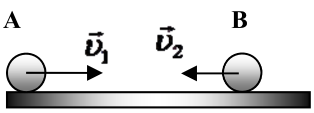
α. αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις κατά πολύ ισχυρότερες από τις τυχόν υπάρχουσες εξωτερικές δυνάμεις.

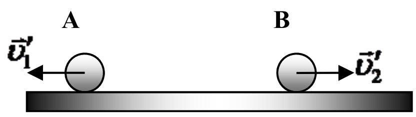
β. η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με μηδέν.

γ. η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

δ. η συνολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση είναι ίση με τη συνολική ορμή μετά την κρούση.

5.35. Για τη μετωπική και ελαστική κρούση των δύο σφαιρών του σχήματος, ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;





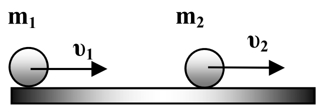
α. $\vec{p}_{ολ}^{(πριν)} = \vec{p}_{ολ}^{(μετά)}$ **β.** $K_{ολ}^{(πριν)} = K_{ολ}^{(μετά)}$ **γ.** $\Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = \vec{0}$ **δ.** $\Delta\vec{p}_A = \Delta\vec{p}_B$

ε. $\Delta K_A = -\Delta K_B$ **στ.** $\Delta K_{ολ} = 0$ **ζ.** $\Delta K_A = \Delta K_B$ **η.** $K_A - K_B = K'_B - K'_A$

5.36. Δύο σώματα με κινητικές ενέργειες K_1 και K_2 συγκρούονται ελαστικά και αποκτούν κινητικές ενέργειες K_1' και K_2'. Για τις κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση ισχύει

α. $|K_1' - K_1| = |K_2' - K_2|$. **β.** $K_1' + K_2' = K_1 + K_2$.
γ. $|K_1' - K_1| > |K_2' - K_2|$. **δ.** $|K_1' - K_1| < |K_2' - K_2|$.

5.37. Δύο σφαίρες που κινούνται με ταχύτητες αλγεβρικών τιμών $υ_1$ και $υ_2$, συγκρούονται ελαστικά και κεντρικά. Αν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση είναι $υ_1'$ και $υ_2'$ αντίστοιχα, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;



α. Η διαφορά $υ_1' - υ_1$ μπορεί να είναι και μηδέν.

β. Η διαφορά $υ_1' - υ_1$ αποκλείεται να είναι μηδέν, γιατί κάθε σφαίρα δέχεται δύναμη από την άλλη κατά την κρούση, με αποτέλεσμα να έχουμε μεταβολή της ορμής της.

γ. Οι διαφορές $υ_1' - υ_1$ και $υ_2' - υ_2$ είναι ίσες.

δ. Όταν $m_1 = m_2$, τότε οι διαφορές $υ_1' - υ_1$ και $υ_2' - υ_2$ είναι αντίθετες.

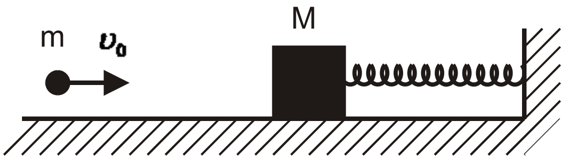
5.38. α. Ελαστική ονομάζουμε κάθε κρούση στην οποία ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

β. Ελαστική ονομάζουμε την κρούση στην οποία η ολική κινητική ενέργεια ενός μονωμένου συστήματος πριν την κρούση είναι ίση με την αντίστοιχη μετά την κρούση.

γ. Ανελαστική ονομάζουμε την κρούση στην οποία παρατηρείται μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

δ. Ανελαστική ονομάζουμε την κρούση στην οποία έχουμε μείωση της ορμής του συστήματος.

5.39. Βλήμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{υ}_0$. Το βλήμα σφηνώνεται στο ξύλο μάζας M = 9m. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα συμπιέζει το ελατήριο κατά Δℓ. Τριβές δεν υπάρχουν.



α. Η κινητική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι τα 9/10 της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος.

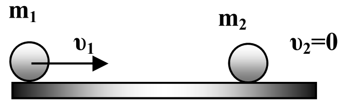
β. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι το 1/10 της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος.

γ. Σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου έχουμε διατήρηση της ορμής του συστήματος.

δ. Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση είναι ίση με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

5.40. Μια μάζα m_1 = 3m κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = \upsilon_0$ και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητη μάζα m_2 = m.

α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση έχει μέτρο $\upsilon = \dfrac{3\upsilon_0}{4}$.



β. Η μεταβολή της ορμής της μάζας m_1 έχει αλγεβρική τιμή $\Delta p_1 = -\dfrac{3m\upsilon_0}{4}$.

γ. Οι μεταβολές των ορμών των δύο μαζών είναι ίσες, δηλαδή $\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2$.

δ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

5.41. Ένα σώμα μάζας m που έχει ταχύτητα υ συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα διπλάσιας μάζας.

α. Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει ορμή μέτρου m·υ.

β. Η ορμή του αρχικά κινούμενου σώματος ελαττώνεται κατά $\dfrac{m\upsilon}{2}$.

γ. Η ορμή του αρχικά ακίνητου σώματος αυξάνει κατά $\dfrac{2m\upsilon}{3}$.

δ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$.

5.42. Δύο σώματα, που κινούνται στην ίδια ευθεία, έχουν αντίθετες ορμές. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά.

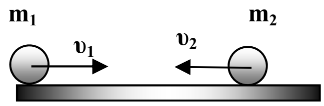
α. Μετά την κρούση σχηματίζεται ένα σώμα.

β. Πριν την κρούση η ολική ορμή ήταν ίση με μηδέν.

γ. Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση ήταν ίση με μηδέν.

δ. Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι ίση με μηδέν.

5.43. Δύο μάζες m_1 = 2m και m_2 = m κινούνται με ταχύτητες μέτρου $\upsilon_1 = 2\upsilon_0$ και $\upsilon_2 = \upsilon_0$ αντίστοιχα και με αντίθετες κατευθύνσεις. Η κρούση είναι πλαστική.



α. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι μηδέν.

β. Για τις μεταβολές των ορμών των δύο μαζών κατά την κρούση ισχύει $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$.

γ. Για τις μεταβολές των ορμών των δύο μαζών κατά την κρούση ισχύει $\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2$.

δ. Η μεταβολή της ορμής της μάζας m_1 κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή $\Delta p_1 = -2m\upsilon_0$.

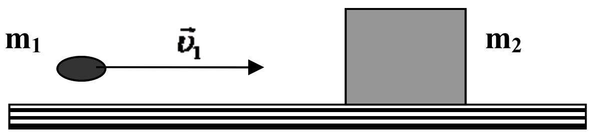
ε. Δεν έχουμε μεταβολή τις ορμής της μάζας m_2, γιατί το μέτρο της ταχύτητάς της είναι πάλι υ_0.

5.44. Δύο σφαίρες ίδιας μάζας m κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ σε κάθετες διευθύνσεις πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Αν $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, τότε ισχύει

α. $2\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ **β.** $2\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$

γ. $\dfrac{1}{2}(2m)\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon_2^2$ **δ.** $2\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$

5.45. Ένα κομμάτι πλαστελίνης, με μάζα m_1 = 2 *kg*, πριν ακριβώς κολλήσει σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_2 = 3 *kg* έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_1 = 5 *m/s*. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, όπου:



α. $\upsilon = 2\ m/s$

β. $\vec{\upsilon} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{\upsilon}_1$

γ. $\vec{\upsilon} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{\upsilon}_1$

δ. $\upsilon = 0$

5.46. Η ολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων αλλάζει όταν αλλάζουν οι ταχύτητες των σωμάτων.

5.47. Σ' ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, η ορμή κάθε σώματος παραμένει σταθερή.

5.48. Η αρχή της διατήρησης της ορμής ισχύει μόνον όταν δύο ή περισσότερα σώματα που αποτελούν μονωμένο σύστημα συγκρούονται μεταξύ τους.

5.49. Η αρχή της διατήρησης της ορμής ισχύει ανεξάρτητα από το αν οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων που αποτελούν το μονωμένο σύστημα είναι συντηρητικές ή όχι.

5.50. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων η διαφορά των ταχυτήτων τους πριν την κρούση είναι αντίθετη της διαφοράς των ταχυτήτων μετά την κρούση.

5.51. Κατά την κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή της ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής του άλλου σώματος.

5.52. Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άλλου σώματος.

5.53. Κατά τη διάσπαση ραδιενεργών πυρήνων δεν ισχύει η αρχή της διατήρησης της ορμής.

5.54. Στις μετωπικές κρούσεις οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση.

5.55. Στην ανελαστική κρούση η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων πριν την κρούση είναι μεγαλύτερη από την ολική κινητική τους ενέργεια μετά την κρούση.

5.56. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων ίσων μαζών παρατηρείται ανταλλαγή ορμών μεταξύ των σωμάτων.

5.57. Ένα βλήμα κινούμενο με ταχύτητα υ συναντά ένα κομμάτι ξύλου το οποίο διαπερνά και βγαίνει από την άλλη πλευρά.

α. Το παραπάνω φαινόμενο είναι μια πλαστική κρούση.

β. Η ορμή του βλήματος διατηρήθηκε σταθερή.

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος βλήμα – ξύλο διατηρήθηκε σταθερή.

δ. Η ορμή του ξύλου αυξήθηκε.

ε. Επειδή μεταξύ ξύλου και βλήματος αναπτύχθηκαν εσωτερικές δυνάμεις, η μηχανική ενέργεια του συστήματος παρέμεινε σταθερή.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

5.58. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Τα σώματα μετά την κρούση σχηματίζουν συσσωμάτωμα.	*1. Ελαστική κρούση*
β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται και τα σώματα κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες.	*2. Έκκεντρη κρούση.*
γ. Οι διευθύνσεις των ταχυτήτων πριν την κρούση είναι παράλληλες.	*3. Ανελαστική κρούση (Ημιελαστική).*
δ. Οι διευθύνσεις των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια διεύθυνση.	*4. Πλαστική κρούση.*
ε. Η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.	*5. Κεντρική κρούση*

5.59. Μια σφαίρα Σ_1 κινούμενη με ταχύτητα υ_1 συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης **Α** με τα στοιχεία της στήλης **Β** ώστε να συμπληρώνεται σωστά η πρόταση. (Ένα στοιχείο της στήλης **Β** περισσεύει και ένα στοιχείο της θα χρησιμοποιηθεί δύο φορές.)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Η ορμή της σφαίρας Σ_2	**1.** αυξήθηκε.
β. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1	**2.** παρέμεινε σταθερή/ό.
γ. Η ορμή της σφαίρας Σ_1	**3.** ελαττώθηκε.
δ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος	**4.** είναι ίδιο
ε. Το μέτρο των δυνάμεων επαφής μεταξύ των δύο σφαιρών	**5.** είναι διαφορετικό.

5.60. Ένα βλήμα κινούμενο με ταχύτητα υ σφηνώνεται σε ένα ακίνητο και ελεύθερο να κινηθεί κομμάτι ξύλου. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γράμμα της στήλης **Α** έναν αριθμό της στήλης **Β** ώστε να συμπληρώνεται σωστά η πρόταση. (Σε έναν αριθμό της στήλης Β είναι δυνατό να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα γράμματα της Στήλης Α).

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
α. Η ορμή του βλήματος	**1.** διατηρήθηκε σταθερή.
β. Η κινητική ενέργεια του βλήματος	**2.** Ελαττώθηκε.
γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος	**3.** Αυξήθηκε.
δ. Η κινητική ενέργεια του ξύλου	
ε. Η ορμή του συστήματος	

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης, το γράμμα που βρίσκεται σε παρένθεση στην αρχή κάθε διάστικτου και ό,τι λείπει.

5.61. Μια κρούση λέγεται ελαστική, όταν (α)... του συστήματος διατηρείται σταθερή. Στην πλαστική κρούση διατηρείται σταθερή μόνο (β) .... του συστήματος.

5.62. Η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή μόνον όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος είναι (α)......................... ενώ η ορμή του διατηρείται σταθερή ακόμη και στην περίπτωση (β) .... ……………… δυνάμεων.

5.63. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων, ίδιας μάζας, γίνεται …………………… ταχυτήτων.

5.64. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων, η διαφορά των ταχυτήτων τους πριν την κρούση είναι .... της διαφοράς των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.

5.65. Κατά την πλαστική κρούση τα σώματα μετά την κρούση παραμένουν ………….

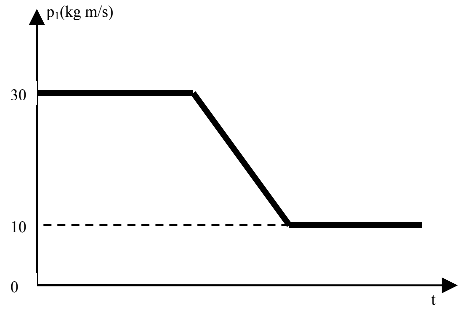
5.66. Όταν ένα σώμα συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα ……… .... μάζας, η ταχύτητά του περίπου αναστρέφεται.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

5.67. Δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά. Σε ποια περίπτωση «χάνεται» εξ ολοκλήρου η κινητική ενέργεια που είχαν τα σώματα λίγο πριν την κρούση;

5.68. Ποιες αρχές διατήρησης ισχύουν στη μη ελαστική κρούση; Η πλαστική κρούση είναι ελαστική ή μη ελαστική;

5.69. Για ένα σώμα μάζας 1 *kg* η γραφική παράσταση της ορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο $p_1 = f(t)$, φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Αν η κρούση του με αρχικά ακίνητο σώμα είναι κεντρική και πλαστική, η μάζα του δεύτερου σώματος σε *kg*, είναι



α. 0,5 **β.** 1 **γ.** 2
δ. 5 **ε.** 10

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε σ΄αυτό την ορμή $p_2 = f(t)$ του δεύτερου σώματος.

5.70. Ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ ελαστικής και πλαστικής κρούσης;

5.71. Δύο σφαίρες με ίσες μάζες κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, με ταχύτητες μέτρου $υ_1$ και $υ_2$ και συγκρούονται ελαστικά και μετωπικά. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.

5.72. Η ορμή ενός σώματος μεταβάλλεται από 7 *kg·m/s* σε 10 *kg·m/s*, σε χρόνο 2 *s*. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του (στο SI) είναι:

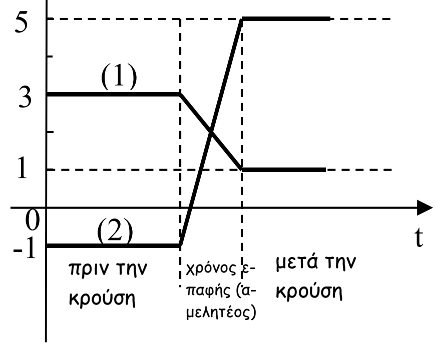
α. 1,5 **β.** 3 **γ.** 0,6 **δ.** 2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.73. Ένα βλήμα εκτοξεύεται από ακίνητο όπλο με ορμή μέτρου 100 *kg·m/s*. Εξ αιτίας της ανάκρουσης η ορμή του όπλου, αμέσως μετά την εκπυρσοκρότηση, θα έχει μέτρο

α. 100 *kg·m/s*
β. μεγαλύτερο από 100 *kg·m/s*
γ. μικρότερο από 100 *kg·m/s*

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.



5.74. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας για δύο σώματα (1) και (2), σε συνάρτηση με το χρόνο, που συγκρούονται μετωπικά, πριν και μετά την κρούση τους.

α. Τα δύο σώματα πριν την κρούση κινούνται στην ίδια κατεύθυνση.

β. Τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

γ. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5.75. Πάνω σε ακίνητο σώμα Α που έχει μάζα m_1 προσπίπτει σώμα Β, που έχει μάζα $m_2 = 4\cdot m$, με ταχύτητα + υ. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική. Το σώμα Β μετά την κρούση

α. έχει ταχύτητα $+\frac{8}{5}\upsilon$.

β. ελάττωσε την κινητική του ενέργεια κατά τα 16/25 της αρχικής της τιμής.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

5.76. Δύο τελείως ελαστικές σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με αντίθετες ταχύτητες. Μετά την κεντρική τους κρούση η σφαίρα μάζας m_1 ακινητοποιείται. Για το λόγο των μαζών τους ισχύει

α. $\frac{m_1}{m_2} = 1$. **β.** $\frac{m_1}{m_2} = 2$. **γ.** $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.77. Ένα σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας m_2. Μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 έχει κινητική ενέργεια ίση με το 1/9 της αρχικής της τιμής. Για το λόγο $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$, των μαζών τους ισχύει

α. $\lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$. **β.** $\lambda = 3$ ή $\lambda = \frac{1}{3}$. **γ.** $\lambda = 9$ ή $\lambda = \frac{1}{9}$. **δ.** $\lambda = 1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.78. Όταν ένα σώμα μάζας m συγκρουστεί κεντρικά και πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα, μεγαλύτερης μάζας Μ, τότε το 90% της κινητικής του ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική. Αν προσπέσει το σώμα μάζας Μ στο ακίνητο σώμα μάζας m, τότε από την κινητική ενέργεια του Μ, θα μετραπεί σε θερμική το

α. 10%. **β.** 45%. **γ.** 90%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.79. Μικρό σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο σώμα μάζας 4m. Εξ αιτίας της κρούσης τα δύο σώματα ανταλλάσσουν τις ορμές τους. Η κρούση είναι

α. ελαστική. **β.** ανελαστική. **γ.** πλαστική.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.80. Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ορμή $\vec{p}_1$ και κινητική ενέργεια K_1. Το σώμα αυτό συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Η μεταβολή της ορμής του σώματος m_1 εξαιτίας της κρούσης ισούται με $-1{,}6 \cdot \vec{p}_1$.

α. Η μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 ισούται με

i. $+1{,}6 \cdot \vec{p}_1$. ii. $+2{,}4 \cdot \vec{p}_1$. iii. $+0{,}8 \cdot \vec{p}_1$.

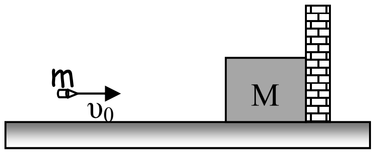
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

β. Η κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση ισούται με

i. $\frac{64}{25}K_1$. ii. $\frac{16}{25}K_1$. iii. $\frac{4}{25}K_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.81. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα βλήμα μάζας m το οποίο κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας M = 3m, το οποίο ακουμπά σε τοίχο. Η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το βλήμα για να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα είναι K. Αν δεν υπάρχει ο τοίχος και το σώμα μάζας M είναι ελεύθερο να κινηθεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο, τότε η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το βλήμα ώστε να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα είναι

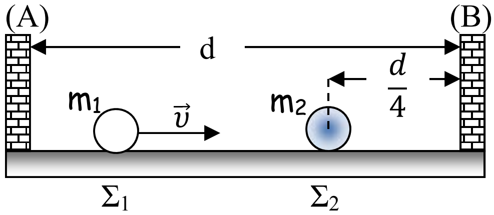


α. $\frac{4K}{3}$. **β.** $\frac{2K}{5}$. **γ.** $3K$.

(Υποθέτουμε ότι η απώλεια ενέργειας είναι ίδια και στις 2 περιπτώσεις.)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.82. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ελαστικές σφαίρες Σ₁ και Σ₂ με μάζες m_1 και m_2, αντίστοιχα, που μπορούν να κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αρχικά οι δύο σφαίρες είναι ακίνητες, με τη σφαίρα $Σ_2$ να απέχει απόσταση d/4 από τον τοίχο (Β), όπου d είναι η απόσταση μεταξύ των δύο κατακόρυφων λείων τοίχων (Α) και (Β). Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε τη σφαίρα $Σ_1$ προς τη σφαίρα $Σ_2$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, έτσι ώστε να μην περιστρέφεται. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά και στη συνέχεια ξανασυναντώνται στο μέσο της απόστασης των δύο τοίχων αφού έχουν συγκρουστεί ελαστικά από μία φορά με αυτούς. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1'$, της σφαίρας $Σ_1$ αμέσως μετά την κρούση της με τη $Σ_2$, και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ συνδέονται με τη σχέση



α. $\upsilon = -1{,}6\upsilon_1'$ **β.** $\upsilon = -2{,}4\upsilon_1'$. **γ.** $\upsilon = -3{,}2\upsilon_1'$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.83. Δύο όμοιες μπάλες, η μια σκληρή και η άλλη μαλακή, κινούνται οριζόντια με την ίδια ταχύτητα και συγκρούονται ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο. Να παραστήσετε ποιοτικά, σε κοινούς άξονες δύναμης - χρόνου, τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος σε κάθε μπάλα.

5.84. Μπορεί ένα σύστημα σωμάτων να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή; Μπορεί να έχει ορμή χωρίς να έχει κινητική ενέργεια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5.85. Ένα ελαφρύ και ένα βαρύ αυτοκίνητο κινούνται έχοντας την ίδια ορμή. Για ποιο από τα δυο θα ξοδέψουμε περισσότερη ενέργεια για να το σταματήσουμε;

5.86. Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$και $\vec{\upsilon}_2$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Κατά τη διάρκεια της κρούσης οι σφαίρες παραμορφώνονται παροδικά και στη συνέχεια αποκτούν το αρχικό τους σχήμα. Τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης των δύο σφαιρών

α. ποια είναι τα μέτρα των ταχυτήτων τους;

β. ποια είναι η δυναμική ενέργεια εξαιτίας της παραμόρφωσής τους;

5.87. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.Να αποδείξετε ότι άν $m_1 \ll m_2$, τότε μετά την κρούση ισχύει ότι: $\upsilon_1' = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2$ και $\upsilon_2' = \upsilon_2$.

5.88. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.Να αποδείξετε ότι άν $m_1 \gg m_2$, τότε μετά την κρούση ισχύει ότι: $\upsilon_1' = \upsilon_1$ και $\upsilon_2' = -\upsilon_2 + 2\upsilon_1$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

5.89. Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο, μάζας 600 *kg*, κινείται με ταχύτητα 144 *km/h* σε μια κυκλική πίστα αγώνων ακτίνας 1000 *m*. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του. [Απ. 960 *N*]

5.90. Σφαίρα μάζας m_1 = 8 *kg* κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 = 2 *kg*. Αν η σφαίρα μάζας m_2 μετά την κρούση έχει κινητική ενέργεια $K_{m2}^{(\mu\varepsilon\tau\alpha)} = 256\,J$, πόση είναι η κινητική ενέργεια της σφαίρας μάζας m_1, μετά την κρούση; [Απ. 144 *J*]

5.91. Σε αρχικά ακίνητη μάζα m_1 = 6 *kg* χτυπά μετωπικά και ελαστικά μάζα m_2 = 1 *kg*. Αν η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μάζας m_2 είναι ΔK_{m2} = - 48 *J*, πόση θα είναι η μεταβολή της ορμής της; [Απ. – 24 *kg m/s*]

5.92. Σφαίρα Α μάζας m κινείται ευθύγραμμα και ομαλά χωρίς να περιστρέφεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_0 και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητη σφαίρα Β μάζας Μ. Μετά την κρούση η σφαίρα Α κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0/4$.

α. Ποια είναι η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Β;

β. Για ποια τιμή του λόγου λ = M/m η κρούση είναι ελαστική; [Απ. α. $5/4m\upsilon_0$ β. 5/3]

5.93. Δύο σφαίρες Α και Β ίσου όγκου με μάζες m_1 = 8 *kg* και m_2 = 2 *kg* αντίστοιχα, κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, χωρίς να περιστρέφονται, πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τα κέντρα μάζας των σφαιρών βρίσκονται πάνω στον άξονα x'x, οι ταχύτητές τους έχουν τη θετική κατεύθυνση του άξονα και μέτρα υ_1 = 10 *m/s* και υ_2.

α. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της ταχύτητας υ_2 ώστε μετά από τη μετωπική κρούση, οι σφαίρες Α και Β να κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση με ταχύτητες μέτρων 8 *m/s* και 13 *m/s* αντίστοιχα;

β. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των σφαιρών;

γ. Πόση είναι η δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης των σφαιρών τη στιγμή κατά την οποία η σφαίρα Α έχει ταχύτητα μέτρου 9,5 *m/s;*

δ. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

[Απ. α. 5 *m/s* β. 20 *J* γ. 15 *J* δ. ελαστική]

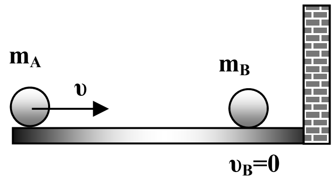
5.94. Σφαίρα μάζας m_1 = 1 *kg* κινείται οριζόντια και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με σφαίρα μάζας m_2 = 1 *kg* που κρέμεται από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου αβαρούς νήματος μήκους $\ell = 8$ *m*. Αν η σφαίρα μάζας m_1 πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 8$ *m/s*, να υπολογίσετε

α. την τάση του νήματος ακριβώς μετά την κρούση,

β. το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα μάζας m_2.

Δίνεται: $g = 10$ *m/s²*. [Απ. 18 *N*, 3,2 *m*]

5.95. Στο διπλανό σχήμα η σφαίρα Α συγκρούεται απολύτως ελαστικά με τη σφαίρα Β και στη συνέχεια η Β συγκρούεται απολύτως ελαστικά με τον τοίχο. Για ποια τιμή του λόγου $λ = \frac{m_A}{m_B}$



α. η απόσταση μεταξύ των σφαιρών Α, Β μετά την κρούση της Β με τον τοίχο θα παραμείνει σταθερή;

β. θα έχουμε και δεύτερη κρούση μεταξύ των Α, Β αν $m_A < m_B$;

γ. η σφαίρα Α απομακρύνεται από την Β με διπλάσια ταχύτητα αν $m_A < m_B$;

[Απ. α. $λ = 1/3$, β. $1/3 < λ < 1$, γ. $λ = 1/5$]

5.96. Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 1$ *kg* και $m_2 = 9$ *kg* κινούνται με ταχύτητες μέτρου $υ_1 = 60$ *m/s* και $υ_2 = 10$ *m/s* αντίστοιχα με αντίθετες φορές και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της κάθε σφαίρας κατά την κρούση τους. [Απ. 378 J, – 378 *J*]

5.97. Ελαστική σφαίρα μάζας $m_1 = 1$ *kg* συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2 = 9$ *kg*. Αν η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_2 έχει μέτρο $Δp_2 = 45$ *kg·m/s,* να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας μάζας m_1 πριν και μετά την κρούση. [Απ. 25 *m/s*, –20 *m/s*]

5.98. Μια σφαίρα Α μάζας 2 *kg* κινείται με ταχύτητα $3\sqrt{3}$ *m/s* και συγκρούεται πλάγια με άλλη σφαίρα Β μάζας 4 *kg* που αρχικά είναι ακίνητη. Αν η κρούση είναι ελαστική και η σφαίρα Α αμέσως μετά την κρούση κινείται κάθετα στην αρχική της διεύθυνση να υπολογίσετε

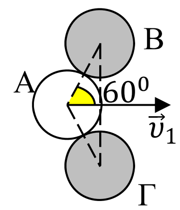
α. τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

β. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α που μεταβιβάστηκε τη σφαίρα Β κατά την κρούση.

γ. τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α λόγω της κρούσης.

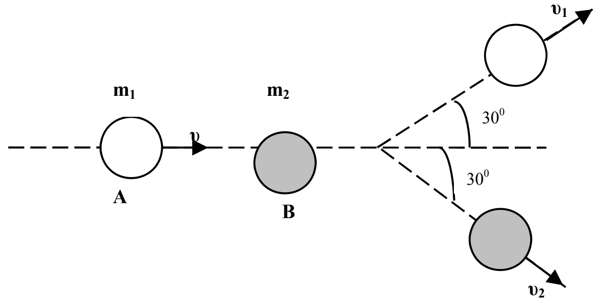
[Απ. α. $υ_1 = 3$ *m/s*, $υ_2 = 3$ *m/s*, 30^0, β. ....]

5.99. Τρεις όμοιες λείες σφαίρες έχουν μάζα m και ακτίνα R. Αρχικά οι σφαίρες Β και Γ είναι ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ η σφαίρα Α κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 6$ m/s, πάνω στη μεσοκάθετο της διακέντρου των Β και Γ, έτσι ώστε τη στιγμή της επαφής της με τις σφαίρες Β και Γ η διεύθυνση της ταχύτητάς της να σχηματίζει γωνία 60^0 με τη διάκεντρό της με τη σφαίρα Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η σφαίρα Α συγκρούεται ταυτόχρονα και ελαστικά με τις σφαίρες Β και Γ και μετά την κρούση κινείται στην ίδια με την αρχική διεύθυνση. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των τριών σφαιρών μετά την κρούση τους. [Απ. $\upsilon_1' = 2\frac{m}{s}, \upsilon_2' = \upsilon_3' = 4\frac{m}{s}, \theta_2 = \theta_3 = 60^0$]

5.100. Σφαίρα Α με μάζα m_1 = 2 *kg* κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 5\sqrt{3}$ *m/s* και συγκρούεται μη μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_2. Αν οι ταχύτητες μετά την κρούση σχηματίζουν τις γωνίες του σχήματος, να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_2 και τη μάζα m_2. [Απ. 10 *m/s*, 1 *kg*]



5.101. Σφαίρα κινείται με ταχύτητα με 200 *m/s* και πέφτει πάνω σε άλλη σφαίρα ίδιας μάζας που αρχικά είναι ακίνητη. Η κρούση είναι ελαστική και η αρχικά κινούμενη σφαίρα κινείται σε διεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία 60^0 με την αρχική. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση. [Απ. 100 *m/s*, $100\sqrt{3}$ *m/s*, 30^0]

5.102. Δύο σώματα με μάζες m_1 = 1 *kg* και m_2 = 1 *kg* αντίστοιχα, κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες υ_1 = 10 *m/s* και $\upsilon_2 = 10\sqrt{3}$ *m/s* αντίστοιχα. Αν τα σώματα συγκρούονται πλαστικά, να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση,

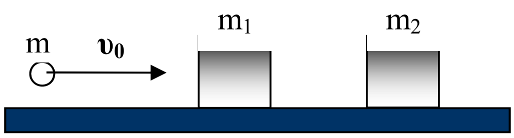
β. την απώλεια της κινητικής ενέργειας για κάθε σώμα και για το σύστημα συνολικά.

[Απ. α. 10 *m/s,* 30^0, β. 0, 100 *J*, 100 *J*]

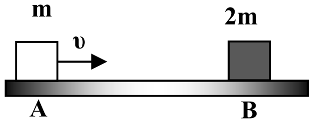
5.103. Δύο σώματα της ίδιας μάζας m κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου υ_0 σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ. Αν η κρούση είναι πλαστική και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \upsilon_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία φ. [Απ. 90^0]

5.104. Ένα καροτσάκι μάζας m_1 κινείται χωρίς τριβές με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ένας άνθρωπος μάζας m_2 κυνηγάει το καροτσάκι με ταχύτητα $2\vec{\upsilon}$ και όταν το φτάνει πηδάει μέσα σε αυτό. Αν η ταχύτητα του καροτσιού αυξάνεται κατά 20% να υπολογίσετε τον λόγο m_1/m_2. [Απ. 4]

5.105. Βλήμα μάζας m = 0,1 *kg* εκτοξεύεται οριζόντια εναντίον δύο κιβωτίων με μάζες m_1 = 5 *kg* και m_2 = 2,9 *kg* που βρίσκονται αρχικά ακίνητα πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το επίπεδο είναι μ = 0,1 (και για τα δύο). Το βλήμα διαπερνά το πρώτο κιβώτιο και ενσωματώνεται στο δεύτερο. Μετά την κρούση τα κιβώτια μετατοπίζονται αντίστοιχα κατά s_1 = 18 *m* και s_2 = 32 *m* και σταματούν. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του βλήματος. Θεωρήστε ότι στη διάρκεια των κρούσεων τα κιβώτια δεν μετατοπίζονται και ότι g = 10 *m/s²*. [Απ. 540 *m/s*]



5.106. Τα σώματα Α και Β του σχήματος συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το σώμα Α έχει μάζα m και πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου υ = 2 *m/s*. Το σώμα Β έχει μάζα 2m και πριν



την κρούση ήταν ακίνητο. Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα σε αυτό και στο οριζόντιο επίπεδο είναι μ = 1/18. Δίνεται: g = 10 *m/s²*. [Απ. 0,4 *m*]

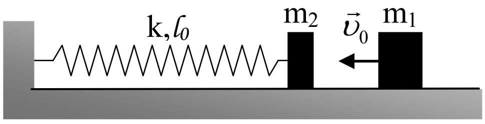
5.107. Βλήμα μάζας m_1 = 0,1 *kg* εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 300 *m/s* εναντίον ξύλινου κιβωτίου μάζας m_2 = 2 *kg* που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα βγαίνει σε πολύ λίγο χρόνο από το κιβώτιο με ταχύτητα μέτρου υ = 100 *m/s*. Αν μετά την κρούση το κιβώτιο ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά αφού διανύσει διάστημα s = 20 *m*, να υπολογίσετε:

α. το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και επιπέδου,

β. την κινητική ενέργεια που χάνεται κατά την κρούση. Δίνεται: g = 10 *m/s²*.

[Απ. $\frac{1}{4}$, 3900 *J*]

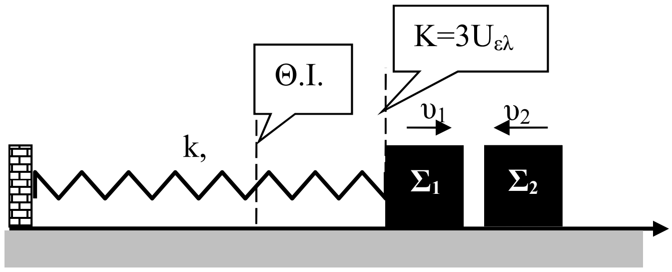
5.108. Μάζα m_2 = 4 *kg* είναι δεμένη στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m* και αρχικά βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Μάζα m_1 = 1 *kg* κινείται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 20 *m/s* και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με την αρχικά ακίνητη μάζα m_2. Να υπολογίσετε:



α. το ποσοστό % απώλειας της κινητικής ενέργειας της μάζας m_1 κατά την κρούση,

β. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου. Τριβές δεν υπάρχουν. [Απ. 64%, 1,6 *m*]

5.109. Σώμα $Σ_1$ μάζας m είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_1 = 0,2 m και περίοδο $T_1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\,s$. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση στην οποία η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια από τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα $Σ_2$ μάζας 3m, το οποίο κινείται αντίρροπα με ταχύτητα $υ_2$. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει από την κρούση εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_2 = 0,1 m. Να υπολογίσετε



α. το χρόνο που χρειάζεται το συσσωμάτωμα για να μεταβεί από τη θέση που έγινε η κρούση στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

β. την ταχύτητα του $Σ_2$ λίγο πριν συγκρουστεί με το $Σ_1$.

γ. το % ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος, εξαιτίας της κρούσης.

5.110. Σώμα $Σ_1$ μάζας m = 0,5 *kg* κινείται ευθύγραμμα και ομαλά κατά τη διεύθυνση του άξονα x΄x πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_0$. Το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται μετωπικά και ανελαστικά (ημιελαστικά) με ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας M = 2 *kg*. Λόγω της κρούσης η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι ΔΕ = 45 *J*. Να υπολογίσετε

α. το ελάχιστο μέτρο της ταχύτητας $υ_0$.

β. τις ταχύτητες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ μετά την κρούση, αν δίνεται η $υ_0$ = 17 *m/s*.

[Απ. α. 15 *m/s* β. – 3 *m/s*, 5 *m/s*]

5.111. Τρεις ελαστικές σφαίρες με μάζες m_1, m_2 και m_3 είναι δεμένες στα άκρα κατακόρυφων νημάτων με τρόπο που να εφάπτονται μεταξύ τους και τα κέντρα τους να βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Αν η σφαίρα με μάζα m_1 πέσει πάνω στη σφαίρα μάζας m_2 με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 10 *m/s* να υπολογίσετε την ταχύτητα $\vec{υ}_3$ με την οποία αρχίζει να κινείται η σφαίρα μάζας m_3. Δίνεται: $m_1 = 2 \cdot m_2 = 6 \cdot m_3$. [Απ. 20 *m/s*]

5.112. Μια σφαίρα Α μάζας m_A κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_B. Ποιος πρέπει να είναι ο λόγος m_A/m_B ώστε:

α. οι σφαίρες να κινηθούν μετά την κρούση με ταχύτητες ίσου μέτρου αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.

β. η σφαίρα Α αμέσως μετά την κρούση να κινηθεί αντίθετα προς την αρχική της ταχύτητα με ταχύτητα μέτρου υ/2.

γ. η σφαίρα Β αμέσως μετά την κρούση να κινηθεί με ταχύτητα $\frac{2}{3} \cdot υ$.

[Απ. α. $\frac{1}{3}$, β. $\frac{1}{3}$, γ. $\frac{1}{2}$]

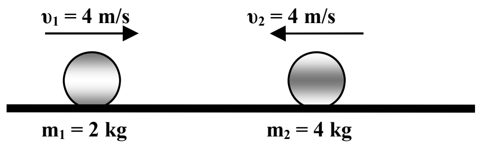
5.113. Σώμα μάζας Μ = 2 *kg* είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας m = 1 *kg* που κινείται οριζόντια με ταχύτητα 100 *m/s*

α. σφηνώνεται στο σώμα.

β. εξέρχεται από αυτό με ταχύτητα 40 *m/s*.

Να υπολογίσετε και στις δύο περιπτώσεις την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος. [Απ. α. $\frac{10000}{3} J$, β. 3300 *J*]

5.114. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: m_1 = 2 *kg*, $υ_1$ = 4 *m/s*, m_2 = 4 *kg* και $υ_2$ = 4 *m/s*.



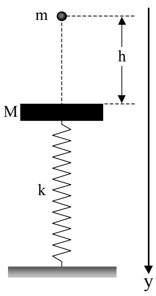
α. Ποιες οι ταχύτητες μετά την ελαστική κρούση τους;

β. Ποια η μέση δύναμη που άσκησε η μία σφαίρα στην άλλη κατά τη διάρκεια της κρούσης αν αυτή διήρκησε 10^{-3} *s*;

γ. Ποια η % μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1;

[Απ. $α. -\frac{20}{3} m/s, \frac{4}{3} m/s \; β. -\frac{64}{3} \cdot 10^3 N, \frac{64}{3} \cdot 10^3 N, \; γ. 177,7\%.$]

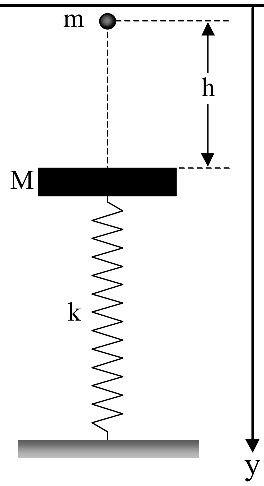
5.115. Στο διπλανό σχήμα η m = 1/3 *kg* αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από ύψος h = 0,8 *m*. Ο δίσκος μάζας Μ = 1 *kg* ισορροπεί στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m*. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική.



α. Ποιες οι ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση;

β. Ποια η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης; Δίνεται g = 10 *m/s²*.

[Απ. α. 2 *m/s*, -2 *m/s*, β. 0,2 *m*, - 20 *kg m/s²*]



5.116. Ένα σώμα με μάζα Μ = 4 *kg* ισορροπεί πάνω σε ελατήριο σταθεράς k = 100 *N/m*. Από ύψος h = 5 *m* πάνω από τη μάζα Μ αφήνουμε να πέσει μάζα m = 1 *kg*, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η κρούση είναι μετωπική και ελαστική. Να υπολογίσετε

α. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

β. το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Μ, αν μετά την κρούση το σώμα m απομακρύνεται. Δίνεται: g = 10 *m/s*^{2}.

[Απ. α. 1,2 *m*, β. 0,8 *m*]

5.117. Δίσκος μάζας Μ = 3 *kg* είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m* του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο έδαφος. Από ύψος h = 1,6 *m* πάνω από το κέντρο του δίσκου αφήνεται να πέσει ελεύθερα μικρή σφαίρα μάζας m = 1 *kg* (βλ.σχήμα προηγούμενης άσκησης) η οποία συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε

α. την ελάττωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος εξ αιτίας της κρούσης.

β. το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης την οποία θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

γ. την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του.

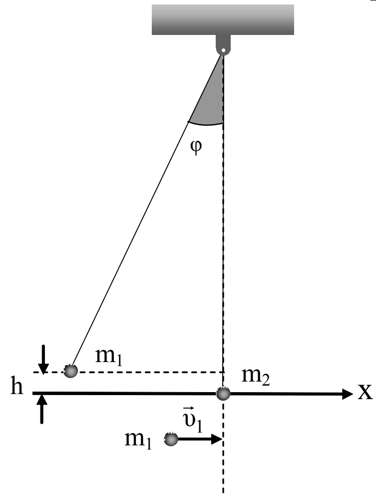
δ. το χρονικό ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του. Δίνεται g = 10 m/s^2.

[Απ. α. 12 *J* β. 0,3 *m* γ. 24,5 *J*, 0,5 *J* δ. 10 *N*, - 30 *N*, 30 *N*]

5.118. Οι σφαίρες του σχήματος με μάζες m_1 και m_2 είναι δεμένες με νήματα ίσου μήκους. Κρεμάμε τα νήματα από το ίδιο σημείο και απομακρύνουμε τη σφαίρα μάζας m_1 από τη θέση ισορροπίας της μέχρι ύψους h = 0,2 *m*. Η σφαίρα m_1 συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με την αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας μάζας m_2 μετά την κρούση αν:

α. $m_1 = m_2$, **β.** $m_1 = 2\cdot m_2$. Δίνεται: g = 10 *m/s*^{2}.

[Απ. α. 2 *m/s*, β. 8/3 *m/s*]



5.119. Δύο σφαίρες Α, Β με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα κρέμονται με κατακόρυφα νήματα που έχουν το ίδιο μήκος ℓ = 10 *cm*. Αρχικά οι δύο σφαίρες εφάπτονται μεταξύ τους. Εκτρέπουμε τη σφαίρα Α κατά γωνία 60^0 και την αφήνουμε ελεύθερη. Η κρούση είναι απολύτως ελαστική. Αν $m_2 = 2\ m_1$, να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα Α θα χτυπήσει τη Β.

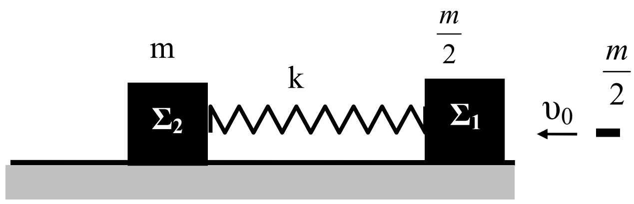
β. τις ταχύτητες με τις οποίες θα κινηθούν οι σφαίρες μετά την κρούση.

γ. τις μέγιστες εκτροπές (ύψη) στην οποία θα βρεθούν οι σφαίρες μετά την κρούση.

δ. την τάση του νήματος που ασκείται στη σφαίρα Β αμέσως μετά την κρούση αν m_2 = 100 *g*;

Δίνεται g = 10 *m/s²*. [Απ. α.1 *m/s*, β. – 1/3 *m/s*, 2/3 *m/s*, γ. $\frac{1}{180}m, \frac{1}{45}m$, δ. $\frac{13}{9}N$]

5.120. Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες αντίστοιχα $\frac{m}{2}$ και m, είναι συνδεδεμένα στα άκρα οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Ένα βλήμα μάζας $\frac{m}{2}$ που κινείται οριζόντια κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_1$. Να υπολογίσετε

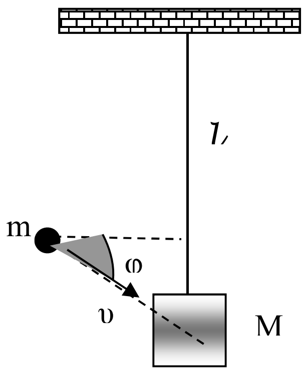


α. το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμική κατά την κρούση.

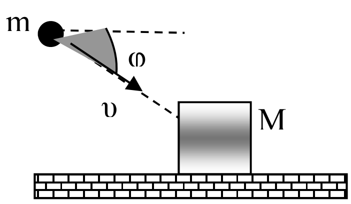
β. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Δίνονται: m = 1 *kg*, $υ_0$ = 20 *m/s*, k = 800 *N/m*. [Απ. α. 50% β. 0,25 *m*]

5.121. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα βλήμα μάζας m = 20 *g*, που πρόκειται να σφηνωθεί σε ένα κομμάτι ξύλου μάζας Μ = 980 *g*. Το ξύλο είναι δεμένο από την οροφή με τη βοήθεια ενός αβαρούς νήματος σταθερού μήκους ℓ = 20 *cm*. Το βλήμα λίγο πριν σφηνωθεί στο ξύλο έχει ταχύτητα μέτρου υ = 100 *m/s,* που σχηματίζει γωνία φ = 60⁰ με τον ορίζοντα. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος από την αρχική κατακόρυφη θέση στην οποία ισορροπούσε το ξύλο. [Απ. συνθ = 0,75]



5.122. Στο διπλανό σχήμα το m σφηνώνεται στο Μ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο.
Δίνονται $υ = 10\sqrt{3}$ *m/s*, m = 100 *g*, Μ = 900 *g* και φ = 30⁰. [Απ. 1,5 *m/s*]



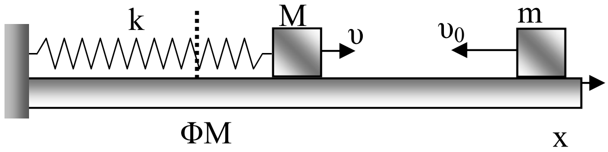
5.123. Δύο σφαίρες με μάζες m_1 = 2 *kg* και m_2 = 4 *kg* κινούνται με ταχύτητες μέτρων $υ_1$ = 4 *m/s* και $υ_2$ = 2 *m/s* πάνω σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60⁰. Αν η κρούση είναι πλαστική να υπολογίσετε:

α. την ταχύτητα του συσσωματώματος.

β. την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

[Απ. α. $\frac{4\sqrt{3}}{3}m/s$, 30⁰ με τη $\vec{υ}_2$, β. 8 *J*]

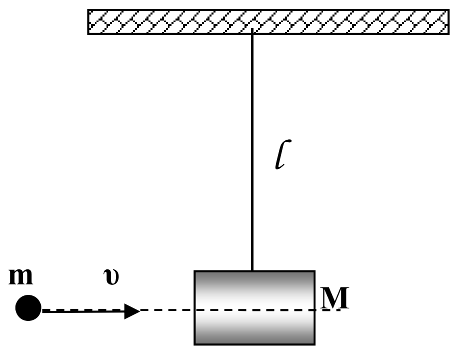
5.124. Στο σχήμα, το σώμα μάζας Μ = 1 *kg* εκετελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους 20 *cm*. Κάποια στιγμή ενώ βρίσκεται στη θέση x = + $10\sqrt{3}$ *cm* και κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα μάζας m = 3 *kg* που κινείται αντίθετα με ταχύτητα $υ_0$. Να υπολογίσετε



Α. την περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης πριν και μετά την κρούση.
Β. την ταχύτητα του σώματος μάζας Μ λίγο πριν γίνει η κρούση.
Γ. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ ώστε η ταλάντωση του συσσωματώματος να έχει
Γ1. πλάτος ταλάντωσης ίσο με αυτό που είχε το σώμα μάζας Μ πριν γίνει η κρούση.
Γ2. το ελάχιστο δυνατό πλάτος.

Δίνεται k = 900 *N/m* [Απ. Α. $\frac{\pi}{15}s$, $\frac{2\pi}{15}s$, Β. 3 *m/s*, Γ1. 3 *m/s* Γ2. 1 *m/s*]

5.125. Στο σχήμα Μ = 900 *g*, m = 100 *g*, υ = 20 *m/s*. Πόσο θα ανέλθει το σώμα Μ αν
α. το m σφηνωθεί στο Μ
β. το m εξέρχεται από το Μ με ταχύτητα 10 *m/s*.
Ποια η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση; Ποια η τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση σε κάθε περίπτωση;
Δίνεται ℓ = 20 *cm*, g = 10 m/s^2.



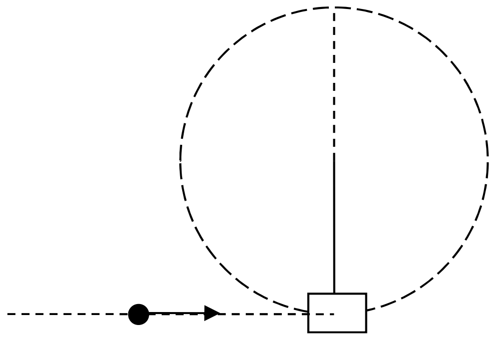
[Απ. α. 0,2 *m*, 18 *J*, 30 Ν, β. $\frac{5}{81}m$, $\frac{130}{9}J$, $\frac{131}{9}N$]

5.126. Δύο σφαίρες Α, Β είναι κρεμασμένες με ίσα νήματα και ισορροπούν καθώς τα νήματα είναι κατακόρυφα οπότε οι σφαίρες εφάπτονται μεταξύ τους.
i) Οριζοντιώνουμε το νήμα της σφαίρας Α και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί. Αν το μήκος του νήματος είναι 10 *cm* και η κρούση ελαστική να υπολογίσετε τις μέγιστες γωνιακές αποκλίσεις από την αρχική θέση ισορροπίας των σφαιρών αν:
α. $\frac{m_A}{m_B} = 1$ **β.** $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{5}$
ii) Εκτρέπουμε και τις δύο σφαίρες αντίθετα κατά γωνίες φ και θ και τις αφήνουμε ελεύθερες. Αν η κρούση είναι τελείως ελαστική και γίνεται στην αρχική θέση ισορροπίας των σφαιρών, ποιος πρέπει να είναι ο λόγος $\frac{m_A}{m_B}$ των μαζών τους ώστε οι σφαίρες να ξαναγυρίσουν σις αρχικές θέσεις εκτροπής τους. Δίνονται συνφ = 0,998, συνθ=0,997. [Απ. i) α. 0^0, 90^0, β. συν$θ_1$ = $\frac{5}{9}$, συν$θ_2$ = $\frac{8}{9}$, ii) $\sqrt{\frac{3}{2}}$]

5.127. Δύο σφαίρες Α και Β με μάζες m_A = 8 *kg* και m_B = 2 *kg* κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά χωρίς τριβές και οι ταχύτητές του είναι $υ_A$ = 5 *m/s* και $υ_B$ = 8 *m/s*. Η κρούση που συμβαίνει μεταξύ τους είναι κεντρική και τελείως πλαστική και διαρκεί 0,2 *s*. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της κοινής ταχύτητας των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της κάθε σφαίρας.
γ. τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στην κάθε σφαίρα κατά τη διάρκεια της κρούσης.
δ. να παρασταθεί γραφικά η ορμή σε συνάρτηση με το χρόνο p = f(t), για τις δύο σφαίρες στο ίδιο διάγραμμα για χρονικό διάστημα 1 *s* στο οποίο η κρούση να φαίνεται ότι έγινε μεταξύ 0,4 *s* και 0,6 *s*. Στη διάρκεια της κρούσης θεωρούμε ότι η ορμή μεταβάλλεται γραμμικά. [Απ. α. 2,4 *m/s*, β. -76,96 *J*, -58,24 *J*, γ. - 104 *N*, +104 *N*]

5.128. Τεμάχιο ξύλου μάζας Μ = 0, 98 k*g* είναι αναρτημένο από αβαρές νήμα μήκους ℓ = 2 *m* έτσι ώστε να μπορεί να εκτελέσει κατακόρυφη κυκλική τροχιά. Βλήμα μάζας m = 20 *g* κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα υ και σφηνώνεται μέσα στο ξύλο. Το σύστημα των δύο σωμάτων μόλις διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά. Ζητούνται:

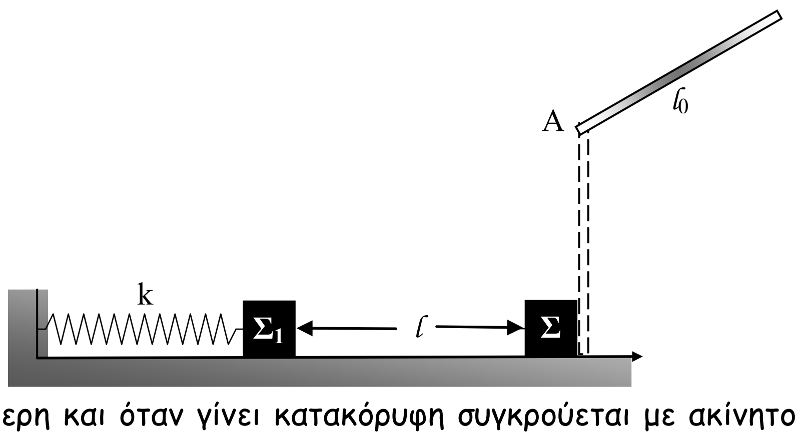


α. να υπολογισθεί η ταχύτητα του συστήματος των σωμάτων στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς.
β. να υπολογισθεί η ταχύτητα υ του βλήματος.
γ. το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση;
δ. να υπολογιστεί η ταχύτητα του βλήματος, αν αντικαταστήσουμε το νήμα με αβαρή ράβδο ίδιου μήκους (ώστε το σύστημα των δύο σωμάτων μόλις να διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά). Δίνεται g = 10 *m/s²*.

[Απ. α. $2\sqrt{5}m/s$ β. 500 m/s, γ. $\frac{49}{50}$ δ. $200\sqrt{5}m/s$]

5.129. Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και μπροστά από κατακόρυφο ανένδοτο τοίχο δίνονται δύο σημεία Α και Β των οποίων οι αποστάσεις από τον τοίχο είναι 2,75 *m* και 4 *m* αντίστοιχα. Η απόσταση ΑΒ είναι 10 *m*. Από το σημείο Α εκσφενδονίζεται μικρή ελαστική σφαίρα προς τον τοίχο και μετά από ελαστική κρούση με αυτόν, διέρχεται από το σημείο Β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής της σφαίρας από το Α στο Β. [Πολυτεχνείο 1964] [Απ. 12 *m*]

5.130. Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους ℓ_0 = 1,8 *m* και μάζας Μ = 1,5 *kg* μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο μήκος της και διέρχεται από το άκρο της Α. Κρατάμε τη ράβδο ακίνητη σε θέση όπου ο άξονάς της σχηματίζει γωνία 120^0 με την κατακόρυφη θέση ισορροπίας της.



Κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερη και όταν γίνει κατακόρυφη συγκρούεται με ακίνητο σώμα Σ μάζας m = 0,5 *kg*, του οποίου οι διαστάσεις θεωρούνται πολύ μικρές. Αμέσως μετά την κρούση η ράβδος παραμένει ακίνητη. Το σώμα Σ αφού διανύσει απόσταση

$\ell = 1$ *m* χωρίς τριβή πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1$ *kg* το οποίο ηρεμεί δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 72 *N/m*. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το άλλο άκρο του δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Η ταχύτητα του Σ έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου.

Α. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή κατά την οποία γίνεται κατακόρυφη.

β. το μέτρο της ταχύτητας την οποία αποκτά το σώμα Σ αμέσως μετά την κρούση.

Β. Η κρούση της ράβδου με το σώμα Σ έχει αμελητέα χρονική διάρκεια. Είναι ελαστική ή όχι;

Γ. Η χρονική διάρκεια της κρούσης μεταξύ των σωμάτων Σ και $Σ_1$ είναι πολύ μικρή και ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ δαπέδου και συσσωματώματος είναι μ = 0,3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου. Δίνεται για τη ράβδο $I_A = \frac{1}{3}M\ell_0^2$ και g = 10 *m/s²*. [Απ. Α. *5 rad/s*, 9 *m/s* Β. Ελαστική Γ. 3/8 *m*]

5.131. Ένα σώμα μάζας Μ = 3 kg είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή, και αρχικά ισορροπεί με το ελατήριο τεντωμένο κατά d = 0,3 m. Τη χρονική στιγμή t = 0, λόγω κάποιου εσωτερικού αιτίου, το σώμα διασπάται βίαια σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 για τις οποίες ισχύει $m_2 = 2m_1$. Το σώμα μάζας m_1 παραμένει δεμένο στο ελατήριο εκτελώντας αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}2\sqrt{2}\,m$, ενώ το σώμα μάζας m_2 κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω.

α. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος m_1.

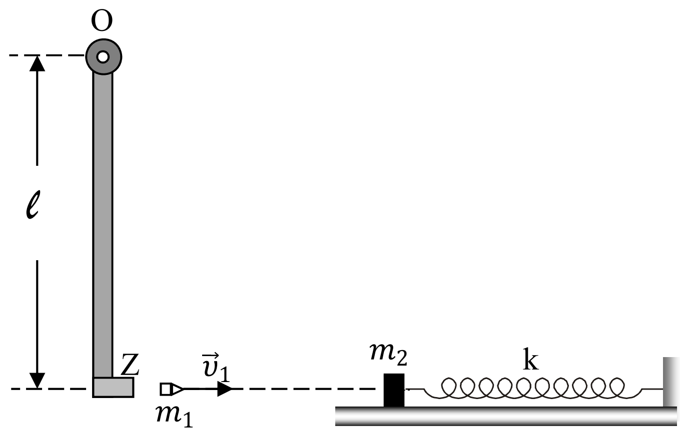
β. Να υπολογίσετε την ενέργεια που εκλύθηκε κατά τη διάσπαση του σώματος Μ.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος μάζας m_1 από τη θέση ισορροπίας του, θεωρώντας θετική τη φορά του βάρους.

δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_1 τη στιγμή της διάσπασης.

Δίνεται g = 10 m/s².

5.132. Μια ομογενής ράβδος ΟΖ μήκους $\ell = 0{,}4$ m και μάζας Μ = 9 kg μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άλλο άκρο της είναι προσαρμοσμένη μικρή συσκευή εκτόξευσης, αμελητέας μάζας, που περιέχει ένα μικρό σώμα μάζας $m_1 = 1$ kg. Κάποια στιγμή το σώμα μάζας m_1 εκτοξεύεται οριζόντια από τη συσκευή εκτόξευσης και αμέσως σφηνώνεται στο κέντρο



μάζας ενός σώματος μάζας m_2 = 4 kg, που εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 0,3 m δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k = 400 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ελάχιστα πριν την κρούση τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 έχουν αντίρροπες ταχύτητες, ενώ αμέσως μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα έχει μηδενική ορμή. Η ράβδος, μετά την εκτόξευση του σώματος μάζας m_1, ανεβαίνει και ακινητοποιείται στιγμιαία στη θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της είναι μέγιστος. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της στροφορμής της ράβδου αμέσως μετά την εκτόξευση του m_1.

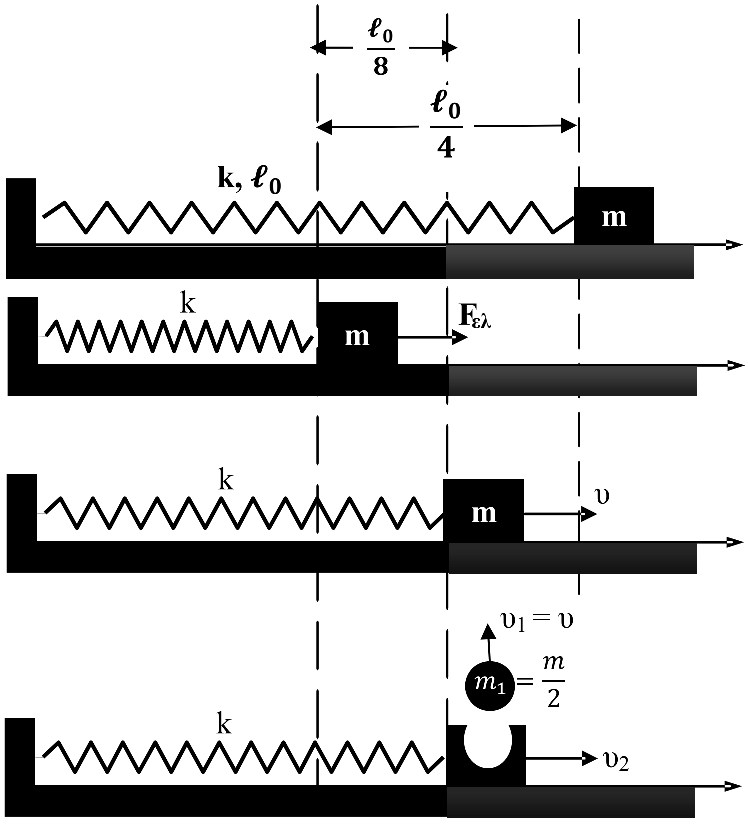
β. το μέτρο της ταχύτητας $υ_1$ του σώματος m_1 λίγο πριν την κρούση.

γ. την απώλεια μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

δ. το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 και ότι η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας Μ και μήκους ℓ, ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτή, υπολογίζεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

5.133. Σε οριζόντιο επίπεδο υπάρχει ελατήριο, του οποίου το ένα άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος ℓ_0. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου ακουμπάμε σώμα μάζας m και σπρώχνουμε το σώμα, ώστε το ελατήριο να συμπιεστεί κατά $\frac{\ell_0}{4}$. Στη θέση αυτή η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα έχει μέτρο ίσο με το βάρος του σώματος. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί και αφού διανύσει απόσταση $\frac{\ell_0}{8}$, το σώμα διασπάται σε δύο σώματα ίδιας μάζας. Το ένα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα που είχε το m λίγο πριν τη διάσπαση. Το άλλο συνεχίζει την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να αναπηδήσει και αφού κάποια στιγμή αποχωριστεί από το ελατήριο σταματά σε απόσταση $\frac{\ell_0}{8}$ από το ελεύθερο άκρο του. Να υπολογίσετε



α. το συντελεστή τριβής, που είναι ίδιος, μεταξύ σωμάτων και οριζοντίου επιπέδου.

β. το ύψος που θα φτάσει το σώμα που κινήθηκε κατακόρυφα.

γ. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της ορμής, τη στιγμή της διάσπασης.

δ. το συνολικό ποσό της θερμικής ενέργειας.

<u>Εφαρμογή</u>: $\ell_0 = 96\,cm$, m = 1 kg, g = 10 m/s^2.

[Απ. α. $\frac{7}{12}$, β. 2 cm, γ. 0,3 J, $\frac{\sqrt{10}}{10}\,kg\frac{m}{s}$, δ. 1,4 J]

§5.7 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σχετική ταχύτητα

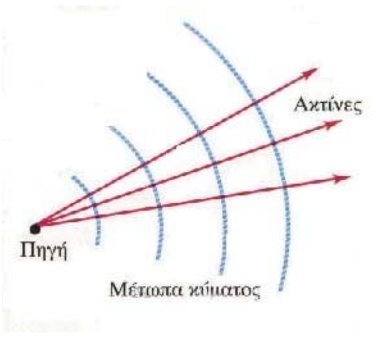
ενός κινητού Α ως προς ένα κινητό Β ($\vec{\upsilon}_{A/B}$) εκφράζει την ταχύτητα που αντιλαμβάνεται για το κινητό Α ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο κινητό Β. Ορίζεται σαν τη διανυσματική διαφορά των ταχυτήτων των δύο κινητών, όπως τις μετράει ένας ακίνητος παρατηρητής. Δηλαδή:. $\vec{\upsilon}_{A/B} = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B$ (5.18)

Αν τα δύο κινητά κινούνται στην ίδια ευθεία, τότε η 5.18 γράφεται $\upsilon_{A/B} = \upsilon_A - \upsilon_B$, όπου υ είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.

✓ **Μέτωπο κύματος:** Κατά την περιγραφή της διάδοσης ενός κύματος, συχνά χρησιμοποιείται η έννοια του μετώπου κύματος. Ορίζουμε σαν μέτωπο κύματος το γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων στα οποία η φάση της ταλάντωσης μιας φυσικής ποσότητας, συνδεδεμένης με το κύμα, είναι σταθερή.

Ένα παράδειγμα, είναι τα κύματα που δημιουργούνται όταν ρίχνουμε ένα πετραδάκι στην ήρεμη επιφάνεια μιας μικρής λίμνης. Οι κύκλοι που σχηματίζονται από τις κορυφές των υδάτινων κυμάτων κατά τη διάδοσή τους είναι μέτωπα κύματος.

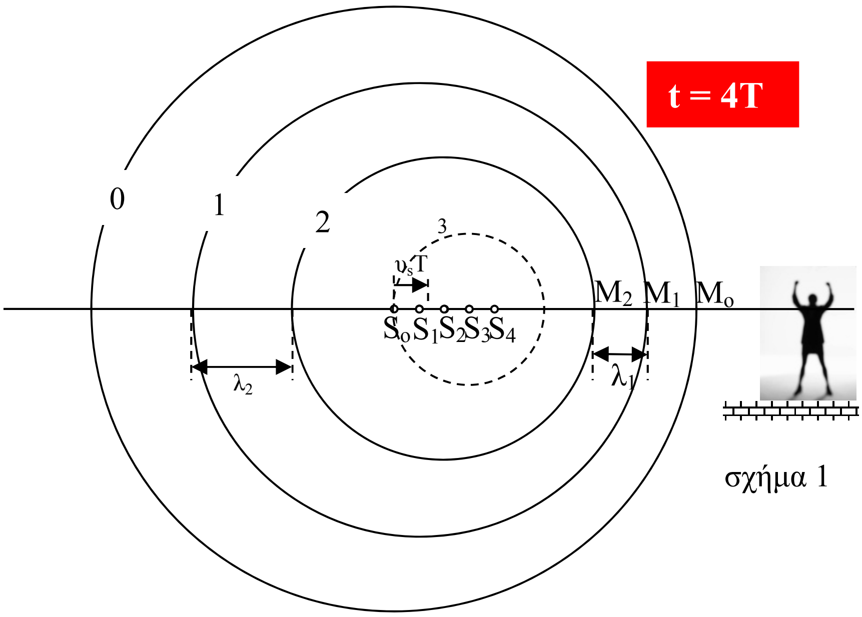
Άλλο παράδειγμα είναι η διάδοση των ηχητικών κυμάτων μέσα σε ακίνητο αέρα, που παράγονται από σημειακή πηγή. (Θυμηθείτε ότι ο ήχος είναι διάμηκες μηχανικό κύμα στο οποίο μεταβάλλονται περιοδικά τόσο η πίεση όσο και η πυκνότητα του αέρα.) Κάθε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τη σημειακή πηγή είναι μέτωπο κύματος. Στην περίπτωση αυτή οι κορυφές πίεσης, δηλαδή οι επιφάνειες σε όλη την έκταση των οποίων η πίεση είναι μέγιστη, δημιουργούν σύνολα ομόκεντρων σφαιρών, των οποίων η ακτίνα μεγαλώνει καθώς το κύμα απομακρύνεται από την πηγή του. Όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε την κυματική κίνηση, συνήθως σχεδιάζουμε τμήματα λίγων μόνο μετώπων κύματος, επιλέγοντας διαδοχικά μέτωπα τα οποία απέχουν μεταξύ τους ένα μήκος κύματος και έχουν ακτίνα ακέραιο πολ/σιο του μήκους κύματος. Με ίδιο τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε και ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα (π.χ. ορατό φως), μόνο που τώρα αντί για την πίεση ή την πυκνότητα του αέρα στο ηχητικό κύμα, θα έχουμε το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο.



Σημείωση: Τόσο τα ηχητικά, όσο και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι κύματα χώρου και τα μέτωπά τους είναι σφαιρικές επιφάνειες. Σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, όπου οι ακτίνες των σφαιρών έχουν γίνει πολύ μεγάλες, ένα τμήμα μιας σφαιρικής επιφάνειας μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο, οπότε τότε έχουμε επίπεδο κύμα.

Ο C. J. Doppler παρατήρησε ότι όταν ένας παρατηρητής (ακροατής) και μια ηχητική πηγή κινούνται σχετικά με το μέσο διάδοσης του ήχου, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται διαφορετική συχνότητα για τον ήχο από αυτήν που πραγματικά εκπέμπει η πηγή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φαινόμενο Doppler**.

Έστω μια πηγή S που κινείται με ταχύτητα $υ_s$ μέσα σε ακίνητο αέρα, η οποία παράγει αρμονικό ήχο συχνότητας f_s, περιόδου $T = \frac{1}{f_s}$ και μήκους κύματος $\lambda = \upsilon \cdot T$, όπου υ η ταχύτητα του ήχου (κύματος) στον ακίνητο αέρα. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στην ευθεία στην οποία κινείται η πηγή και ακούει τον ήχο που παράγει η πηγή. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις της πηγής κατά τις χρονικές στιγμές 0 (S_0), T (S_1), 2T (S_2), 3T (S_3) και 4T (S_4). Επίσης φαίνονται και τα μέτωπα του ηχητικού κύματος που εξέπεμψε η πηγή τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Τα μέτωπα αυτά κατέχουν τις επιφάνειες σφαιρών, που δεν είναι ομόκεντρες, εξαιτίας της κίνησης της πηγής. Έτσι το μέτωπο «0» που εκπέμφθηκε τη χρονική στιγμή t = 0, έχει κέντρο τη θέση S_0 και ακτίνα $(S_0M_0) = 4\lambda = 4\upsilon T$. Όμοια το μέτωπο «1» που εκπέμφθηκε τη χρονική στιγμή t = T έχει κέντρο τη θέση S_1 και ακτίνα $(S_1M_1) = 3\lambda = 3\upsilon T$ κοκ. Τη στιγμή t = 4T κατά την οποία η πηγή βρίσκεται στη θέση S_4 εκπέμπεται το μέτωπο «4».



σχήμα 1

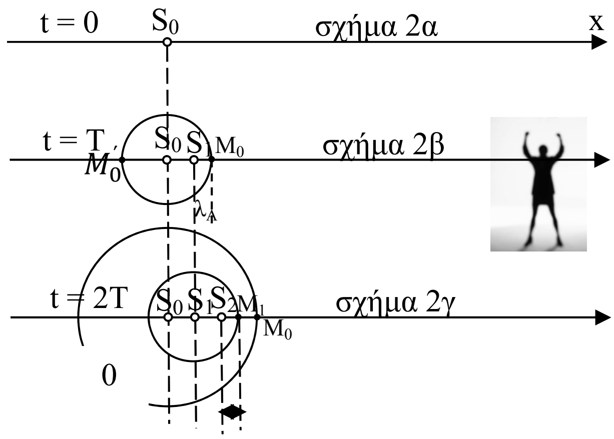
Παρατηρούμε ότι μπροστά από την πηγή τα μέτωπα είναι πυκνότερα από ότι είναι πίσω από την πηγή. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται για <u>μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μετώπων του κύματος</u>, έτσι όταν βρίσκεται μπροστά από την πηγή μετράει μήκος κύματος λ_1, ενώ όταν βρίσκεται πίσω από την πηγή μετράει μήκος κύματος λ_2. Επειδή τα μέτωπα είναι πυκνότερα μπροστά από την πηγή, ισχύει ότι $\underline{\lambda_1 < \lambda_2}$. (5.19)

Είναι προφανές ότι η απόσταση των διαδοχικών μετώπων ΔΕ ΘΑ ΜΕΤΑΒΛΗΘΕΙ αν ο παρατηρητής κινηθεί (στην ίδια διεύθυνση με την πηγή). Έτσι το μήκος κύματος που μετράει ο παρατηρητής δεν εξαρτάται από το αν ο παρατηρητής κινείται έτσι ώστε να πλησιάζει την πηγή ή να απομακρύνεται από αυτήν ή αν είναι ακίνητος. Εξαρτάται όμως από τη σχετική κίνηση της πηγής ως προς το μέσο διάδοσης του ήχου.

➢ **Υπολογισμός του μήκους κύματος που μετράει ο παρατηρητής.**

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t = 0 η κινούμενη πηγή βρίσκεται στη θέση S_0 και αρχίζει να εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας f_s (σχήμα 2α).

Μετά από χρόνο μιας περιόδου, τη χρονική στιγμή t = T, η πηγή θα βρίσκεται στη θέση S_1, μετατοπισμένη κατά $(S_1S_0) = υ_sT$, (5.20) όπου $υ_s$ η ταχύτητα της πηγής. Το μέτωπο που είχε εκπέμψει τη χρονική στιγμή t = 0 θα κατέχει την επιφάνεια σφαίρας κέντρου S_0 και ακτίνας $(S_0M_0) = λ = υT$, (5.21) όπου υ η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα (σχήμα 2β). Τη στιγμή αυτή εκπέμπεται δεύτερο μέτωπο και επομένως η απόσταση S_1M_0 ως απόσταση διαδοχικών μετώπων είναι το μήκος κύματος $λ_A$ που μετράει ο παρατηρητής. $(S_1M_0) = λ_A$. (5.22)



Μετά από χρόνο μιας ακόμη περιόδου, τη χρονική στιγμή t = 2T, η πηγή θα βρίσκεται στη θέση S_2, μετατοπισμένη κατά $(S_2S_1) = (S_1S_0) = υ_sT$ και το μέτωπο που είχε εκπέμψει τη χρονική στιγμή t = 0 θα κατέχει την επιφάνεια σφαίρας κέντρου S_0 και ακτίνας $(S_0M_0) = 2λ = 2υT$, ενώ το μέτωπο που είχε εκπέμψει τη χρονική στιγμή t = T θα κατέχει την επιφάνεια σφαίρας κέντρου S_1 και ακτίνας $(S_1M_1) = λ = υT$. Τη στιγμή αυτή εκπέμπεται νέο μέτωπο και επομένως η απόσταση S_2M_1 ως απόσταση διαδοχικών μετώπων είναι το μήκος κύματος $λ_A$ που μετράει ο παρατηρητής. $(S_2M_1) = (S_1 M_0) = λ_A$. (σχήμα 2γ).

Από τη γεωμετρία του σχήματος 2β προκύπτει ότι $(S_1M_0) = (S_0M_0) - (S_1S_0)$.

Με τη βοήθεια των σχέσεων 5.20, 5.21 και 5.22 προκύπτει ότι

$λ_A = υT - υ_sT \Rightarrow \lambda_A = (\upsilon - \upsilon_s)T$ ή $\lambda_A = \frac{\upsilon-\upsilon_s}{f_s}$. (5.23)

Με ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος λ_A' που μετράει παρατηρητής που βρίσκεται πίσω από την κινούμενη πηγή.

Είναι $\lambda_A' = (S_1M_0') = (M_0'S_0) + (S_0S_1) \Rightarrow \lambda_A' = \upsilon T + \upsilon_s T$ ή $\lambda_A' = \frac{\upsilon+\upsilon_s}{f_s}$. (5.24)

Έτσι, το μήκος κύματος που μετράει ο παρατηρητής όταν βρίσκεται μπροστά από την κινούμενη πηγή δίνεται από τη σχέση 5.23, ανεξάρτητα αν ο παρατηρητής είναι ακίνητος ή πλησιάζει ή απομακρύνεται από την πηγή, ενώ αν ο παρατηρητής βρίσκεται πίσω από την πηγή μετράει μήκος κύματος που υπολογίζεται από τη σχέση 5.24 ανεξάρτητα αν αυτός κινείται ή όχι.

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτουν και τα εξής συμπεράσματα:

α. Είναι $λ_A < \lambda_A'$ σύμφωνα και με τη σχέση 5.19.

β. Αν η πηγή είναι ακίνητη ($υ_s = 0$) τότε $λ_A = \lambda_A' = \frac{\upsilon}{f_s} = λ$, δηλαδή ο παρατηρητής μετράει το «σωστό» μήκος κύματος για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.

➢ **Υπολογισμός της <u>συχνότητας</u> του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.**

Θεωρούμε ότι τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής κινούνται κατά τη θετική φορά του άξονα x, με ταχύτητες μέτρων $υ_s$ και $υ_A$ αντίστοιχα. Επειδή ο παρατηρητής βρίσκεται μπροστά από την κινούμενη πηγή θα μετράει για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή, μήκος κύματος, που δίνεται από τη σχέση 5.23: $\lambda_A = \frac{\upsilon - \upsilon_S}{f_S}$. Επειδή όμως ο παρατηρητής κινείται, θα αντιλαμβάνεται διαφορετική την ταχύτητα του κύματος (ήχου). Σύμφωνα με τη σχέση 5.18 η σχετική ταχύτητα του ήχου ως προς τον παρατηρητή θα δίνεται από τη σχέση $\vec{\upsilon}_{H/A} = \vec{\upsilon}_H - \vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_A$. Επειδή οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}_A$ έχουν τη θετική κατεύθυνση του άξονα x, η σχέση γράφεται $\upsilon_{H/A} = \upsilon - \upsilon_A$. (5.25)

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ισχύει $f_A = \frac{\upsilon_{H/A}}{\lambda_A} \xRightarrow{5.25, 5.23}$

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\frac{\upsilon - \upsilon_S}{f_S}} \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S. \qquad (5.26)$$

Η σχέση 5.26 είναι γενική, ισχύει σε κάθε περίπτωση, αρκεί η πηγή και ο παρατηρητής να κινούνται στην ίδια ευθεία. Στη σχέση αυτή τα υ, $υ_A$ και $υ_s$ παριστάνουν τις ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ τιμές των ταχυτήτων του ήχου, του παρατηρητή και της πηγής, αντίστοιχα.

Για να εφαρμόσουμε τη σχέση, ανάλογα με τον τρόπο κίνησης πηγή – παρατηρητή, ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία:

α. Ορίζουμε ως ΘΕΤΙΚΗ τη φορά της ταχύτητας υ του ήχου, δηλαδή τη φορά <u>ΑΠΟ</u> ΤΗΝ ΠΗΓΗ <u>ΠΡΟΣ</u> ΤΟΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ (S → A).

β. Αν κάποια ταχύτητα έχει αντίθετη φορά από αυτή που ορίσαμε ως θετική, την αντικαθιστούμε στη σχέση 5.26 με πρόσημο -. Για παράδειγμα αν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή τότε αντικαθιστούμε τη $υ_A$ με – $υ_A$ οπότε $f_A = \frac{\upsilon - (-\upsilon_A)}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \Rightarrow$

$$f_A = \frac{\upsilon - (-\upsilon_A)}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S.$$

Α. ΠΗΓΗ ΑΚΙΝΗΤΗ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΑΚΙΝΗΤΟΣ

Είναι $υ_s$ = 0 και $υ_A$ = 0.

Από 5.23 ή 5.24 προκύπτει $λ_A = \frac{\upsilon}{f_S} = λ$ και από 5.26 $f_A = \frac{\upsilon - 0}{\upsilon - 0} f_S = f_S$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει το πραγματικό μήκος κύματος για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή και αντιλαμβάνεται την πραγματική συχνότητα για τον ήχο της πηγής.</u>

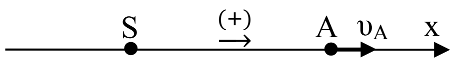
Β. ΠΗΓΗ ΑΚΙΝΗΤΗ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ

Είναι $υ_s$ = 0 και $υ_A \neq 0$.

Από 5.23 ή 5.24 προκύπτει $λ_A = \frac{\upsilon}{f_S} = λ$.

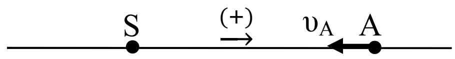
<u>Ο παρατηρητής μετράει το πραγματικό μήκος κύματος για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή</u>

i. Αν ο παρατηρητής **απομακρύνεται** από την πηγή: Από 5.26, $f_A = \frac{\upsilon - (+\upsilon_A)}{\upsilon - 0} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S$ (< f_s).



<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μικρότερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

ii. Αν ο παρατηρητής **πλησιάζει** την πηγή:

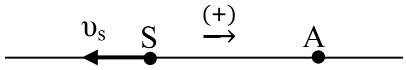


Από 5.26 $f_A = \frac{\upsilon-(-\upsilon_A)}{\upsilon-0} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon} f_S$ (> f_s).

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μεγαλύτερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

Γ. ΠΗΓΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΑΚΙΝΗΤΟΣ

Είναι $\upsilon_A = 0$ και $\upsilon_s \neq 0$.



i. Αν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή

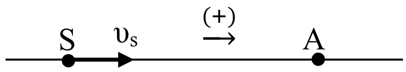
Ο παρατηρητής βρίσκεται πίσω από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.24: $\lambda_A = \frac{\upsilon+\upsilon_S}{f_S}$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει μεγαλύτερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, από τη σχέση 5.26 προκύπτει $f_A = \frac{\upsilon-0}{\upsilon-(-\upsilon_S)} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S} f_S$.

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μικρότερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

ii. Αν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή



Ο παρατηρητής βρίσκεται μπροστά από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.23: $\lambda_A = \frac{\upsilon-\upsilon_S}{f_S}$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει μικρότερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

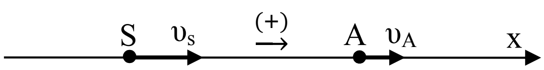
Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, από τη σχέση 5.26 προκύπτει $f_A = \frac{\upsilon-0}{\upsilon-(+\upsilon_S)} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_S} f_S$.

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μεγαλύτερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

Παρατηρείστε - τουλάχιστον μέχρι εδώ – ότι όταν η απόσταση πηγής – παρατηρητή αυξάνεται, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο με μικρότερη συχνότητα (πιο μπάσο), ενώ όταν η απόσταση μειώνεται, τον αντιλαμβάνεται με μεγαλύτερη συχνότητα (πιο οξύ).

Δ. ΠΗΓΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ

Προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x.



Ο παρατηρητής βρίσκεται μπροστά από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.23: $\lambda_A = \frac{\upsilon-\upsilon_S}{f_S}$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει μικρότερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, ισχύει η σχέση 5.26 $f_A = \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_S$.

Αν $\upsilon_s > \upsilon_A$, δηλαδή αν η απόσταση SA μειώνεται συνεχώς, τότε $f_s < f_A$.

Πράγματι, $\upsilon_s > \upsilon_A \Rightarrow -\upsilon_s < -\upsilon_A \Rightarrow \upsilon - \upsilon_s < \upsilon - \upsilon_A \Rightarrow 1 < \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} \Rightarrow f_S < \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_S \Rightarrow f_S < f_A$.

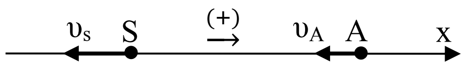
<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μεγαλύτερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

Αν $\upsilon_s < \upsilon_A$, δηλαδή αν η απόσταση SA αυξάνεται συνεχώς, τότε $f_s > f_A$.

Πράγματι, $\upsilon_s < \upsilon_A \Rightarrow -\upsilon_s > -\upsilon_A \Rightarrow \upsilon - \upsilon_s > \upsilon - \upsilon_A \Rightarrow 1 > \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_s} \Rightarrow f_s > \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_s} f_s \Rightarrow f_s > f_A$.

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μικρότερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

i. Προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x.



Ο παρατηρητής βρίσκεται πίσω από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.24: $\lambda_A = \frac{\upsilon+\upsilon_s}{f_s}$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει μεγαλύτερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, από τη σχέση 5.26 προκύπτει $f_A = \frac{\upsilon-(-\upsilon_A)}{\upsilon-(-\upsilon_s)} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} f_s$.

Αν $\upsilon_s > \upsilon_A$, δηλαδή αν η απόσταση SA αυξάνεται συνεχώς, τότε $f_s > f_A$.

Πράγματι, $\upsilon_s > \upsilon_A \Rightarrow \upsilon + \upsilon_s > \upsilon + \upsilon_A \Rightarrow 1 > \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} \Rightarrow f_s > \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} f_s \Rightarrow f_s > f_A$.

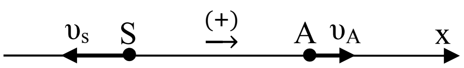
<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μικρότερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

Αν $\upsilon_s < \upsilon_A$, δηλαδή αν η απόσταση SA μειώνεται συνεχώς, τότε $f_s < f_A$.

Πράγματι, $\upsilon_s < \upsilon_A \Rightarrow \upsilon + \upsilon_s < \upsilon + \upsilon_A \Rightarrow 1 < \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} \Rightarrow f_s < \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} f_s \Rightarrow f_s < f_A$.

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μεγαλύτερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

ii. Με αντίρροπες ταχύτητες, ώστε να απομακρύνονται.



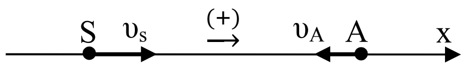
Ο παρατηρητής βρίσκεται πίσω από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.24: $\lambda_A = \frac{\upsilon+\upsilon_s}{f_s}$.

<u>Ο παρατηρητής μετράει μεγαλύτερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, από τη σχέση 5.26 προκύπτει $f_A = \frac{\upsilon-(+\upsilon_A)}{\upsilon-(-\upsilon_s)} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_s} f_s$. ($f_A < f_s$)

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μικρότερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

iii. Με αντίρροπες ταχύτητες, ώστε να πλησιάζουν.



Ο παρατηρητής βρίσκεται μπροστά από την κινούμενη πηγή, οπότε μετράει μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση 5.23: $\lambda_A = \frac{\upsilon-\upsilon_s}{f_s}$.

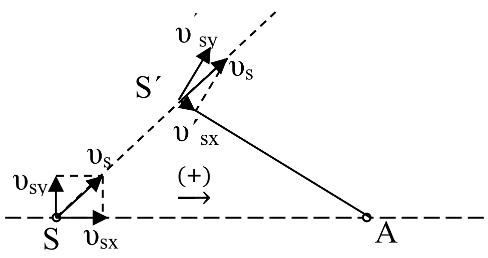
<u>Ο παρατηρητής μετράει μικρότερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.</u>

Για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, από τη σχέση 5.26 προκύπτει $f_A = \frac{\upsilon-(-\upsilon_A)}{\upsilon-(+\upsilon_s)} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_s} f_s$. ($f_A > f_s$)

<u>Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται **μεγαλύτερη** συχνότητα για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.</u>

Παρατηρείστε και εδώ ότι όταν η απόσταση SA **μειώνεται** ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο με **μεγαλύτερη** συχνότητα (πιο οξύ), ενώ όταν η απόσταση SA **αυξάνεται** ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο με **μικρότερη** συχνότητα (πιο μπάσο).

Ε. Η πηγή ή ο παρατηρητής κινούνται σε διαφορετική διεύθυνση



Έστω ότι κινείται μόνο η πηγή, σε διεύθυνση διαφορετική από τη SA. Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε την ταχύτητα $υ_s$ σε δύο συνιστώσες, ώστε η μία από τις δύο να ανήκει στην ευθεία SA. Αντικαθιστούμε στη συνέχεια στην 5.26 τη συνιστώσα της ταχύτητας που ανήκει στην SA.

$f_A = \frac{\upsilon - 0}{\upsilon - (+\upsilon_{sx})} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{sx}} f_s$.

Προφανώς η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα μεταβάλλεται, ακόμη κι αν οι ταχύτητες πηγής ή παρατηρητή έχουν σταθερά μέτρα, λόγω της μεταβολής των γωνιών που θα σχηματίζουν κάθε στιγμή οι ταχύτητες με την ευθεία SA.

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, όταν η πηγή βρίσκεται στη θέση S΄, αφορά τη συχνότητα του ήχου που εξέπεμψε η πηγή όταν βρισκόταν στη θέση S, γιατί στο χρόνο που χρειάστηκε ο ήχος να φτάσει στον παρατηρητή ($\tau = \frac{SA}{\upsilon}$), η πηγή διάνυσε το $(SS') = \upsilon_s \tau = \frac{\upsilon_s}{\upsilon}(SA)$.

ΣΤ. Όταν φυσάει αεράκι...

Όταν το μέσο διάδοσης του ήχου (αέρας, νερό κλπ) κινείται με ταχύτητα, έστω $\vec{\upsilon}_\alpha$, τότε στην εξίσωση 5.26 αντικαθιστούμε την ταχύτητα του ήχου υ με $\upsilon \pm \upsilon_\alpha$.

Έτσι αν η $\vec{\upsilon}_\alpha$ έχει κατεύθυνση από την πηγή προς τον παρατηρητή (θετική φορά), τότε αντικαθιστούμε με $υ + υ_α$, ενώ αν η $\vec{\upsilon}_\alpha$ έχει κατεύθυνση από τον παρατηρητή προς την πηγή αντικαθιστούμε με $υ - υ_α$.

Στην περίπτωση που τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής είναι ακίνητοι, τότε $f_A = f_s$, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση (S → A ή A → S) του ανέμου.

Ζ. Αριθμός κυμάτων και χρονική διάρκεια

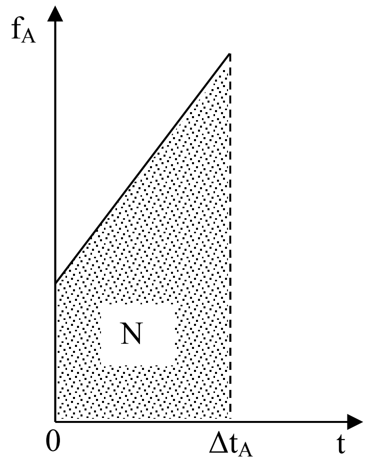
Μια ηχητική πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s για χρονικό διάστημα $Δt_s$.

Στο χρονικό διάστημα $Δt_s$ η πηγή εκπέμπει $N = f_s\, Δt_s$ κύματα, (5.27)

τα οποία ακούει ο παρατηρητής σε χρονικό διάστημα $Δt_A$.

i. Αν ο παρατηρητής είναι ακίνητος ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε ακούει τον ήχο με σταθερή συχνότητα f_A και ισχύει $N = f_A\, Δt_A$. Επομένως $f_s\, Δt_s = f_A\, Δt_A$. (5.28)

ii. Αν ο παρατηρητής κινείται με επιτάχυνση, τότε αντιλαμβάνεται τον ήχο με μεταβλητή συχνότητα. Ο αριθμός των κυμάτων του ήχου που ακούει ο παρατηρητής, υπολογίζεται με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συχνότητας f_A σε συνάρτηση με το χρόνο. Το εμβαδό της γραφικής παράστασης δίνει τον αριθμό των κυμάτων που ακούει ο παρατηρητής, ο οποίος είναι ίσος με αυτόν που εξέπεμψε η πηγή σε χρόνο Δt_s. Δηλαδή ΕΜΒΑΔΟ = $f_s\,\Delta t_s$.
Στο διπλανό σχήμα η συχνότητα f_A είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, οπότε γνωρίζοντας τον αριθμό Ν των κυμάτων (από την 5.27), άρα και το εμβαδό του τραπεζίου, μπορούμε να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα Δt_A.



Η. Ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων σε επίπεδη επιφάνεια

Όταν ο παρατηρητής ακούει τον ήχο μετά από ανάκλαση σε επίπεδη επιφάνεια, ο υπολογισμός της συχνότητας γίνεται σε δύο βήματα:

1ο Βήμα. Υπολογίζουμε τη συχνότητα που «ακούει» η επιφάνεια εξαιτίας της κίνησης της πηγής.

2ο Βήμα. Η επιφάνεια ανακλά τον ήχο με συχνότητα ακριβώς ίση με αυτή με την οποία την «άκουσε». Αυτό συμβαίνει γιατί ο αριθμός των κυμάτων ο οποίος προσπίπτει στην επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που ανακλώνται από την επιφάνεια στην ίδια μονάδα χρόνου.
Θεωρούμε σαν πηγή την επιφάνεια, οπότε με τη βοήθεια της 5.26 υπολογίζουμε τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Επειδή ο παρατηρητής θα ακούει ταυτόχρονα δύο ήχους, έναν κατευθείαν από την πηγή και έναν μετά από ανάκλαση, υπάρχει η περίπτωση τελικά από τη συμβολή τους να ακούσει διακροτήματα.
Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι η διαφορά (απόλυτη τιμή) των δύο συχνοτήτων, αλλά για να το ακούσει ένας (φυσιολογικός) παρατηρητής, πρέπει να είναι το πολύ μέχρι 10 Hz. ($f_\delta = |f_1 - f_2| \le 10\ Hz$)

Παράδειγμα 5.17 Ένας ακίνητος παρατηρητής ακούει τον ήχο της σειρήνας ενός περιπολικού, που τον πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα, με συχνότητα f_1 = 1530 Hz. Όταν το περιπολικό απομακρύνεται, ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, έχει συχνότητα f_2 = 1360 Hz. Αν η ταχύτητα του ήχου στον (ακίνητο) αέρα είναι υ = 340 m/s να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας του περιπολικού.

β. τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το περιπολικό.

Λύση

α. Όταν το περιπολικό πλησιάζει τον παρατηρητή Α, η συχνότητα που αυτός αντιλαμβάνεται δίνεται από τη σχέση $f_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s$, (5.17.1)

ενώ όταν το περιπολικό απομακρύνεται, η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση $f_2 = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s$. (5.17.2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις 5.17.1 και 5.17.2

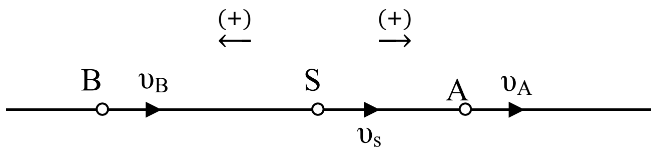
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s}{\frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon - \upsilon_s} \Rightarrow f_1 \upsilon - f_1 \upsilon_s = f_2 \upsilon + f_2 \upsilon_s \Rightarrow (f_1 - f_2)\upsilon = (f_1 + f_2)\upsilon_s \Rightarrow \upsilon_s = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}\upsilon.$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα: $\upsilon_s = \frac{1530Hz - 1360Hz}{1530Hz + 1360Hz} 340m/s \Rightarrow \upsilon_s = 20m/s$.

β. Λύνουμε την 5.17.1 ως προς f_s και αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$f_s = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{\upsilon} f_1 \Rightarrow f_s = \frac{340m/s - 20m/s}{340m/s} 1530Hz \Rightarrow f_s = 1440Hz.$$

Παράδειγμα 5.18 Ένα περιπολικό κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 45 m/s. Το περιπολικό καταδιώκει έναν μοτοσικλετιστή Α, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα 40 m/s, ενώ ένας άλλος μοτοσικλετιστής Β ακολουθεί το περιπολικό, κινούμενος με σταθερή ταχύτητα 35 m/s. Τα τρία κινητά κινούνται στην ίδια ευθεία. Η σειρήνα του περιπολικού εκπέμπει ήχο συχνότητας 1000 Hz για χρόνο Δt_s = 20 s. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ = 340 m/s. Να υπολογίσετε



α. τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται καθένας από τους δύο μοτοσικλετιστές.

β. τη χρονική διάρκεια που ακούει ο καθένας από τους δύο μοτοσικλετιστές τον ήχο της σειρήνας.

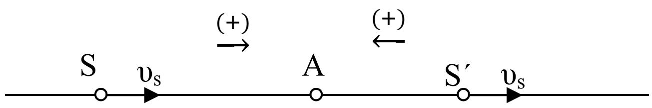
Λύση

α. Για τον μοτοσικλετιστή Α που προπορεύεται ισχύει $f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_s} f_s$, ενώ για τον μοτοσυκλετιστή Β που ακολουθεί το περιπολικό ισχύει $f_B = \frac{\upsilon + \upsilon_B}{\upsilon + \upsilon_s} f_s$

Αντικαθιστούμε (στο S.I)

$f_A = \frac{340-40}{340-45} 1000Hz \Rightarrow f_A \cong 1017Hz$ *και* $f_B = \frac{340+35}{340+45} 1000Hz \Rightarrow f_B \cong 974Hz$

β. Η πηγή (περιπολικό) σε χρόνο Δt_s = 20 s εκπέμπει N = 1000·20 =20000 μέτωπα. Τα κύματα αυτά τα αντιλαμβάνονται σε χρόνο Δt_A και Δt_B οι μοτοσικλετιστές Α και Β με συχνότητες f_A και f_B αντίστοιχα. Από την 5.28 έχουμε $\Delta t_A = \frac{f_s}{f_A}\Delta t_s \Rightarrow \Delta t_A = \frac{1000}{1017} 20s \Rightarrow$ $\Delta t_A = 19{,}67\ s$ και $\Delta t_B = \frac{f_s}{f_B}\Delta t_s \Rightarrow$ $\Delta t_B = \frac{1000}{974} 20s \Rightarrow \Delta t_B = 20{,}53\ s$.



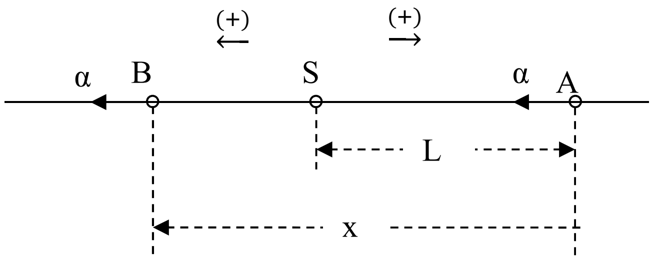
Παράδειγμα 5.19 Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε απόσταση L = 450 m από ακίνητη ηχητική πηγή S, η οποία εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας f_s = 680 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο παρατηρητής αρχίζει να κινείται προς την πηγή κατά μήκος της ευθείας που την ενώνει με αυτήν, με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α = 1 m/s^2.

α. Να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα [0, 20 s].

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό κυμάτων (μετώπων) που συναντάει κατά την κίνησή του, στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

γ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του παρατηρητή από την αρχική του θέση, τη στιγμή που αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα 600 Hz.

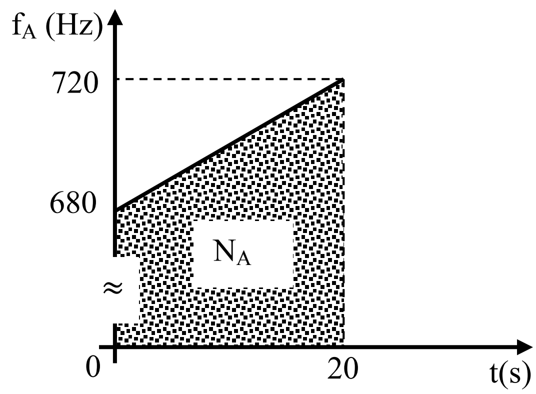
Λύση



Σε 20 s ο παρατηρητής θα έχει μετατοπιστεί από την αρχική του θέση A κατά $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\cdot 1m/s^2 \cdot (20s)^2$ $\Rightarrow \Delta x = 200m < L$. Επομένως τη χρονική στιγμή t = 20 s, ο παρατηρητής θα πλησιάζει ακόμη την πηγή, με ταχύτητα υ_A = at = 1 m/s^2 20 s ⇒ υ_1 = 20 m/s.

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται καθώς πλησιάζει είναι $f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon}f_s \Rightarrow$

$f_A = \left(1+\frac{at}{\upsilon}\right)f_s \overset{(S.I)}{\Longrightarrow} f_A = 680 + \frac{680t}{340} \Rightarrow f_A = 680 + 2t \quad (S.I)$.



Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (0, 680 Hz) και (20 s, 720 Hz).

β. Ο αριθμός των μετώπων που θα συναντήσει ο παρατηρητής κατά την κίνησή του μέχρι τη χρονική στιγμή t = 20 s, υπολογίζεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδό της γραφικής παράστασης συχνότητας – χρόνου. Είναι

N_A = εμβ. τραπεζίου ⇒ $N_A = \frac{(680Hz+720Hz)20s}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow N_A = 14000\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\omega\pi\alpha$.

γ. Είναι $f_A' = 600Hz < f_s$, επομένως ο παρατηρητής θα έχει προσπεράσει την ακίνητη πηγή και θα απομακρύνεται από αυτή. Για τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται θα ισχύει $f_A' = \frac{\upsilon-\alpha t}{\upsilon}f_s \Rightarrow \upsilon - \alpha t = \frac{f_A'}{f_s}\upsilon \Rightarrow t = \frac{\upsilon}{\alpha}\left(1-\frac{f_A'}{f_s}\right) \Rightarrow t = \frac{340m/s}{1m/s^2}\left(1-\frac{600}{680}\right) \Rightarrow t = 40\ s$.

Για τη μετατόπιση ισχύει: $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cdot 1\frac{m}{s^2}\cdot(40s)^2 \Rightarrow x = 800\ m$.

Παράδειγμα 5.20 Ένα διαπασών εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S = 576 *Hz* και κινείται σε οριζόντιο κύκλο ακτίνας R = 10 *m* με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω = 2 *rad/s*. Το αφτί ακίνητου παρατηρητή βρίσκεται στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και σε απόσταση L = 20 *m* από το κέντρο της. Ο παρατηρητής ακούει ήχο του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται από μια ελάχιστη μέχρι μια μέγιστη τιμή.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της ελάχιστης και της μέγιστης συχνότητας που ακούει ο παρατηρητής.

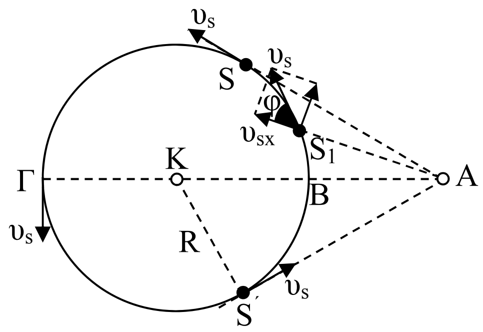
β. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα το οποίο μεσολαβεί από τη στιγμή κατά την οποία το διαπασών διέρχεται από τη θέση από την οποία ο παραγόμενος ήχος φτάνει στο αφτί του παρατηρητή με την ελάχιστη συχνότητα, μέχρι να διέλθει από τη θέση από την οποία ο παραγόμενος ήχος φτάνει στο αφτί του παρατηρητή με τη μέγιστη συχνότητα.

γ. Είναι δυνατό ο παρατηρητής να ακούει κατά τη διάρκεια μιας περιστροφής του διαπασών, ήχο συχνότητας ίσης με αυτή του διαπασών;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Αν το αφτί του παρατηρητή βρίσκεται στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς, ο παρατηρητής θα ακούει ήχο σταθερής ή μεταβλητής συχνότητας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s*.

Λύση



α. Η πηγή εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου $υ_s$ = ω R = 20 m/s. Έστω S_1 μια τυχαία θέση της πηγής. Αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, μία στην ευθεία που AS_1 και μία κάθετη σε αυτή. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής στο Α δίνεται από τη σχέση:

$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_{Sx}} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S συνφ} f_S.$ (5.20.1)

Η σχέση αυτή παίρνει τη μικρότερη τιμή, όταν ο παρανομαστής γίνει μέγιστος, δηλαδή όταν συνφ = 1 ή όταν φ = 0. Αυτό συμβαίνει όταν η $υ_s$ είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, δηλαδή όταν η πηγή βρίσκεται στη θέση S. Στη θέση αυτή η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με τη μέγιστη ταχύτητα. Είναι $f_{A,min} = \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S} f_S = \frac{340 m/s}{340\frac{m}{s}+20\frac{m}{s}} 576 Hz \Rightarrow$

$f_{A,min} = 544\ Hz.$

Αντίστοιχα η συχνότητα θα γίνει μέγιστη όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή με τη μέγιστη ταχύτητά της. Αυτό συμβαίνει όταν στη θέση S΄, για συνφ = -1. Από 5.20.1 έχουμε $f_{A,max} = \frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_S} f_S = \frac{340 m/s}{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}} 576 Hz \Rightarrow f_{A,max} = 612\ Hz.$

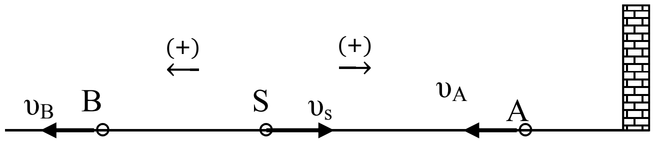
β. Ζητείται ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει η πηγή το τόξο SΓS΄. Το τόξο αυτό αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία Δθ = 2π – SKS΄=2π – 2(AKS΄). Η γωνία θ = AKS΄ υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο KS΄A: συνθ = $\frac{KS'}{KA}$ ⇒ συνθ = $\frac{R}{L} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Άρα Δθ = 2π - $\frac{2\pi}{3}$ ⇒ Δθ = $\frac{4\pi}{3}$. Είναι $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{3} s.$

γ. Για να συμβεί αυτό πρέπει η συνιστώσα της ταχύτητας της πηγής στη διεύθυνση SA να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή η ταχύτητα της πηγής να είναι κάθετη στην ευθεία SA. Αυτό θα συμβαίνει σε δύο θέσεις της πηγής, όταν διέρχεται από τα σημεία Β και Γ. Ο παρατηρητής τότε θα ακούει τον ήχο της πηγής με συχνότητα $f_A = f_s$ = 576 Hz.

δ. Αν ο παρατηρητής βρίσκεται στο κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, τότε ΚΑΘΕ στιγμή η ταχύτητα της πηγής, ως εφαπτόμενη στον κύκλο, θα είναι κάθετη στη ακτίνα του, δηλαδή κάθετη στην ευθεία που την ενώνει με τον παρατηρητή. Τότε ο παρατηρητής θα ακούει ήχο σταθερής συχνότητας 576 Hz.

Παράδειγμα 5.21 Ένα περιπολικό, του οποίου η σειρήνα εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s = 1152 Hz, κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_s$ = 20 m/s σε ευθύγραμμο δρόμο, κατευθυνόμενο προς κατακόρυφο τοίχο. Δύο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται κατά μήκος της ευθείας που τα ενώνει με το περιπολικό, η οποία είναι κάθετη στον τοίχο, με ταχύτητες ίσων μέτρων $υ_A = υ_B$ = 20 m/s, ίδιας κατεύθυνσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε



α. το μήκος κύματος του ήχου που προέρχεται από τη σειρήνα, μπροστά και πίσω από το περιπολικό, όπως το μετράει ο καθένας οδηγός.

β. τις συχνότητες των ήχων με τις οποίες οι οδηγοί των αυτοκινήτων Α και Β αντιλαμβάνονται τον ήχο της σειρήνας του περιπολικού.

γ. τις συχνότητες των ήχων με τις οποίες οι οδηγοί των τριών αυτοκινήτων αντιλαμβάνονται τον ήχο που προέρχεται από την ανάκλαση στον κατακόρυφο τοίχο.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340 m/s.

Λύση

α. Επειδή η πηγή (περιπολικό) κινείται, ο παρατηρητής μετράει διαφορετικό μήκος κύματος για τον ήχο, από αυτό που εκπέμπει η πηγή.

Για το αυτοκίνητο Α που βρίσκεται μπροστά από την πηγή: Από την εξίσωση 5.23 έχουμε: $\lambda_A = \frac{\upsilon-\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \lambda_A = \frac{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}}{1152Hz} \Rightarrow \lambda_A = 0{,}27m$.

Για το αυτοκίνητο Β που βρίσκεται πίσω από την πηγή: Από την εξίσωση 5.24 έχουμε

$\lambda_B' = \frac{\upsilon+\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \lambda_B' = \frac{340\frac{m}{s}+20\frac{m}{s}}{1152Hz} \Rightarrow \lambda_B' = 0{,}31m = \lambda_B$.

β. Από 5.26 $f_A = \frac{\upsilon-(-\upsilon_A)}{\upsilon-(+\upsilon_S)} f_s \Rightarrow f_A = \frac{340\frac{m}{s}+20\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}} 1152Hz \Rightarrow f_A = 1296Hz$.

και $f_B = \frac{\upsilon-(+\upsilon_B)}{\upsilon-(-\upsilon_S)} f_s \Rightarrow f_B = \frac{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s}+20\frac{m}{s}} 1152Hz \Rightarrow f_B = 1024Hz$.

γ. Η συχνότητα του ήχου που «αντιλαμβάνεται» ο τοίχος είναι $f_s' = \frac{\upsilon-0}{\upsilon-(+\upsilon_S)} f_s \Rightarrow$

$f_s' = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}} 1152Hz \Rightarrow f_s' = 1224Hz$. Τον ήχο αυτό τον ανακλά με την ίδια συχνότητα f_s'.

Η θετική φορά είναι από τον τοίχο (πηγή) προς τα αυτοκίνητα.

- Ο οδηγός του περιπολικού αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα $f_\pi = \frac{\upsilon-(-\upsilon_S)}{\upsilon-0} f_S'$.

$\Rightarrow f_\pi = \frac{340\frac{m}{s}+20\frac{m}{s}}{340\ m/s} 1224Hz \Rightarrow f_\pi = 1296Hz$.

- Ο οδηγός του αυτοκινήτου Α αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα $f_A' = \frac{\upsilon-(+\upsilon_A)}{\upsilon-0} f_S' \Rightarrow$

$f_A' = \frac{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s}} 1224Hz \Rightarrow f_A' = 1152Hz$.

•Ο οδηγός του αυτοκινήτου Β αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα $f_B' = \frac{\upsilon-(+\upsilon_B)}{\upsilon-0} f_S' \Rightarrow$ $f_B' = \frac{340\frac{m}{s}-20\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s}} 1224Hz \Rightarrow f_B' = 1152Hz$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*

5.134. Το φαινόμενο Doppler ισχύει

α. μόνο για μηχανικά κύματα.
β. μόνο για ηχητικά κύματα.
γ. μόνο για ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
δ. για όλα τα κύματα.

5.135. Το φαινόμενο Doppler εμφανίζεται κάθε φορά που

α. μια ηχητική πηγή εκπέμπει συνεχή ήχο με διαφορετικές συχνότητες.
β. μια ηχητική πηγή και ένας παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση.
γ. ένας παρατηρητής ακούει αυξομειώσεις της έντασης του ήχου που εκπέμπεται από μια ηχητική πηγή.
δ. γίνεται σύνθεση δύο ηχητικών κυμάτων.

5.136. Ένας παρατηρητής κινείται στην ευθεία που τον ενώνει με ακίνητη πηγή ήχου, απομακρυνόμενος από αυτήν με ταχύτητα 0,25 υ, όπου υ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Αν η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή είναι f, τότε η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

α. 0,25 f. **β.** 0,75 f. **γ.** 1,25 f. **δ.** 1,75 f.

5.137. Στο φαινόμενο Doppler όταν ένας παρατηρητής απομακρύνεται με ταχύτητα υ_A από μια ακίνητη ηχητική πηγή τότε

α. η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα είναι υ και ως προς τον παρατηρητή $\upsilon - \upsilon_A$.
β. η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα είναι υ και ως προς τον παρατηρητή $\upsilon + \upsilon_A$.
γ. αντιλαμβάνεται ήχο με μήκος κύματος μεγαλύτερο από αυτό που παράγει η πηγή.
δ. αντιλαμβάνεται ήχο με μήκος κύματος μικρότερο από αυτό που παράγει η πηγή.

5.138. Ηχητική πηγή πλησιάζει ακίνητο παρατηρητή. Αν η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχει μια μεταβολή 20% σε σχέση με τον ήχο που εκπέμπει η πηγή, η ταχύτητά της πηγής σε σχέση με την ταχύτητα του ήχου υ είναι:

α. $\frac{\upsilon}{4}$ **β.** $\frac{\upsilon}{6}$ **γ.** $\frac{\upsilon}{5}$ **δ.** $\frac{\upsilon}{3}$

5.139. Πηγή πλησιάζει ακίνητο παρατηρητή παράγοντας ήχο συχνότητας f_S.

α. Ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας.
β. Ο παρατηρητής ακούει βαρύτερο ήχο.
γ. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται περισσότερα κύματα απ' αυτά που στον ίδιο χρόνο παράγει η πηγή.
δ. Το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερο απ' το μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή.

5.140. Παρατηρητής πλησιάζει ακίνητη πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S.

α. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μεγαλύτερο μήκος κύματος σε σχέση με αυτό που εκπέμπει η πηγή.

β. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μικρότερο μήκος κύματος σε σχέση με αυτό που εκπέμπει η πηγή.

γ. Ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας.

δ. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται λιγότερα πυκνώματα ήχου απ' αυτά που εκπέμπει η πηγή στον ίδιο χρόνο.

5.141. Ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων κινείται προς ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα μέτρου 0,25 υ, στη διεύθυνση της ευθείας που τον ενώνει με την πηγή. (υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα).

Α. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου όπως την μετράει ο ανιχνευτής έχει μέτρο

α. 1,25 υ. **β.** υ. **γ.** 0,75 υ. **δ.** 0,25 υ.

Β. Αν f_s είναι η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή και f_A η συχνότητα που μετράει ο ανιχνευτής, τότε ισχύει

α. $f_A = 1{,}25\ f_s$. **β.** $f_A = f_s$. **γ.** $f_A = 0{,}75\ f_s$. **δ.** $f_A = 0{,}25\ f_s$.

5.142. Μια ακίνητη ηχητική πηγή παράγει ήχο συχνότητας 100 Hz. Ένας παρατηρητής, πλησιάζει την πηγή με σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Τα μέγιστα του ήχου που φτάνουν σε σ' αυτόν, ανά μονάδα χρόνου, είναι

α. ακριβώς 100. **β.** περισσότερα από 100.

γ. λιγότερα από 100. **δ.** ακέραιο πολλαπλάσιο του 100.

5.143. Ένας παρατηρητής κινείται κατά μήκος της ευθείας που τον ενώνει με ακίνητη πηγή ήχου. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο της πηγής με διπλάσια συχνότητα από αυτήν με την οποία τον εκπέμπει η πηγή. Αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ, τότε ο παρατηρητής

α. πλησιάζει την πηγή με ταχύτητα υ.

β. πλησιάζει την πηγή με ταχύτητα 2υ.

γ. απομακρύνεται από την πηγή με ταχύτητα υ.

δ. απομακρύνεται από την πηγή με ταχύτητα 2υ.

5.144. Μια ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα $υ_s$ και ένας παρατηρητής την ακολουθεί με ταχύτητα $υ_A$. Αν λ είναι το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή και $λ_A$ το μήκος κύματος όπως το αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, τότε

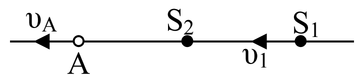
α. $λ_A < λ$. **β.** $λ_A = λ$.

γ. $λ_A > λ$. **δ.** $λ_A = λ$ αν $υ_s = υ_A$.

5.145. Ένα επιβατικό αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_A$ σε ευθύγραμμο δρόμο και ένα ασθενοφόρο το ακολουθεί, με σταθερή ταχύτητα $υ_s$. Η σειρήνα του ασθενοφόρου εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s, ο οποίος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα υ. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του επιβατικού, είναι

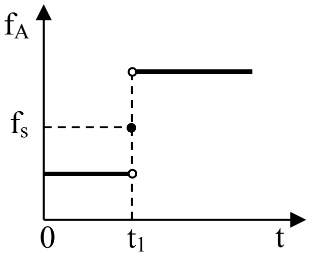
α. $f_A = \frac{υ-υ_A}{υ-υ_s} f_s$. **β.** $f_A = \frac{υ+υ_A}{υ-υ_s} f_s$ **γ.** $f_A = \frac{υ-υ_A}{υ+υ_s} f_s$. **δ.** $f_A = \frac{υ+υ_A}{υ+υ_s} f_s$

5.146. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ηχητικές πηγές S_1 και S_2, οι οποίες εκπέμπουν κύματα ίδιου πλάτους και συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, καθώς και ένας παρατηρητής Α, στον οποίο φτάνουν τα κύματα και από τις δύο πηγές. Η πηγή S_1 κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{6}$, όπου υ η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων στον αέρα, η πηγή S_2 είναι ακίνητη και ο παρατηρητής Α κινείται με ταχύτητα υ_A, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ηχητικά κύματα μίας μόνο συχνότητας. Αυτό συμβαίνει αν οι συχνότητες f_1 και f_2 ικανοποιούν τη σχέση

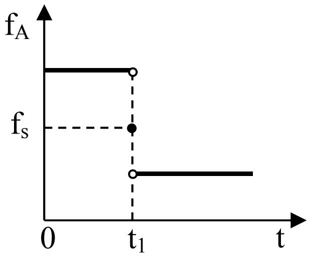


α. $f_2 = 0{,}8\ f_1$. **β.** $f_2 = 1{,}2\ f_1$. **γ.** $f_2 = 1{,}6\ f_1$. **δ.** $f_2 = 3{,}4\ f_1$.

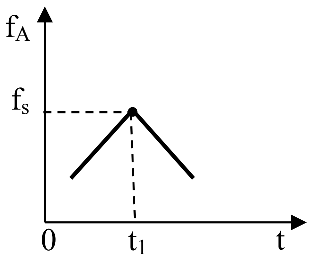
5.147. Μια αμαξοστοιχία, της οποίας η σειρήνα εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας f_s, πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα προς έναν ακίνητο παρατηρητή στην αποβάθρα του σταθμού, τον προσπερνάει τη χρονική στιγμή t_1 και απομακρύνεται από αυτόν. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αποδίδει καλύτερα τη συχνότητα του ήχου της σειρήνας του τρένου όπως την αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής;



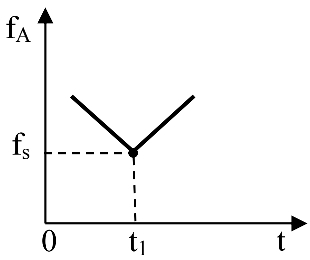
α.



β.



γ.



δ.

5.148. Το φαινόμενο Doppler χρησιμοποιείται από τους αστρονόμους για την προσεγγιστική μέτρηση της ταχύτητας ενός άστρου. Όταν το άστρο (φωτεινή πηγή) πλησιάζει προς τη Γη, η συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας που αντιλαμβανόμαστε

α. ελαττώνεται. με αποτέλεσμα να έχουμε μετατόπισή της προς το ερυθρό.
β. αυξάνεται, με αποτέλεσμα να έχουμε μετατόπισή της προς το ερυθρό.
γ. ελαττώνεται, με αποτέλεσμα να έχουμε μετατόπισή της προς το ιώδες.
δ. αυξάνεται, με αποτέλεσμα να έχουμε μετατόπισή της προς το ιώδες.

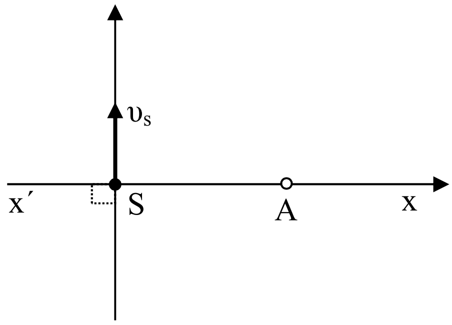
5.149. Το σύστημα sonar σε ένα πλοίο, είναι μια πηγή ήχου σταθερής συχνότητας, ο οποίος εκπέμπεται από το πλοίο και επιστρέφει μετά από ανάκλαση σε εμπόδιο. Το sonar ενός αλιευτικού, που κινείται με σταθερή ταχύτητα, εντόπισε μια φάλαινα. Η συχνότητα του ανακλώμενου στη φάλαινα ήχου, ήταν ίδια με αυτήν του εκπεμπόμενου ήχου. Επομένως η φάλαινα

α. απομακρυνόταν από το πλοίο.
β. πλησίαζε το πλοίο.
γ. ήταν ακίνητη σε σχέση με το βυθό.
δ. ήταν ακίνητη σε σχέση με το πλοίο.

5.150. Μια πηγή αρμονικού ήχου κινείται με σταθερή ταχύτητα προς έναν ακίνητο παρατηρητή, τον προσπερνά και απομακρύνεται από αυτόν. Ο λόγος της συχνότητας του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, όταν τον πλησιάζει η πηγή, προς τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται όταν απομακρύνεται η πηγή από αυτόν, είναι

α. $\frac{9}{8}$. **β.** $\frac{8}{9}$. **γ.** $\frac{1}{1}$. **δ.** $\frac{9}{10}$.

5.151. Ένας παρατηρητής Α είναι ακίνητος σε ένα σημείο του προσανατολισμένου άξονα x΄x. Μια πηγή S κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_s$ κάθετα προς τον άξονα x΄x, εκπέμποντας ήχο συχνότητας f_s. Τη στιγμή κατά την οποία η πηγή βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x, η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής



α. είναι $f_A = 0$.
β. είναι $f_A = f_s$.
γ. εξαρτάται από την ταχύτητα $υ_s$ της πηγής.
δ. εξαρτάται από την απόσταση της πηγής από τον παρατηρητή.

5.152. Ένας παρατηρητής και μία ηχητική πηγή κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις σε παράλληλες τροχιές, που βρίσκονται σε αρκετή απόσταση μεταξύ τους. Τη στιγμή που βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση, ο παρατηρητής

α. ακούει ήχο ίδιας συχνότητας με αυτήν που εκπέμπει η πηγή.
β. ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας.
γ. ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας.
δ. δεν ακούει τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

<u>Οδηγία:</u> Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

5.153. Όταν καθόμαστε στην αποβάθρα του σταθμού και πλησιάζει ένα τρένο σφυρίζοντας, τότε ο ήχος της σειρήνας που ακούμε,

α. έχει μεγαλύτερη συχνότητα από αυτήν που εκπέμπεται.

β. αντιλαμβανόμαστε να διαδίδεται με ταχύτητα ίδια με αυτήν που διαδίδεται ως προς τον ακίνητο αέρα.

γ. έχει συχνότητα μικρότερη από αυτή με την οποία εκπέμπεται.

δ. έχει μικρότερο μήκος κύματος από αυτό με το οποίο εκπέμπεται.

5.154. Μια σειρήνα εκπέμπει ήχο 300 *Hz*. Ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας 274 *Hz*. Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν:

α. ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη πηγή.

β. ο παρατηρητής πλησιάζει την ακίνητη πηγή.

γ. η πηγή απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή.

δ. πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους.

ε. παρατηρητής και πηγή πλησιάζουν μεταξύ τους.

5.155. Μια σειρήνα εκπέμπει ήχο 400 *Hz*. Ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο 410 *Hz*. Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν:

α. ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη πηγή.

β. ο παρατηρητής πλησιάζει την ακίνητη πηγή.

γ. η πηγή πλησιάζει τον ακίνητο παρατηρητή.

δ. πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους.

ε. παρατηρητής και πηγή πλησιάζουν μεταξύ τους.

5.156. Ένας ποδηλάτης πλησιάζει και προσπερνά με σταθερή ταχύτητα ένα ακινητοποιημένο αυτοκίνητο, του οποίου η κόρνα σφυρίζει.

α. Όσο ο ποδηλάτης πλησιάζει ακούει ήχο σταθερής συχνότητας, μεγαλύτερης από αυτήν με την οποία εκπέμπεται.

β. Όταν ο ποδηλάτης απομακρύνεται από το αυτοκίνητο, φτάνουν στο αφτί του περισσότερα μέγιστα ανά δευτερόλεπτο , από όσα φτάνουν όταν πλησιάζει.

γ. Όταν ο ποδηλάτης απομακρύνεται από το αυτοκίνητο, φτάνουν στο αφτί του λιγότερα μέγιστα ανά δευτερόλεπτο, από όσα φτάνουν στο αφτί του οδηγού.

δ. Όταν ο ποδηλάτης πλησιάζει, αντιλαμβάνεται τον ήχο να διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα που τον αντιλαμβάνεται και ο οδηγός.

5.157. Ένας μοτοσικλετιστής με ενεργοποιημένη την κόρνα του φτάνει και προσπερνά έναν ακίνητο παρατηρητή.

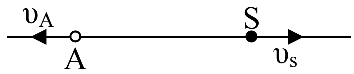
α. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μοτοσικλετιστής όσο πλησιάζει τον παρατηρητή, είναι μικρότερη από αυτή που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

β. Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο μοτοσικλετιστής όταν απομακρύνεται από τον παρατηρητή, είναι μεγαλύτερη από αυτή που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

γ. Ο ήχος διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα για τον μοτοσικλετιστή και τον παρατηρητή.

δ. Ο μοτοσικλετιστής αντιλαμβάνεται τον ήχο με μήκος κύματος μικρότερο από ότι τον αντιλαμβάνεται ο απομακρυνόμενος παρατηρητής.

5.158. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια ηχητική πηγή S και ένας παρατηρητής A που απομακρύνονται μεταξύ τους με σταθερές ταχύτητες ίσων μέτρων $\upsilon_A = \upsilon_s = 0,2\ \upsilon$. Η πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα περιόδου Τ, μήκους κύματος λ και συχνότητας f_s, τα οποία διαδίδονται στον αέρα με ταχύτητα υ.



α. Ο παρατηρητής μετράει ότι τα ηχητικά κύματα φτάνουν σε αυτόν με ταχύτητα μέτρου 0,2 υ.

β. Το μήκος κύματος λ_A των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερο κατά $\upsilon_s T$ από το μήκος κύματος λ.

γ. Το πηλίκο $\frac{T_A}{T}$, όπου T_A η περίοδος των κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, ισούται με 1,5.

δ. Ο αριθμός των κυμάτων που φτάνουν στον παρατηρητή ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που εκπέμπει η πηγή στην ίδια μονάδα χρόνου.

5.159. Ένα ηχητικό κύμα συχνότητας f_1 προσπίπτει σε εμπόδιο και ανακλάται με συχνότητα f_2.

α. Αν το εμπόδιο είναι ακίνητο , τότε $f_1 = f_2$.

β. Αν το εμπόδιο κινείται στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, τότε $f_2 < f_1$.

γ. Αν το εμπόδιο κινείται αντίθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, τότε $f_2 > f_1$.

δ. Ισχύει πάντα $f_2 = f_1$.

5.160. Για το φαινόμενο Doppler στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα γνωρίζουμε ότι

α. δεν παρατηρείται, όταν αυτά διαδίδονται στο κενό, γιατί δεν υπάρχει μέσο διάδοσης για να χρησιμοποιηθεί ως σύστημα αναφοράς μέτρησης των ταχυτήτων.

β. ισχύει έστω και αν μεταξύ πηγής και δέκτη παρεμβάλλεται το κενό.

γ. οι σχέσεις που εξάγονται για τη μετρούμενη συχνότητα, είναι ποιοτικά ίδιες με αυτές που ισχύουν και για τα ηχητικά κύματα.

δ. χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην αστρονομία.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

5.161. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης **Α** με τις σχέσεις της στήλης **Β** που αναφέρονται στη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. πηγή ακίνητη, παρατηρητής που πλησιάζει	**1.** $f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S$
β. παρατηρητής που πλησιάζει, πηγή που απομακρύνεται	**2.** $f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$
γ. παρατηρητής που απομακρύνεται, πηγή που πλησιάζει	**3.** $f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$
δ. πηγή ακίνητη, παρατηρητής που απομακρύνεται	**4.** $f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$
ε. παρατηρητής ακίνητος, πηγή που πλησιάζει	**5.** $f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$
	6. $f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S$

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

5.162. Ένας παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_A, σε σχέση με μια ακίνητη σημειακή πηγή. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα αυξημένη κατά 5% σε σχέση με τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή. Αν υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα, τότε η ταχύτητα του παρατηρητή είναι

α. $\upsilon_A = \frac{\upsilon}{19}$ και πλησιάζει την πηγή. **β.** $\upsilon_A = \frac{\upsilon}{19}$ και απομακρύνεται από την πηγή.

γ. $\upsilon_A = \frac{\upsilon}{20}$ και πλησιάζει την πηγή.

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.163. Μια ηχητική πηγή κινούμενη με ταχύτητα $\upsilon_S = \frac{\upsilon}{20}$ πλησιάζει ακίνητο παρατηρητή. Αν f_s είναι η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή, f_A είναι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, λ είναι το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή, λ_A είναι το μήκος κύματος όπως το αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής και υ είναι η ταχύτητα του ήχου, τότε

α. $f_A = \frac{21}{20} f_S$. **β.** $\lambda_A = \frac{19}{20}\lambda$.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

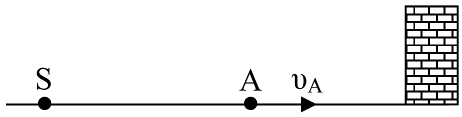
5.164. Μια ηχητική πηγή S κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα υ_1 προς ακίνητο παρατηρητή Α, ο οποίος μετρά συχνότητα για τον ήχο της πηγής f_1. Στη συνέχεια σταματά να κινείται και αρχίζει να κινείται ο παρατηρητής με την ίδια κατά μέτρο και κατεύθυνση ταχύτητα υ_1 που είχε η πηγή, με αποτέλεσμα να μετρά τώρα συχνότητα $f_2 = 0,64\ f_1$. Τα ηχητικά κύματα ταξιδεύουν στον ακίνητο αέρα με ταχύτητα υ.

Η ταχύτητα $υ_1$ έχει μέτρο

α. 0,2 υ. **β.** 0,6 υ. **γ.** 0,8 υ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

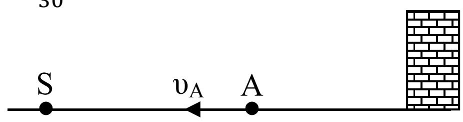
5.165. Ο παρατηρητής Α απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή S με ταχύτητα $υ_A$. Η διαφορά των συχνοτήτων των ήχων που ακούει ο παρατηρητής κατευθείαν από την πηγή και μετά από ανάκλαση στον τοίχο είναι το 3% της συχνότητας του ήχου που εκπέμπει η πηγή. Αν υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα, ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα



α. $υ_A$ = 1,5% υ. **β.** $υ_A$ = 3% υ. **γ.** $υ_A$ = 6% υ.

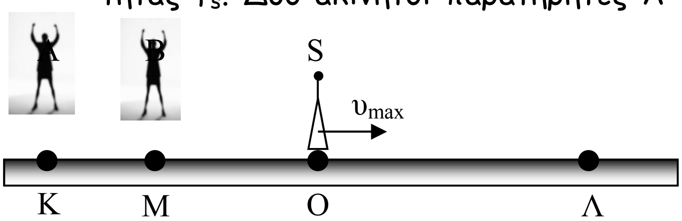
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

5.166. Ο παρατηρητής Α κατευθύνεται με ταχύτητα $υ_A = \frac{υ}{30}$, όπου υ η ταχύτητα του ήχου, προς την ακίνητη πηγή S, η οποία εκπέμπει ήχο μήκους κύματος λ. Η διαφορά των μηκών κύματος των ήχων που ακούει ο παρατηρητής απευθείας από την πηγή και μετά από ανάκλαση στον τοίχο είναι



α. $\frac{λ}{30}$. **β.** $\frac{λ}{15}$. **γ.** 0.

5.167. Η ηχητική πηγή S του σχήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση μεταξύ των σημείων Κ και Λ εκπέμποντας ήχο συχνότητας f_s. Δύο ακίνητοι παρατηρητές Α και Β βρίσκονται στις θέσεις Κ και Μ αντίστοιχα, όπου Μ είναι η θέση από την οποία όταν διέρχεται η πηγή έχει ταχύτητα μέτρου $\frac{υ_{max}}{2}$.



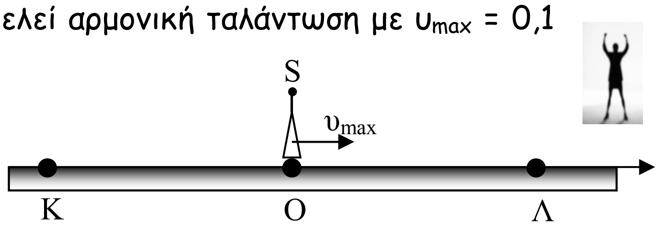
Με ποια ή ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

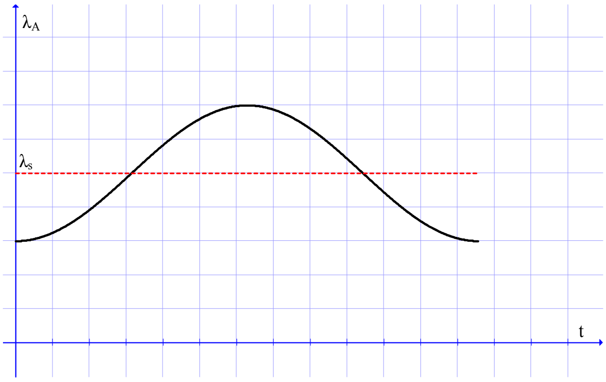
α. Οι μέγιστες συχνότητες των ήχων που αντιλαμβάνονται οι δύο παρατηρητές διαφέρουν μεταξύ τους κατά 0,1 f_s.

β. Οι ελάχιστες συχνότητες των ήχων που αντιλαμβάνονται οι δύο παρατηρητές διαφέρουν μεταξύ τους κατά 0,1 f_s.

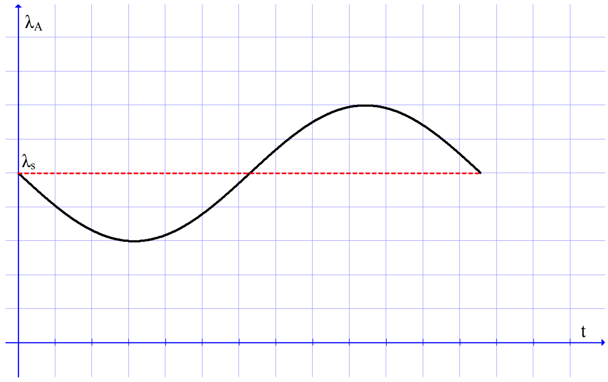
γ. Κάθε στιγμή οι παρατηρητές μετρούν το ίδιο μήκος κύματος για τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.

5.168. Η ηχητική πηγή του σχήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση με $υ_{max}$ = 0,1 υ και εξίσωση απομάκρυνσης x = Αημωt. Ο ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο, του οποίου το μήκος κύματος μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως στο διάγραμμα

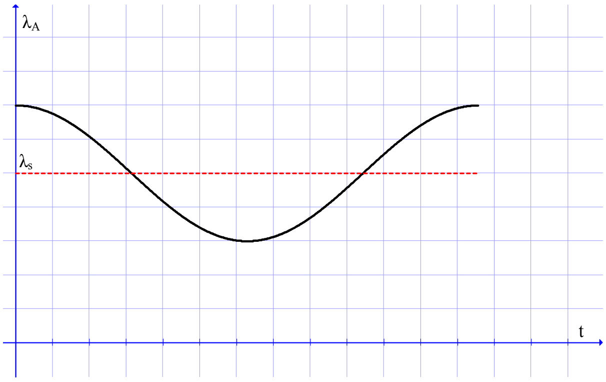




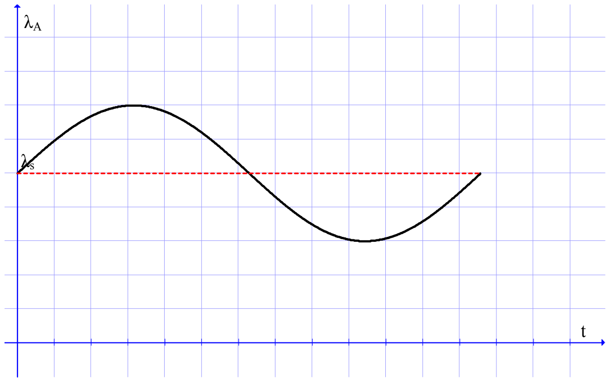
α.



β.



γ.



δ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.169. Μια νυχτερίδα κινούμενη με ταχύτητα $υ_s$ εκπέμπει υπέρηχο συχνότητας f_s, ο οποίος ανακλάται σε ακίνητο εμπόδιο που βρίσκεται μπροστά της και επιστρέφει σε αυτήν. Ο ανακλώμενος υπέρηχος ανιχνεύεται από τη νυχτερίδα με συχνότητα f, όπου

α. $f = \frac{υ+υ_s}{υ-υ_s} f_s$. **β.** $f = \frac{υ-υ_s}{υ+υ_s} f_s$. **γ.** $f = \frac{υ}{υ-υ_s} f_s$.

(υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.170. Ηχητική πηγή εκπέμπει κύματα συχνότητας f_s και κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_s$ πάνω στην ίδια ευθεία που κινείται και ένας ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Αν ο ανιχνευτής κινείται με αντίθετη ταχύτητα από την πηγή, πλησιάζοντας προς αυτήν, τότε μετράει συχνότητα f_1 = 380 Hz, ενώ αν κινείται έχοντας την ίδια ταχύτητα με την πηγή τότε τα ηχητικά κύματα που ανιχνεύει έχουν συχνότητα f_2, που διαφέρει από την f_1 κατά 80Hz. Η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων στον αέρα είναι υ = 340 m/s.

Α. Το μέτρο της ταχύτητας της πηγής ισούται με

α. 40 m/s. **β.** 85 m/s. **γ.** 68 m/s.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Η ηχητική πηγή εκπέμπει ήχο για χρονικό διάστημα 3,8 s. Αν ο ανιχνευτής κινείται με αντίθετη ταχύτητα από την πηγή, πλησιάζοντας προς αυτήν, τότε ανιχνεύει ήχο για χρονικό διάστημα

α. 1,2 s. **β.** 4 s. **γ.** 3 s.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.171. Δύο ηχητικές πηγές S_1 και S_2, εκπέμπουν κύματα με ίσες συχνότητες f_s και βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ακίνητου παρατηρητή, ο οποίος ακούει ήχο και από τις δύο πηγές. Η πηγή S_1 είναι ακίνητη, ενώ η πηγή S_2 κινείται προς τον παρατηρητή πάνω στην ευθεία που ενώνει τις 2 πηγές με τον παρατηρητή, με ταχύτητα μέτρου $\frac{\upsilon}{25}$, όπου υ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Η διαφορά των δύο συχνοτήτων που ακούει ο παρατηρητής από τις πηγές είναι

α. $\frac{f_s}{24}$. **β.** $\frac{f_s}{25}$. **γ.** $\frac{f_s}{26}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.172. Σφαιρικός φλοιός μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή κινητική ενέργεια. Στο κέντρο μάζας του φλοιού έχουμε προσαρμόσει μικρή ηχητική πηγή αμελητέας μάζας, η οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα συχνότητας f_s και μήκους κύματος λ. Σε ένα σημείο Α της ευθείας στην οποία κινείται το κέντρο μάζας του φλοιού, υπάρχει ακίνητος ανιχνευτής κυμάτων που λαμβάνει τα κύματα που εκπέμπει η πηγή με συχνότητα $f_1 = 1{,}2\ f_s$. Η ροπή αδράνειας του σφαιρικού φλοιού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{2}{3}MR^2$, ενώ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ.

Α. Το μήκος κύματος λ_A του ήχου που μετράει ο ανιχνευτής είναι

α. $\frac{11\lambda}{6}$. **β.** $\frac{7\lambda}{6}$. **γ.** $\frac{5\lambda}{6}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Η κινητική ενέργεια του σφαιρικού φλοιού υπολογίζεται από τη σχέση

α. $K = \frac{5}{216}M\upsilon^2$. **β.** $K = \frac{9}{216}M\upsilon^2$. **γ.** $K = \frac{1}{72}M\upsilon^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

5.173. Όταν μια ηχητική πηγή S και ένας παρατηρητής είναι ακίνητοι ως προς το έδαφος και επικρατεί άπνοια, ο παρατηρητής καταγράφει τη συχνότητα f_s της πηγής. Πως θα μεταβληθεί η συχνότητα που μετράει ο παρατηρητής όταν φυσάει άνεμος με σταθερή ταχύτητα υ_a και με κατεύθυνση από

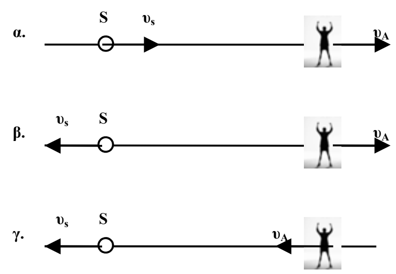
α. την πηγή προς τον παρατηρητή;

β. τον παρατηρητή προς την πηγή;

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

5.174. Ένας παρατηρητής πλησιάζει ακίνητη πηγή εκπομπής ήχου με ταχύτητα $\upsilon_1 = 60$ *m/s* και τότε αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_1. Η ίδια πηγή πλησιάζει ακίνητο παρατηρητή κινούμενη με ταχύτητα $\upsilon_S = 100$ *m/s*. Αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 *m/s* να βρείτε το λόγο $\frac{f_1}{f_2}$ όπου f_2 η συχνότητα με την οποία αντιλαμβάνεται τον ήχο ο ακίνητος παρατηρητής στη δεύτερη περίπτωση. [Απ. 0,83]

5.175. Στα διπλανά σχήματα δίνονται $υ_S$ = 80 *m/s* και f_S = 400 *Hz*. Αν $υ_A$ = 50 *m/s*, ποια είναι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε κάθε μια από τις περιπτώσεις; Δίνεται $υ_{ήχου}$ = 340 *m/s*.
[Απ. α. 446 *Hz*, β. 276 *Hz*, γ. 371 *Hz*]



5.176. Ακίνητη πηγή παράγει ήχο συχνότητας f_S = 1000 *Hz*. Παρατηρητής Α κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_A$ = 170 *m/s* απομακρυνόμενος από την πηγή. Αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s,* να βρείτε τον αριθμό των κυμάτων που εκπέμπει η πηγή σε χρόνο t = 5 *s*, αλλά και τον αριθμό των κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής στον ίδιο χρόνο. [Απ. 5000, 2500]

5.177. Ένα τρένο πλησιάζει το σταθμό με σταθερή ταχύτητα και η σφυρίχτρα του εκπέμπει ήχο συχνότητας 450 *Hz* για χρονικό διάστημα $Δt_S$. Ακίνητος παρατηρητής βρίσκεται στο σταθμό και αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα 510 *Hz* για χρονικό διάστημα $Δt_A$ = 25,5 *s*. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας του τρένου.

β. Το χρονικό διάστημα $Δt_S$ κατά το οποίο η σφυρίχτρα του τρένου εξέπεμψε τον ήχο. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s*.
[Απ. α. 40 *m/s* β. 28,9 *s*]

5.178. Ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα $υ_S$ = 30 *m/s* και εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S = 300 *Hz*. Να βρείτε τη συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ο οποίος

α. πλησιάζει την πηγή κινούμενος με ταχύτητα $υ_A$ = 10 *m/s* αντίρροπη της ταχύτητας της πηγής.

β. απομακρύνεται από την πηγή κινούμενος με ταχύτητα $υ_A$ = 20 *m/s* αντίρροπη της ταχύτητας της πηγής. Δίνεται: $υ_{ήχου}$ = 340 *m/s*. [Απ. α. 338,7 *Hz*, β. 259,46 *Hz*]

5.179. Μια ηχητική πηγή , που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S = 400 *Hz*, περνά μπροστά από έναν ακίνητο παρατηρητή κινούμενη με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_S$ = 40 *m/s*. Να βρείτε τη διαφορά ανάμεσα στις συχνότητες του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν η πηγή τον πλησιάζει και όταν απομακρύνεται από αυτόν. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s*. [Απ. 95,4 *Hz*]

5.180. Δύο μοτοσικλετιστές Α και Β κινούνται στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο προς την ίδια κατεύθυνση με σταθερές ταχύτητες μέτρου $υ_A = υ_B$ = 50 *m/s*. Οι κόρνες των δύο μοτοσικλετών εκπέμπουν ήχο συχνότητας f_S = 350 *Hz.*

α. Αν ο μοτοσικλετιστής Β πατήσει την κόρνα, τι συχνότητα έχει ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο Α;

β. Αν ο μοτοσικλετιστής Α πατήσει την κόρνα, τι συχνότητα έχει ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο Β;

γ. Να υπολογίσετε τις παραπάνω συχνότητες όταν ο μοτοσικλετιστής Β κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ'_B = 60\, m/s$.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s*.
[Απ. α. 350 *Hz*, β. 350 *Hz,* γ. 338 *Hz*, 341 *Hz*]

5.181. Ένας παρατηρητής Α βρίσκεται σε απόσταση ΑΚ = 510 *m* από μια ευθύγραμμη σιδηροδρομική γραμμή και ακούει τον ήχο της σφυρίχτρας του τρένου, το οποίο πλησιάζει το σημείο Κ με σταθερή ταχύτητα 72 *km/h*. Η σφυρίχτρα του τρένου εκπέμπει ένα σύντομο ήχο συχνότητας 405 *Hz*. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ότι η συχνότητα του ήχου την οποία εξέπεμψε το τρένο είναι 425 *Hz*.
Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του τρένου από το σημείο Κ τη στιγμή κατά την οποία εκπέμπεται ο ήχος αυτός και τη στιγμή που τον ακούει ο παρατηρητής. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο υ = 340 *m/s*. [Απ. 680 *m*, 630 *m*]

5.182. Μικρό σώμα μάζας m_1 = 4 kg, το οποίο δρα και ως πηγή ηχητικών κυμάτων συχνότητας f_s = 330 Hz, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 30 m/s και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μικρό σώμα μάζας m_2 ($m_2 < m_1$), που είναι ακίνητο. Στη συνέχεια το σώμα μάζας m_2 κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_3, στο οποίο έχουμε προσαρμόσει ανιχνευτή ηχητικών κυμάτων αμελητέας μάζας. Μετά την κρούση του σώματος μάζας m_1 και του σώματος μάζας m_2 ο ανιχνευτής μετρά συχνότητα ηχητικών κυμάτων f_1 = 340 Hz, ενώ μετά την κρούση των σωμάτων μάζας m_2 και m_3, μετρά την ίδια συχνότητα με τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή. Να υπολογίσετε

α. τη μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_1, εξαιτίας της κρούσης με το m_2.
β. τη μάζα m_2.
γ. το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος που δημιουργήθηκε.
δ. το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος m_1 που μετατράπηκε σε θερμική εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα υ = 340 m/s.
[Απ. α. – 80 kg m/s, β. 2 kg, γ. 80 kg m/s, δ. 66,67%]

5.183. Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και ύψους h = 1,2 m, αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί έναν ομογενή δίσκο μάζας Μ = 2 kg και ακτίνας R = 0,2 m, στο κέντρο μάζας του οποίου έχουμε προσαρμόσει μικρό ανιχνευτή ηχητικών κυμάτων αμελητέας μάζας. Μια πηγή ηχητικών κυμάτων εκπέμπει κύματα με συχνότητα f_s και βρίσκεται ακίνητη στη βάση του πλάγιου επιπέδου στην ευθεία που είναι παράλληλη στο πλάγιο επίπεδο και διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου. Ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ελάχιστα πριν φτάσει στη βάση του επιπέδου ο ανιχνευτής μετρά συχνότητα f_A = 688 Hz.
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.
β. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f_s.
γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συχνότητας που μετρά ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες, από τη χρονική στιγμή t = 0 που αφέθηκε ελεύθερος ο δίσκος, ως τη στιγμή που φτάνει στη βάση του επιπέδου.

δ. Να υπολογίσετε τη συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που μετρά ο ανιχνευτής τη χρονική στιγμή που το μέτρο της στροφορμής του δίσκου είναι 0,2 kg m^2/s.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}MR^2$, η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340 m/s, η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 και ημφ = 0,3. [Απ. α. 2 m/s^2, β. 680 Hz, δ. 682 Hz]

5.184. Σώμα μάζας m = 1 kg, το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο T = 2 s και πλάτος A, αποτελεί πηγή αρμονικών κυμάτων συχνότητας f_s = 682,5 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά τη θετική κατεύθυνση, ενώ όταν διέρχεται από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$ η κινητική του ενέργεια είναι K = 0,6 J.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος.

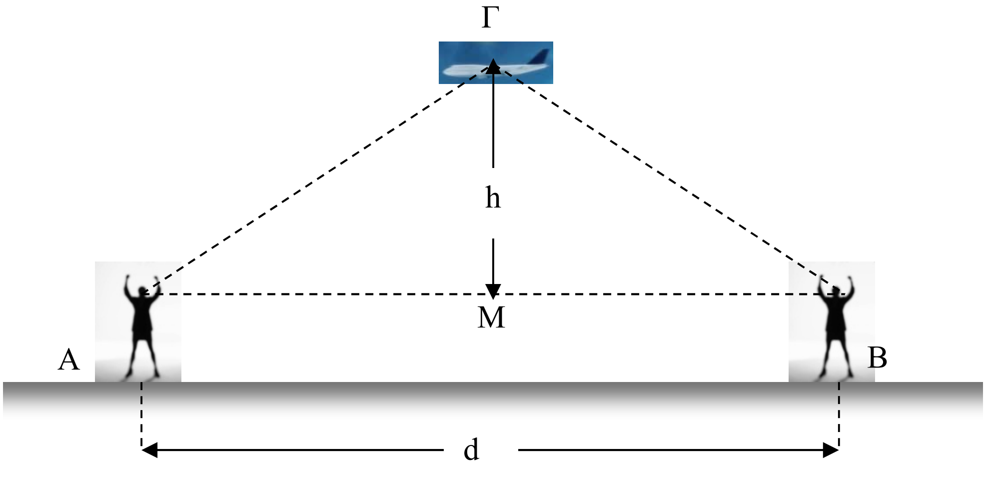
β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Ένας παρατηρητής πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα $υ_A$ προς το σώμα, κινούμενος στη διεύθυνση της ταλάντωσης του σώματος και έχοντας το αφτί του στην προέκταση της ευθείας πάνω στην οποία ταλαντώνεται το σώμα. Αν η μικρότερη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι f_{min} = 700 Hz, να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ_A$.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340 m/s και π^2 = 10.

[Απ. α. 0,4 m, β. $υ_s$ = 0,4π συνπt (S.I), γ. 10 m/s]

5.185. Ένα αεροπλάνο, πετά οριζόντια με σταθερή ταχύτητα $υ_s$ = 100 m/s και σε ύψος h = 800 m από το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από τα αφτιά δύο παρατηρητών A και B. Η απόσταση μεταξύ των παρατηρητών, οι οποίοι βρίσκονται στο έδαφος είναι d = 1200 m. Το αεροπλάνο τη στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το



σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη της απόστασης d, εκπέμπει ήχο μικρής διάρκειας συχνότητας f_s = 840 Hz. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου την οποία αντιλαμβάνονται οι παρατηρητές A και B. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα υ = 340 m/s. [Απ. 714 Hz, 1020 Hz]

5.186. Πηγή S αρμονικών κυμάτων κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα σταθερού μέτρου $υ_s$ = 40 m/s πλησιάζοντας παρατηρητή Α. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι f_A = 340 Hz, όταν είναι ακίνητος.

α. Πόσο είναι το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, αν
i. είναι ακίνητος και ii. κινείται με ταχύτητα αντίθετη από αυτήν της πηγής.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό των κυμάτων που περιέχονται μεταξύ πηγής και παρατηρητή, τη στιγμή t = 0 κατά την οποία η απόσταση της πηγής από τον ακίνητο παρατηρητή είναι d = 600 m.

γ. Να υπολογίσετε το χρονικό ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται ο αριθμός των κυμάτων καθώς η πηγή πλησιάζει τον ακίνητο παρατηρητή.

δ. Να παραστήσετε γραφικά, σε συνάρτηση με το χρόνο, τον αριθμό των κυμάτων τα οποία περιέχονται μεταξύ πηγής και ακίνητου παρατηρητή, καθώς η πηγή τον πλησιάζει. Από το διάγραμμα να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου της πηγής και να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με χρήση της κατάλληλης εξίσωσης που περιγράφει το φαινόμενο. Doppler.

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ = 340 m/s.

[Απ. α. 1 m, β. 600, γ. – 40 s^{-1}, δ. $N = 2f_s - \frac{2}{15}f_S t\ (S.I.), 0 \le t \le \frac{d}{\upsilon}$, f_s = 300 Hz]

5.187. *Σημειακή πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας 448 Hz. Η πηγή αφήνεται ελεύθερη να πέσει από ύψος 80 m πάνω από το αφτί ακίνητου παρατηρητή. Να υπολογίσετε τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής

α. για τον ήχο που εκπέμφθηκε 2 s πριν η πηγή φτάσει στο αφτί του.

β. για τον ήχο που φτάνει στο αφτί του, 2 s πριν φτάσει και η πηγή.

Δίνονται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340 m/s, η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 και ότι οι λύσεις της εξίσωσης x^2 - 68x + 120 = 0 είναι x_1 = 1,813 και x_2 = 66,187. [Απ. α. 476 Hz β. 473,24 Hz]

5.188. ** ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER ΣΤΟ ΦΩΣ

Όταν μια πηγή μονοχρωματικού φωτός κινείται σχετικά με κάποιον παρατηρητή, με σχετική ως προς αυτόν ταχύτητα υ, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται για το φως διαφορετική συχνότητα από τη συχνότητα με την οποία εκπέμπει το φως αυτό η πηγή.

Όταν η πηγή κινείται στην ευθεία που την ενώνει με τον παρατηρητή (διάμηκες φαινόμενο Doppler), τότε η συχνότητα που μετρά ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση

$f_A = f_S\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$, όπου με υ συμβολίζουμε τη σχετική ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή και είναι υ > 0 όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή και υ < 0 όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή.

Ένα διαστημόπλοιο που απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα υ = 0,2 c, (c = 3x10^8 m/s, είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό) εκπέμπει φως με μήκος κύματος 500 nm. Πόσο μήκος κύματος μετρούν οι γήινοι παρατηρητές; [Απ. 612,37 nm]

Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο

Μονωμένο σύστημα $\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$

Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2$

Σχέση ταχυτήτων: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$

Αλγεβρική τιμή ταχύτητας του m_1: $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2$

Αλγεβρική τιμή ταχύτητας του m_2: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2.$

Αλγεβρική τιμή ταχύτητας του αρχικά κινούμενου m_1: $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Αλγεβρική τιμή ταχύτητας του αρχικά ακίνητου m_2: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Με ίσες μάζες ($m_1 = m_2$): $\upsilon_1' = \upsilon_2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \upsilon_2' = \upsilon_1$

Αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων κατά την κρούση του

κινούμενου m_1 με αρχικά ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας: $\upsilon_1' = -\upsilon_1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \upsilon_2' = 0$

ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΗΜΙΕΛΑΣΤΙΚΗ

Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$

Απώλεια Μηχανικής Ενέργειας: $Q = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \left[\frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2\right]$

ΠΛΑΣΤΙΚΗ

Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$

Απώλεια Μηχανικής Ενέργειας: $Q = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2$

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

(Θετική η φορά της $\upsilon_{\eta\chi}$ (S → A))

Μήκος κύματος: $\lambda_A = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{f_s}$

Συχνότητα: $f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_s}f_s$

Ταχύτητα κύματος για τον παρατηρητή: $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \upsilon - \upsilon_A$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	
$\eta\mu x = \eta\mu\theta \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \qquad\qquad k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \theta \end{array} \right.$	$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \qquad\qquad k \in Z \\ x = 2k\pi - \theta \end{array} \right.$
$\sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\lvert\eta\mu x\rvert = 1 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$\eta\mu x = 0$ ή $\lvert\sigma\upsilon\nu x\rvert = 1 \rightarrow x = k\pi,\ k \in Z$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \rightarrow x = k\pi + \theta \qquad k \in Z$	$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \rightarrow x = k\pi + \theta \qquad k \in Z$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί	**ημθ**	**συνθ**	**εφθ**	**σφθ**
ημθ	——	$\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}$	$\frac{\varepsilon\varphi\theta}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\theta}}$
συνθ	$\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}$	——	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}$	$\frac{\sigma\varphi\theta}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2\theta}}$
εφθ	$\frac{\eta\mu\theta}{\pm\sqrt{1+\eta\mu^2\theta}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	——	$\frac{1}{\sigma\varphi\theta}$
σφθ	$\frac{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}{\eta\mu\theta}$	$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\pm\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}}$	$\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$	——

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ	
$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$	$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$
$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$	$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ	
$\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\theta$
$\varepsilon\varphi 2\theta = \frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi^2\theta}$	$\sigma\varphi 2\theta = \frac{\sigma\varphi^2\theta - 1}{2\sigma\varphi\theta} = \frac{\sigma\varphi\theta - \varepsilon\varphi\theta}{2}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ	
$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$	$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$
$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$	$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B-A}{2}$
$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B}$	$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ	
$\eta\mu A\cdot\eta\mu B = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)\right]$	$\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(A+B) + \sigma\upsilon\nu(A-B)\right]$

ημ(2kπ+α) = ημα συν(2kπ+α) = συνα	ημ(2kπ-α) =- ημα συν(2kπ-α) = συνα
ημ(-α) =- ημα συν(-α) = συνα	$ημ\left(\frac{π}{2}-α\right)$ = συνα $συν\left(\frac{π}{2}-α\right)$ = ημα
ημ(π – α) = ημα συν(π – α) = - συνα	$ημ\left(\frac{π}{2}+α\right)$ = συνα $συν\left(\frac{π}{2}+α\right)$ = - ημα
ημ(π + α) = - ημα συν(π + α) = - συνα	$ημ\left(\frac{3π}{2}-α\right)$ = - συνα $συν\left(\frac{3π}{2}-α\right)$ = - ημα
	$ημ\left(\frac{3π}{2}+α\right)$ = - συνα $συν\left(\frac{3π}{2}+α\right)$ = ημα

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

	0	**30^0** $\frac{\pi}{6}$	**45^0** $\frac{\pi}{4}$	**60^0** $\frac{\pi}{3}$	**90^0** $\frac{\pi}{2}$	**120^0** $\frac{2\pi}{3}$	**135^0** $\frac{3\pi}{4}$	**150^0** $\frac{5\pi}{6}$	**180^0** π
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0