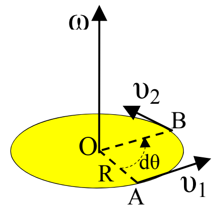
4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

§4.1. Εισαγωγικές έννοιες.

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Θεωρούμε ένα σημειακό αντικείμενο το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά κέντρου O και ακτίνας R. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση A και τη χρονική στιγμή t + dt βρίσκεται στη θέση B, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 1. Επομένως στο χρονικό διάστημα dt η επιβατική ακτίνα (η ακτίνα του κύκλου που ακολουθεί το κινητό, η OA στο σχήμα) έχει διαγράψει μια επίκεντρη γωνία dθ και το σημειακό αντικείμενο έχει διανύσει το τόξο AB μήκους ds.



Σχ. 1

ΤΑΧΥΤΗΤΑ υ (ή γραμμική ταχύτητα) στην κυκλική κίνηση ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, φορά της κίνησης και μέτρο το ρυθμό μεταβολής του μήκους του τόξου που διανύει:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \qquad (4.1)$$

Μονάδα μέτρησης της ταχύτητας στο S.I. είναι το 1 *m/s*.

ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ω στην κυκλική κίνηση ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (Σχ. 1) και μέτρο τον ρυθμό μεταβολής της επίκεντρης γωνίας που διαγράφει η επιβατική ακτίνα:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (4.2)$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας στο S.I. είναι το 1 *rad/s*.

<u>Σχέση των δύο ταχυτήτων</u>

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μήκος ενός τόξου και η αντίστοιχή του επίκεντρη γωνία, όταν αυτή εκφράζεται σε ακτίνια (rad), συνδέονται με τη σχέση:

$$s = R \cdot \theta \qquad (4.3)$$

Επειδή η ακτίνα R είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο t, από τη σχέση 4.3 προκύπτει ότι

$$ds = R \cdot d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} \overset{4.1}{\underset{4.2}{\Longrightarrow}} \upsilon = R \cdot \omega. \qquad (4.4)$$

Επιτάχυνση στην καμπυλόγραμμη κίνηση

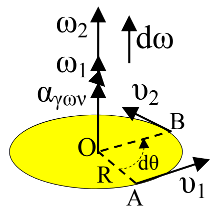
Είναι γνωστό ότι η επιτάχυνση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, το οποίο ορίζεται από τη σχέση $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα σώμα έχει επιτάχυνση οποτεδήποτε μεταβάλλεται η ταχύτητά του, είτε κατά μέτρο είτε κατά κατεύθυνση.

α. ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ (a_K), οφείλεται στην μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας. Επειδή στην καμπυλόγραμμη κίνηση η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά κατεύθυνση υπάρχει πάντα κεντρομόλος επιτάχυνση. Η κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και είναι κάθετη στη στιγμιαία ταχύτητα υ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $a_K = \dfrac{\upsilon^2}{R} \overset{4.4}{\Longrightarrow} a_K = \omega^2 R$ (4.5)

β. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ (a_ε) (ή επιτρόχια επιτάχυνση), οφείλεται στην μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας υ. Επομένως ένα σώμα έχει γραμμική επιτάχυνση μόνο όταν μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητάς του. Το διάνυσμα της γραμμικής επιτάχυνσης είναι κάθε στιγμή εφαπτόμενο στην τροχιά του κινητού και έχει τη φορά της ταχύτητας υ, αν το μέτρο της αυξάνεται.

$$a_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (4.6)$$

γ. ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ$\left(\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}\right)$. Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας. Ένα σώμα έχει γωνιακή επιτάχυνση όταν μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητάς του, σύμφωνα με τη σχέση 4.4. Είναι διανυσματικό μέγεθος και στην κυκλική κίνηση έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $d\vec{\omega}$ (δηλαδή τη φορά της γωνιακής ταχύτητας ω, αν το μέτρο της αυξάνεται)



Σχ. 2
($\upsilon_2 > \upsilon_1$)

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (4.7)$$

Μονάδα της γωνιακής επιτάχυνσης στο S.I. είναι το 1 *rad/s²*.

<u>Σχέση γραμμικής – γωνιακής επιτάχυνσης</u>

Από τη σχέση 4.4 προκύπτει $\dfrac{d\upsilon}{dt} = R \cdot \dfrac{d\omega}{dt} \overset{4.6}{\underset{4.7}{\Longrightarrow}} a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ (4.8)

Στην ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ είναι $\left|\vec{\upsilon}\right| = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \sigma\tau\alpha\theta.$ και $\left|\vec{\omega}\right| = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \sigma\tau\alpha\theta.$, άρα είναι $a_\varepsilon = 0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$.

Στην ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ η γραμμική επιτάχυνση παραμένει σταθερή κατά μέτρο, ενώ η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση. Όταν το μέτρο της ταχύτητας υ αυξάνει η γραμμική επιτάχυνση είναι ομόρροπη στην ταχύτητα υ, ενώ γωνιακή επιτάχυνση είναι ομόρροπη στη γωνιακή ταχύτητα ω.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (4.9)$$

$$\Delta s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (4.10)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \qquad (4.11)$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \qquad (4.12)$$

(Τα σύμβολα των διανυσματικών μεγεθών παριστάνουν αλγεβρικές τιμές)

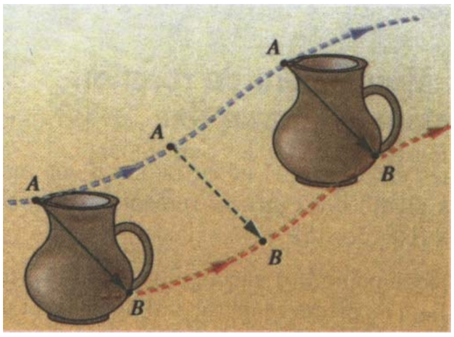
§4.2 Οι κινήσεις των στερεών.

Σε αντίθεση με τα σημειακά αντικείμενα (υλικά σημεία), τα οποία έχουν όλες τις ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις, στα στερεά σώματα δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τις διαστάσεις τους. Έτσι, ενώ ένα σημειακό αντικείμενο μπορεί να εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση, ένα στερεό σώμα μπορεί να εκτελέσει μεταφορική κίνηση ενώ αν αλλάζει προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελέσει στροφική κίνηση. Ακόμη ένα στερεό σώμα μπορεί να εκτελέσει και σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Όταν σε ένα στερεό ασκούνται δυνάμεις, το στερεό παραμορφώνεται λίγο ή πολύ, παροδικά ή μόνιμα. Το στερεό σώμα το οποίο δεν παραμορφώνεται όταν του ασκούνται δυνάμεις είναι ένα Ιδανικό Στερεό, το οποίο θα ονομάσουμε ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΤΕΡΕΟ. Παρακάτω όπου αναφέρεται στερεό, εννοείται Μηχανικό στερεό.

ΕΙΔΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Α. ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ εκτελεί ένα στερεό σώμα όταν ΟΛΑ τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση. Συνέπειες του ορισμού είναι ότι οι τροχιές όλων των σημείων του είναι παράλληλες και ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. (Σχ. 3)

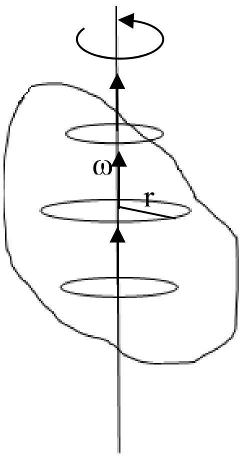


Σχ. 3

Η μεταφορική κίνηση μπορεί να είναι ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη.

Β. ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ εκτελεί ένα στερεό όταν αλλάζει ο προσανατολισμός του στον χώρο.

Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία, **ο άξονας περιστροφής**, που όλα τα σημεία του παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του στερεού εκτελούν κυκλική κίνηση, σε επίπεδα κάθετα στον άξονα και με κέντρα που βρίσκονται πάνω στον άξονα.

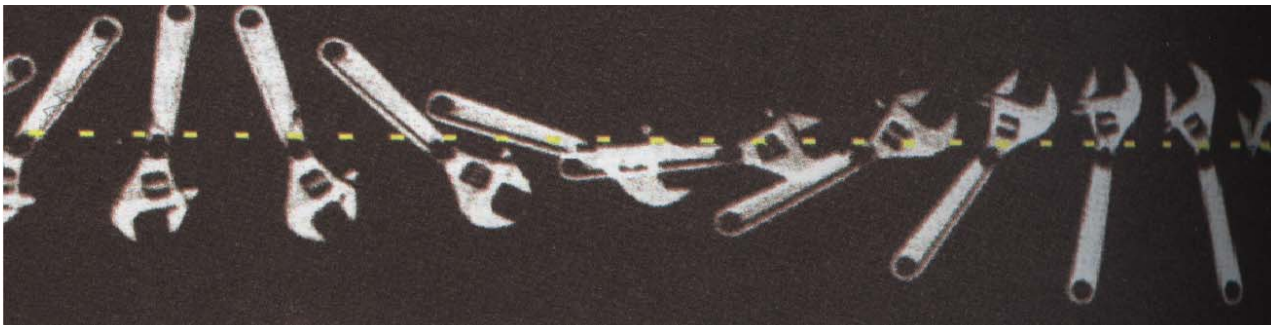


Όλα τα σημεία του στερεού που δε βρίσκονται πάνω στον άξονα, έχουν κάθε στιγμή την ίδια γωνιακή ταχύτητα και ταχύτητα που έχει μέτρο ανάλογο της απόστασης r από τον άξονα περιστροφής και υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon = \omega \cdot r$.

Όταν το στερεό στρέφεται με <u>σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω</u>, γύρω από σταθερό άξονα, εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση και για τη γωνιακή του μετατόπιση (γωνία στροφής) σε χρόνο Δt, ισχύει η σχέση: $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$.

Όταν η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, θα λέμε ότι το στερεό εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση και θα ισχύουν οι εξισώσεις 4.11 και 4.12. [Τα σύμβολα ω και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ παριστάνουν τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων].

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ (cm), ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο το οποίο κινείται σαν ένα σημειακό αντικείμενο με μάζα ίση με τη μάζα του στερεού, στο οποίο ασκούνται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται και στο στερεό.



Σχ.5 Η συνολική δύναμη που ασκείται στο κλειδί κατά την κίνησή στο λείο τραπέζι είναι ίση με το μηδέν. Υπάρχει ένα σημείο του – **το κέντρο μάζας** - που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, όπως δηλαδή ένα σημειακό αντικείμενο στο οποίο θα δίναμε την ίδια αρχική ταχύτητα και στο οποίο η συνολική δύναμη θα ήταν επίσης ίση με το μηδέν.

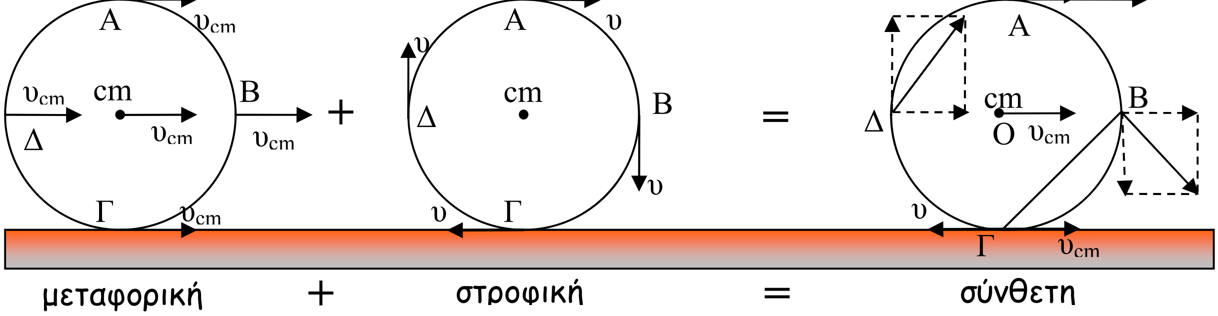
Η μεταφορική κίνηση ενός στερεού ανάγεται στη μελέτη της κίνησης του κέντρου μάζας του. Για την κίνηση του κέντρου μάζας ενός στερεού μάζας Μ, στο οποίο ασκείται συνισταμένη δύναμη, ισχύει η σχέση $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$. (4.13)

Στα ομογενή γεωμετρικά στερεά , το κέντρο μάζας τους συμπίπτει με το γεωμετρικό τους κέντρο. Π.χ. το κέντρο μάζας ομογενούς σφαίρας συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο της.

Το κέντρο μάζας μπορεί να μην είναι σημείο της μάζας του στερεού. Π.χ το κέντρο μάζας ομογενούς δακτυλίου (δαχτυλιδιού) είναι το κέντρο του κύκλου, το οποίο δεν ανήκει στη μάζα του.

Το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη του βάρους – το **κέντρο βάρους** - συμπίπτει με το κέντρο μάζας του σώματος όταν το σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο.

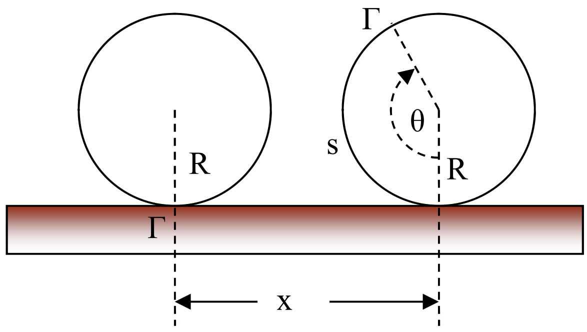
Γ. ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ εκτελεί ένα σώμα όταν ταυτόχρονα μεταφέρεται και περιστρέφεται. Σύνθετη κίνηση εκτελεί, π.χ ο τροχός ενός κινούμενου ποδηλάτου ή το κλειδί του σχήματος 5.



Σχ. 6

Η σύνθετη κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σαν το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης και μιας στροφικής κίνησης γύρω από συγκεκριμένο άξονα.

Μελέτη της κύλισης ενός τροχού.



Σχ. 7

Όταν ο τροχός του σχήματος 7 εκτελεί σύνθετη κίνηση, κάθε σημείο της περιφέρειάς του έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το έδαφος. Αν το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπιστεί κατά x, τότε ένα σημείο Γ της περιφέρειας θα έχει στραφεί κατά γωνία θ στην οποία αντιστοιχεί τόξο μήκους s. Από τον ορισμό της γωνίας (σε rad, σχέση 4.3) έχουμε $s = R\cdot\theta$. Θα λέμε ότι ο τροχός κυλίεται στο επίπεδο αν η μετατόπιση x του κέντρου του τροχού είναι ίση με το μήκος του τόξου κατά το οποίο στράφηκε το σημείο Γ στον ίδιο χρόνο. Δηλαδή αν $x = s \Rightarrow$ $x = R\cdot\theta$ (4.14)

Η εξίσωση 4.14 αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε ο τροχός να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και αποτελεί την <u>1η ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>.

Σύμφωνα με τους ορισμούς της ταχύτητας, για το κέντρο μάζας, και της γωνιακής ταχύτητας, έχουμε: $\upsilon_{cm} = \dfrac{dx}{dt}$ και $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$. Από την εξίσωση 4.14 παίρνουμε $\dfrac{dx}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow$

$\upsilon_{cm} = R\cdot\omega$. (4.15)

Η εξίσωση 4.15 αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε ο τροχός να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και αποτελεί την <u>2η ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>.

Σύμφωνα με τους ορισμούς της επιτάχυνσης, για το κέντρο μάζας, και της γωνιακής επιτάχυνσης έχουμε: $a_{cm} = \dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt}$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{d\omega}{dt}$. Από την εξίσωση 4.15 παίρνουμε

$\dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow$ $a_{cm} = R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4.16)

Η εξίσωση 4.16 αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε ο τροχός να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και αποτελεί την <u>3η ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>.

Από την εξίσωση 4.15 παρατηρούμε ότι η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού είναι ίση με την ταχύτητα των σημείων της περιφέρειάς του λόγω της στροφικής κίνησης (εξ. 4.4). Επομένως, όπως προκύπτει από την αρχή της επαλληλίας, το σημείο Γ του τροχού, το οποίο είναι σε επαφή με το έδαφος, έχει ταχύτητα κάθε στιγμή ίση με μηδέν. (σχ. 6). Αντίθετα το αντιδιαμετρικό του σημείο Α έχει ταχύτητα

$\upsilon_A = \upsilon + \upsilon_{cm} = 2\upsilon_{cm}$.

Σημείο επαφής Γ: $\upsilon_\Gamma = 0$. <u>4η ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>. (4.17)

Αντιδιαμετρικό σημείο Α: $\upsilon_A = 2\,\upsilon_{cm}$. <u>5η ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>. (4.18)

Αντίστοιχα ισχύουν και για την επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων Α και Γ (όχι την κεντρομόλο): $a_\Gamma = 0$ και $a_A = 2\cdot a_{cm}$.

Σχ. 8 Η φωτογραφία δείχνει την τροχιά ενός σημείου που βρίσκεται στην περιφέρεια ενός τροχού ο οποίος κυλίεται. Η τροχιά αυτή ονομάζεται κυκλοειδής. Επίσης φαίνεται και η τροχιά του κέντρου του τροχού, που είναι ευθύγραμμη.

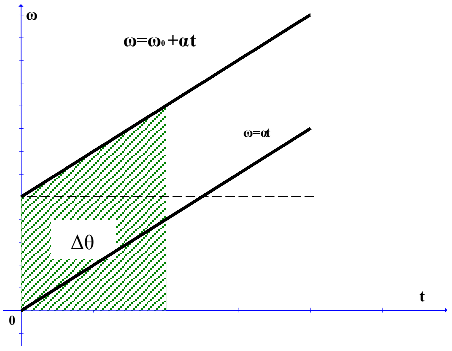
ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΑΞΟΝΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

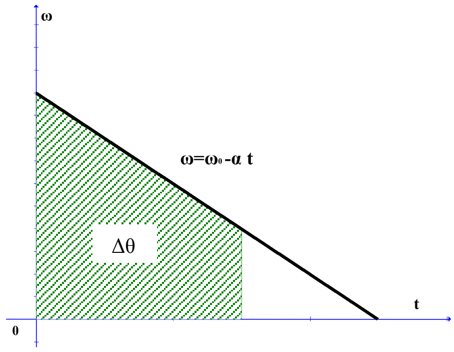
Όταν ένας τροχός κυλίεται σε επίπεδο, υπάρχουν σημεία του, τα οποία έχουν στιγμιαία ταχύτητα ίση με μηδέν. Τα σημεία αυτά είναι τα κοινά σημεία του τροχού με το επίπεδο (σημείο Γ στο σχήμα 6) και ορίζουν έναν άξονα ο οποίος είναι παράλληλος με τον άξονα περιστροφής του τροχού. Η σύνθετη κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί σαν καθαρά στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα αυτόν. Έτσι η ταχύτητα του σημείου Β του τροχού στο σχήμα 6 μπορεί να υπολογιστεί σαν αποτέλεσμα μιας μεταφορικής κίνησης με ταχύτητα $υ_{cm}$ και μιας στροφικής γύρω από τον νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με ταχύτητα $υ = υ_{cm}$: $υ_B^2 = υ_{cm}^2 + υ^2 = 2 \cdot υ_{cm}^2 \Rightarrow$

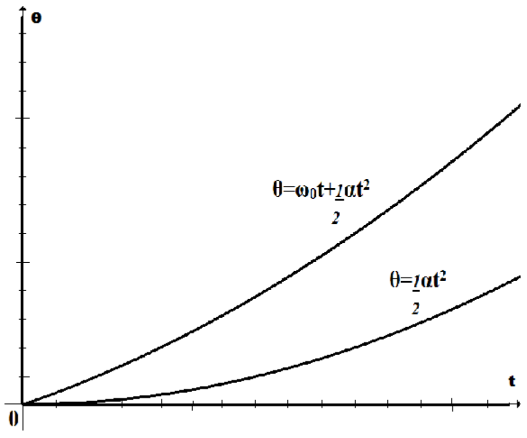
$υ_B = υ_{cm}\sqrt{2}$ *. Μπορεί όμως να υπολογιστεί και σαν στροφική ταχύτητα γύρω από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από τα σημεία επαφής του τροχού με το επίπεδο (σημείο Γ στο σχήμα 6) με ακτίνα r = ΓΒ: Υπολογίζουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα την ΓΒ* $= r = \sqrt{R^2 + R^2} \Rightarrow r = R\sqrt{2}$ *Για την ταχύτητα $υ_B$ ισχύει η σχέση* $υ_B = ωr \Rightarrow υ_B = ωR\sqrt{2} \overset{ωR=υ_{cm}}{\Rightarrow} υ_B = υ_{cm}\sqrt{2}$.

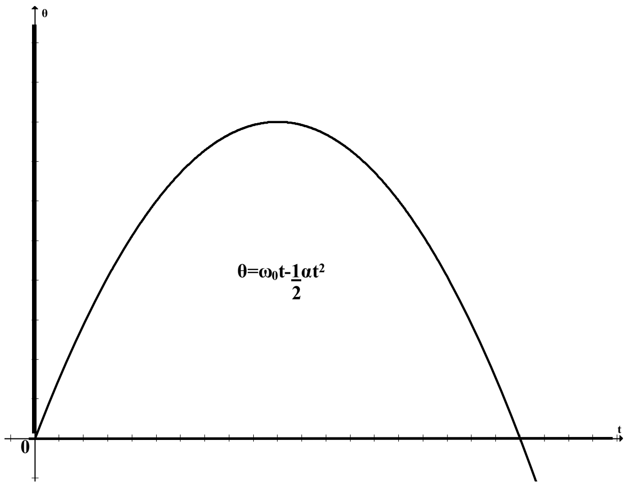
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση









Παράδειγμα 4.1 Ένας δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου 10 *rad/s*, γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου 2 rad/s^2. Να υπολογίσετε

α. τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου θα διπλασιαστεί.

β. τη γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

γ. τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

δ. τη μεταβολή στο μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

Λύση

Η κίνηση του δίσκου είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη.

Ισχύουν οι εξισώσεις 4.11 και 4.12: $\begin{matrix} \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \end{matrix}$.

α. Από την 4.11 λύνοντας ως προς t παίρνουμε $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t_1 = \frac{20-10}{2} s \Rightarrow$ $\boxed{t_1 = 5s}$

β. Από την εξίσωση 4.12 με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\theta - \cancel{\theta_0} = 10 rad/s \cdot 5s + \frac{1}{2}\cdot 2rad/s^2 \cdot (5s)^2 \Rightarrow \theta = 50(rad) + 25(rad) \Rightarrow \boxed{\theta = 75(rad)}$$

γ. Όταν ο δίσκος κάνει μία πλήρη περιστροφή, μια ακτίνα του στρέφεται κατά γωνία 2π (rad). Επομένως αν σε χρόνο Δt εκτελέσει Ν περιστροφές η γωνία περιστροφής μιας ακτίνας του θα υπολογιστεί από τη σχέση $\Delta\theta = N\,2\pi \Rightarrow \boxed{N = \frac{75}{2\pi}\text{περιστροφές}}$.

δ. Επειδή στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, από την εξίσωση 4.8 που συνδέει τα μέτρα της γραμμικής με τη γωνιακή επιτάχυνση $(\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R)$, προκύπτει ότι και το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης παραμένει σταθερό κάθε χρονική στιγμή. Έτσι σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα ισχύει $\boxed{\Delta\alpha_\varepsilon = 0}$.

Παράδειγμα 4.2 Ένας τροχός έχει ακτίνα 0,1 m και κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το κέντρο του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου 10 m/s και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό. Ο τροχός σταματάει αφού μετατοπιστεί κατά 20 m. Να υπολογίσετε

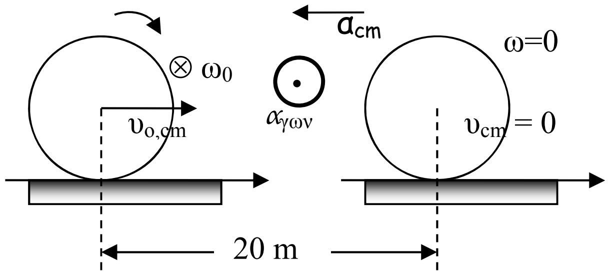
α. το χρόνο κίνησης του τροχού.

β. τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

γ. τον αριθμό των περιστροφών που κάνει ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει.

δ. την ταχύτητα του σημείου της περιφέρειας του τροχού που απέχει από το έδαφος απόσταση 0,2 m, τη χρονική στιγμή t = 2 s.

Λύση



Για τη μεταφορική κίνηση θεωρούμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\upsilon_{0,cm}$ και για τη στροφική κίνηση θεωρούμε σαν θετική φορά τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Η κίνηση του δίσκου είναι σύνθετη ομαλά επιβραδυνόμενη με $\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$. Οι εξισώσεις 4.11 και 4.12: $\begin{matrix} \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \end{matrix}$ για τη στροφική κίνηση, μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\omega=\omega_0-|\alpha_{\gamma\omega\nu}|t \qquad (4.2.1)$$

$$\Delta\theta=\omega_0 t-\frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}|t^2 \qquad (4.2.2)$$

Οι εξισώσεις 4.9 και 4.10 $\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_0 + at \\ \Delta s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{matrix}$ για τη μεταφορική κίνηση μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{0,cm} - |a_{cm}|t \qquad (4.2.3)$$

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}|a_{cm}|t^2 \qquad (4.2.4)$$

Από την εκφώνηση δίνονται: R = 0,1 m, $\upsilon_{0,cm}$ = 10 m/s και Δx = 20 m.
Επειδή ο τροχός σταματάει τη χρονική στιγμή t, ισχύουν επιπλέον υ_{cm} = 0 και ω = 0.

α. Λύνουμε την εξίσωση 4.2.3 ως προς $|a_{cm}|$: $|a_{cm}| = \frac{\upsilon_{0,cm} - \upsilon_{cm}}{t}$ ή $|a_{cm}| = \frac{\upsilon_{0,cm}}{t}$

Αντικαθιστούμε στην 4.2.4:

$$\Delta x = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{0,cm}}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}} \Rightarrow \Delta x = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}\upsilon_{0,cm} t \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon_{0,cm} t}{2} \Rightarrow t = \frac{2\cdot\Delta x}{\upsilon_{0,cm}} \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\cdot 20\,m}{10\,m/s} \Rightarrow \boxed{t = 4\,s}.$$

β. Υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού:

$|a_{cm}| = \frac{\upsilon_{0,cm}}{t} \Rightarrow |a_{cm}| = \frac{10}{4}m/s^2 \Rightarrow a_{cm} = -2{,}5\,m/s^2$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 4.16

$$a_{cm} = R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = -\frac{2{,}5}{0{,}1}rad/s^2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = -25\,rad/s^2}.$$

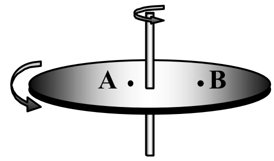
γ. Για τον αριθμό των περιστροφών, σύμφωνα και με την πρώτη συνθήκη κύλισης 4.14, ισχύει: Δx = R·N·2π $\Rightarrow N = \frac{\Delta x}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{20}{2\pi\cdot 0{,}1}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho \Rightarrow N = \frac{100}{\pi}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.$

δ. Το σημείο της περιφέρειας του τροχού που απέχει από το έδαφος απόσταση 0,2 m = 2R, είναι το υψηλότερο σημείο του τροχού (σημείο Α στο σχήμα 6). Η ταχύτητά του είναι $υ_A = 2υ_{cm} \xrightarrow{4.2.3} υ_A = 2(υ_{0,cm} - |a_{cm}|t) \Rightarrow υ_A = 2(10 - 2{,}5 \cdot 2) m/s \Rightarrow \boxed{υ_A = 10 m/s}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

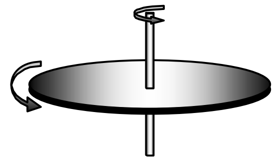
Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*

4.1. Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του εκτελώντας επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Δύο σημεία Α και Β απέχουν από το κέντρο του δίσκου αποστάσεις R_A και R_B αντίστοιχα, με $R_B = 2R_A$. Συνεπώς,



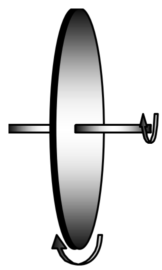
α. ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων είναι $ω_A / ω_B = 1/2$.
β. ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων είναι $υ_A / υ_B = 2$.
γ. ο λόγος των κεντρομόλωνεπιταχύνσεων είναι $α_{κA} / α_{κB} = 2$.
δ. ο λόγος των γωνιακών επιταχύνσεων είναι $α_A / α_B = 1$.

4.2. Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα που αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Συνεπώς, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης αποδίδεται σωστά από το διάνυσμα.



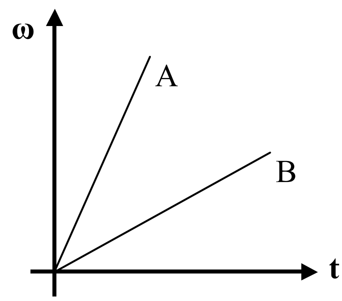
α. ↑ **β.** ↓ **γ.** → **δ.** ←

4.3. Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα που ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό. Συνεπώς, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης αποδίδεται σωστά από το διάνυσμα



α. → **β.** ← **γ.** ↓ **δ.** ↑

4.4. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ω = f(t) για δύο σώματα Α και Β που περιστρέφονται γύρω από παράλληλους άξονες. Για τις γωνιακές επιταχύνσεις των δύο σωμάτων ισχύει



α. $α_A = α_B$. **β.** $α_A > α_B$.
γ. $α_A < α_B$. **δ.** $α_A = 2α_B$

4.5. Ένα ποδήλατο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Πάνω στις ακτίνες και κοντά στην περιφέρεια του τροχού βρίσκεται προσαρμοσμένο ένα διακοσμητικό. Η κίνηση του διακοσμητικού είναι

α. σύνθετη. **β.** κυκλική.
γ. μεταφορική. **δ.** ευθύγραμμη ομαλή.

4.6. Κέντρο μάζας ενός στερεού ονομάζεται

α. σε κάθε περίπτωση το γεωμετρικό κέντρο συμμετρίας του σώματος

β. το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα σημειακό αντικείμενο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος σαν σε αυτό να ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

γ. το σημείο εκείνο του σώματος που εκτελεί σε κάθε περίπτωσή ομαλή περιστροφική κίνηση ανεξάρτητα από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

δ. το σημείο εκείνο που εκτελεί πάντοτε ομαλή περιστροφική κίνηση.

4.7. Ένα στερεό εκτελεί μεταφορική κίνηση όταν

α. η τροχιά κάθε σημείου είναι ευθεία γραμμή.

β. όλα τα σημεία του έχουν ταχύτητα που μεταβάλλεται με το χρόνο.

γ. όλα τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή την ίδια μεταξύ τους ταχύτητα και ο προσανατολισμός του παραμένει σταθερός.

δ. μόνο το κέντρο μάζας του διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά.

4.8. Ένα στερεό εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα όταν

α. όλα τα σημεία του σώματος, εκτός εκείνων που βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής, έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα.

β. όλα τα σημεία του σώματος, εκτός εκείνων που βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ. τα σημεία που βρίσκονται πιο κοντά στον άξονα περιστροφής ολοκληρώνουν γρηγορότερα μια πλήρη περιστροφή.

δ. τα σημεία που βρίσκονται πιο κοντά στον άξονα περιστροφής έχουν μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.

4.9. Σε έναν τροχό που κυλίεται με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο

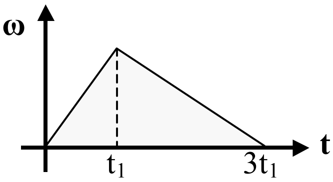
α. όλα τα σημεία του έχουν την ίδια στιγμή την ίδια ταχύτητα.

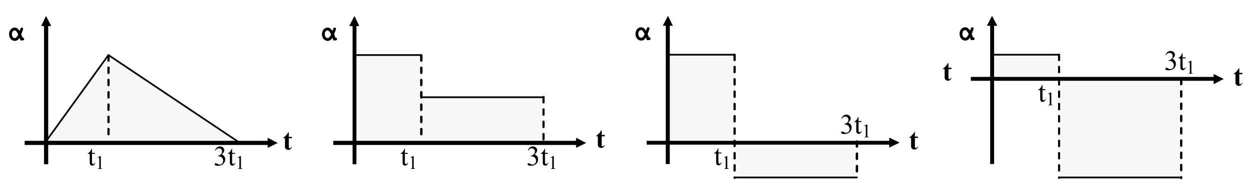
β. δεν υπάρχουν δύο σημεία του που να έχουν την ίδια ταχύτητα.

γ. όλα τα σημεία του έχουν την ίδια στιγμή την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα.

δ. όλα τα σημεία του έχουν την ίδια φορά κίνησης με διαφορετικό μέτρο ταχύτητας.

4.10. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός στερεού σώματος μεταβάλλεται όπως στο διπλανό σχήμα. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αποδίδει τη μεταβολή της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου;



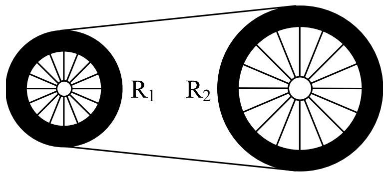


(α) (β) (γ) (δ)

4.11. Ένας δίσκος ακτίνας R = 0,2 m αφήνεται από την κορυφή ενός πλάγιου επιπέδου και κυλίεται σε αυτό χωρίς να ολισθαίνει. Αν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 20 rad/s σε κάθε δευτερόλεπτο, τότε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού,

α. μειώνεται κατά 20 m/s το δευτερόλεπτο.
β. μειώνεται κατά 100 m/s το δευτερόλεπτο.
γ. αυξάνεται κατά 20 m/s το δευτερόλεπτο.
δ. αυξάνεται κατά 4 m/s το δευτερόλεπτο.

4.12. Ο δίσκος του πίσω τροχού ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα R_1 και ο δίσκος του πεντάλ ακτίνα R_2. Αν $R_2 = 3R_1/2$ και ο ιμάντας δεν ολισθαίνει, ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων περιστροφής των δύο δίσκων είναι



α. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$ **β.** $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$ **γ.** $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$ **δ.** $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$

4.13. Ένας αρχικά ακίνητος δίσκος ακτίνας R = 0,4 m ξεκινά από την χρονική στιγμή t = 0 να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων}$ = 5 rad/s^2. Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας του δίσκου την χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{0,2}\ s$ ισούται με

α. 2 m/s^2. **β.** $2\sqrt{2}\ m/s^2$. **γ.** 5 m/s^2. **δ.** 12,5 m/s^2.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

4.14. Μηχανικά στερεά ονομάζονται τα υποθετικά στερεά που

α. δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις.
β. παραμορφώνονται μόνο αν η δύναμη που ασκείται σε αυτά υπερβεί μια μέγιστη τιμή.
γ. εκτελούν μόνο μεταφορικές κινήσεις.
δ. εκτελούν μόνο περιστροφικές κινήσεις.

4.15. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

α. στην στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος υπάρχει μια ευθεία που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία του σώματος εκτελούν κυκλική κίνηση.
β. Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα είναι η γωνιακή επιτάχυνση.
γ. Ένα στερεό σώμα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση όταν η γωνιακή του επιτάχυνση παραμένει σταθερή.

4.16. Το κέντρο μάζας ενός στερεού, που εκτελεί σύνθετη κίνηση, κινείται όπως ένα υποθετικό σημειακό αντικείμενο με μάζα ίση με τη μάζα του στερεού, αν σ' αυτό ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό.

4.17. Το κέντρο μάζας ενός στερεού μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα.

4.18. Κατά τη στροφική κίνηση μιας ομογενούς ράβδου γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, η ταχύτητα του άλλου άκρου της έχει μέτρο που είναι διπλάσιο από το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της.

4.19. Όλα τα σημεία της περιφέρειας ενός τροχού που κυλίεται, έχουν γραμμική (επιτρόχια) επιτάχυνση της οποίας το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του τροχού.

4.20. Το σφουγγάρι είναι μηχανικό στερεό.

4.21. Μια καμπυλόγραμμη κίνηση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μεταφορική κίνηση.

4.22. Ο άξονας περιστροφής ενός στερεού που εκτελεί μεταφορική κίνηση βρίσκεται στο άπειρο.

4.23. Αν x είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας ενός τροχού, ο οποίος κυλίεται, και θ η γωνία σε rad κατά την οποία στρέφεται μια ακτίνα του στον ίδιο χρόνο, τότε ισχύει $x = R\,\theta$.

4.24. Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού, που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι διανύσματα ομόρροπα.

4.25. Η γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα

α. είναι διανυσματικό μέγεθος.

β. έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το 1 rad/s.

γ. έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια τιμή για όλες τις στρεφόμενες στοιχειώδεις μάζες που αποτελούν το στερεό.

δ. ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

ε. έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα.

4.26. Όταν ένα στερεό μεταφέρεται στο χώρο χωρίς να στρέφεται, τότε

α. όλες οι στοιχειώδεις μάζες του έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων αλλά διαφορετικών διευθύνσεων.

β. όλες οι στοιχειώδεις μάζες του έχουν ίσες ταχύτητες.

γ. το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό του.

δ. η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη.

4.27. Όταν ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα

α. όλες οι στοιχειώδεις μάζες του στερεού που ανήκουν και στον άξονα περιστροφής, έχουν ταχύτητες διάφορες του μηδενός.

β. όλες οι στοιχειώδεις μάζες του έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ. οι τροχιές όλων των στοιχειωδών μαζών του είναι κυκλικές με κέντρα που βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής.

δ. όλες οι στοιχειώδεις μάζες του έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων.

4.28. Ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού

α. είναι η μεγαλύτερη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται κάποια στιγμή οποιοδήποτε άλλο σημείο του τροχού

β. είναι η μικρότερη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται κάποια στιγμή οποιοδήποτε άλλο σημείο του τροχού

γ. είναι η μισή της ταχύτητας του ανώτατου σημείου του τροχού

δ. έχει μέτρο που ισούται με $\frac{u_1\sqrt{2}}{2}$, όπου u_1 το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού το οποίο βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι παράλληλη με το έδαφος.

4.29. Η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και η γραμμική επιτάχυνση a_{cm} ενός ομογενούς κυλίνδρου, που έχει αφεθεί ελεύθερος από την κορυφή ενός πλάγιου επίπεδου, συνδέονται με τη σχέση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_{cm}R$, με την προϋπόθεση ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

4.30. Ένας τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

α. Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινείται κατά ds, τότε κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού στρέφεται κατά τόξο μήκους ds.

β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει διπλάσιο μέτρο από την ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού.

γ. Το μέτρο της ταχύτητας λόγω μεταφορικής κίνησης ενός τυχαίου σημείου του τροχού που δεν ανήκει στην περιφέρειά του υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon = \omega R$.

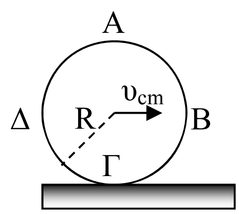
δ. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού διπλασιαστεί τότε η ταχύτητα του ανώτατου σημείου του τροχού θα τετραπλασιαστεί.

4.31. Ο τροχός του διπλανού σχήματος κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) σε οριζόντιο επίπεδο. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;

α. $\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R}$. **β.** $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} = \vec{\upsilon}_{cm}$. **γ.** $\vec{\upsilon}_{B} = \vec{\upsilon}_{cm}$.

δ. $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} = 2\cdot\vec{\upsilon}_{cm}$. **ε.** $\vec{\upsilon}_{\Delta} = \vec{\upsilon}_{cm}\cdot\sqrt{2}$. **στ.** $\upsilon_{\Gamma} = 0$.

ζ. $\upsilon_{\mathrm{B}} = \upsilon_{cm}\sqrt{2}$. **η.** $a_{\Gamma} = \omega^2 R$. **θ.** $a_{\mathrm{A}} = R\sqrt{4\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}$.



4.32. Ένας κύλινδρος ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση που έχει αντίθετη κατεύθυνση από την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

β. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ελαττώνεται.

γ. Το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το δάπεδο έχει κάθε χρονική στιγμή μηδενική ταχύτητα.

δ. Το πηλίκο των μέτρων της γωνιακής ταχύτητας και της ταχύτητας του κέντρου μάζας παραμένει σταθερό.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

4.33. Ένας μαθητής κάθεται μπροστά από έναν ηλεκτρικό ανεμιστήρα, του οποίου τα πτερύγια στρέφονται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

α. Ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας των πτερυγίων του ανεμιστήρα;

β. Αν διακόψουμε την παροχή ηλεκτρικού ρεύματος στον ανεμιστήρα, ποια θα είναι η φορά του διανύσματος της γωνιακής επιτάχυνσης των πτερυγίων του;

4.34. Δυο δίσκοι (1) και (2) ίδιας ακτίνας R περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο ακλόνητο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδο του καθενός, με γωνιακές ταχύτητες $\vec{\omega}_1$ και $\vec{\omega}_2$ αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $\vec{\omega}_1 = -4 \cdot \vec{\omega}_2$. Τη χρονική t = 0 ένας δίσκος πέφτει πάνω στον άλλο, οπότε από τη στιγμή αυτή και ως τη χρονική στιγμή t_1 που οι δυο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_K = -\vec{\omega}_2$, η γωνιακή ταχύτητα του κάθε δίσκου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.
Οι γωνιακές επιταχύνσεις $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)}$ και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$ των δίσκων 1 και 2 αντίστοιχα, στη χρονική διάρκεια από 0 έως t_1 ικανοποιούν τη σχέση

α. $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)} = -\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$.

β. $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)} = +2,5 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$.

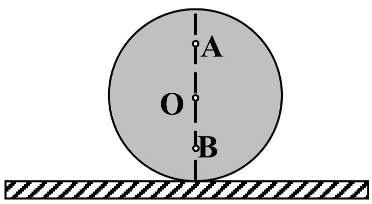
γ. $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(1)} = -1,5 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(2)}$.

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.35. Να αποδείξετε ότι αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός τροχού ακτίνας R, συνδέεται με τη γωνιακή του ταχύτητα με τη σχέση $\upsilon_{cm} = \omega R$, τότε ο τροχός δεν ολισθαίνει.

4.36. Για έναν τροχό, ο οποίος κυλίεται εκτελώντας επιταχυνόμενη κίνηση, να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του με τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

4.37. Κύλινδρος ακτίνας R κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Το σχήμα παριστάνει μια κάθετη τομή του κυλίνδρου και τα σημεία Α, Ο και Β βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη διάμετρό του. Αν (ΟΑ) = (ΟΒ) = $\frac{3R}{4}$, να προσδιορίσετε το λόγο των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Β.



4.38. Δίσκος ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο.
Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου του δίσκου που απέχει απόσταση 2R από το δάπεδο ισούται με $υ_1$.
Ένα σημείο του δίσκου που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το κέντρο μάζας έχει την ίδια χρονική στιγμή t_1 ταχύτητα μέτρου 0,75 $υ_1$. Η απόσταση του σημείου αυτού από το δάπεδο ισούται με

α. 0,5 R. **β.** 0,75 R. **γ.** 1,5 R.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4.39. Ένας δακτύλιος ξεκινά από την ηρεμία και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_1 δύο σημεία Ζ και Θ της περιφέρειες του δακτυλίου που απέχουν απόσταση R από το δάπεδο έχουν ταχύτητα μέτρου $υ_1$.

Α. Τη χρονική στιγμή t_1 το κέντρο μάζας του δακτυλίου έχει ταχύτητα μέτρου

α. $2υ_1$. **β.** $\sqrt{2}\cdot\upsilon_1$, **γ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\upsilon_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Την χρονική στιγμή $t_2 = 2t_1$ το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Κ του δακτυλίου που απέχει απόσταση 2R από το δάπεδο ισούται με

α. $2\sqrt{2}\cdot\upsilon_1$. **β.** $\sqrt{2}\cdot\upsilon_1$. **γ.** $4υ_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.40. Υπάρχουν σημεία της περιφέρειας ενός δίσκου, που κυλίεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τα οποία έχουν ταχύτητα μέτρου $υ_{cm}$, όπου $υ_{cm}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του;

4.41. Μια οριζόντια σανίδα, μήκους ℓ, εφάπτεται στο πάνω μέρος ενός οριζόντιου κυλίνδρου. Σπρώχνουμε τη σανίδα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένει οριζόντια και ταυτόχρονα να παρασύρει τον κύλινδρο σε κύλιση χωρίς η ίδια να ολισθαίνει ως προς αυτόν.

α. Το πάνω μέρος του κυλίνδρου έχει την ίδια ταχύτητα με τη σανίδα.
β. Όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου μετατοπιστεί κατά ℓ η σανίδα θα μετατοπιστεί κατά ℓ.
γ. Όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου μετατοπιστεί κατά ℓ η σανίδα θα μετατοπιστεί κατά 2ℓ.
δ. Η σανίδα κινείται με ταχύτητα διπλάσια από αυτή του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.42. Μια μοτοσικλέτα της οποίας οι τροχοί έχουν ακτίνα 0,5 m, κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα. Σε 5 s, το (νοητό) ίχνος ενός τροχού της μοτοσικλέτας έχει μήκος 200 m. Να υπολογίσετε

α. την περίοδο περιστροφής των τροχών της.

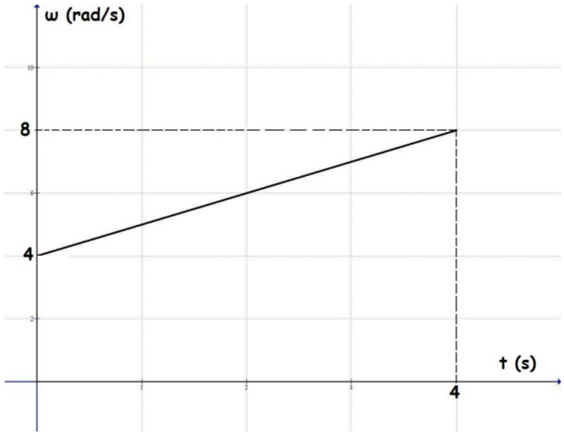
β. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας λόγω της περιστροφής, ενός σημείου του μπροστινού τροχού της μοτοσικλέτας, το οποίο απέχει 0,2 m από τον άξονα του τροχού.

γ. το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του πίσω τροχού της μοτοσικλέτας, το οποίο απέχει 0,5 *m* από το έδαφος.

[Απ. α. $\frac{\pi}{40}s$, β. 16 m/s, γ. $40\sqrt{2}\,m/s$]

4.43. Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου 20π *rad/s*. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο τροχός αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό 2π *rad/s²*. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που θα κάνει ο τροχός από τη χρονική στιγμή t = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή που θα σταματήσει.[Απ. 50]

4.44. Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε



α. τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

β. τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή t = 2 s.

γ. τη χρονική στιγμή κατά την οποία η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα γίνει 20 rad/s.

δ. τη γωνία στροφής του τροχού, από τη χρονική στιγμή t = 2 s ως τη χρονική στιγμή t = 4 s.

ε. τον αριθμό των περιστροφών του τροχού στο χρονικό διάστημα από 2 s ως 4 s.

[Απ. α. 1 rad/s^2, β. 6 rad/s, γ. 16 s, δ. 14 rad, ε. $\frac{7}{\pi}$]

4.45. Στον κύλινδρο ενός καρουλιού, το οποίο έχει ακτίνα 4 cm, έχουμε τυλίξει λεπτό νήμα μήκους 9 m. Το καρούλι αρχίζει να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου 2 rad/s^2, έτσι ώστε το νήμα να ξετυλίγεται.

α. Σε πόσο χρόνο θα ξετυλιχτεί όλο το νήμα;

β. Ποιο θα είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του καρουλιού τη στιγμή που θα έχει ξετυλιχτεί όλο το νήμα; [Απ. α. 15 s, β. 30 rad/s]

4.46. Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου u = 20 m/s. Οι τροχοί του οχήματος έχουν ακτίνα R = 0,4 m.

α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφονται οι τροχοί του οχήματος

β. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του σημείου της περιφέρειας των τροχών, το οποίο απέχει από το έδαφος απόσταση $d_1 = 2R$;

γ. Πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο της περιφέρειας των τροχών, το οποίο έχει ταχύτητα μέτρου $u = \sqrt{3}\,u_{cm}$; [Απ. α. 50 rad/s, β. 40 m/s, γ. 0,6 m]

4.47. Ένα όχημα ξεκινά από την ηρεμία την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 4\ m/s^2$. Οι τροχοί του οχήματος οι οποίοι κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, έχουν ακτίνα $R = 0{,}4\ m$. Να υπολογίσετε:

α. το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής των τροχών.

β. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής των τροχών τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\ s$.

γ. τη μετατόπιση του οχήματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή που οι τροχοί του αποκτούν συχνότητα περιστροφής $f = 50/\pi\ Hz$.

4.48. Ένας κύλινδρος ακτίνας $R = 20\ cm$ αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα στην κορυφή πλάγιου επιπέδου και κυλίεται κατά μήκος του επιπέδου. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου, κατά την κάθοδό του, αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, $\Delta\omega/\Delta t = 5\ rad/s^2$. Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του έχει μέτρο $\omega = 100\ rad/s$.

α. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου κατά την κίνησή του στο πλάγιο επίπεδο;

β. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου;

γ. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφήνεται ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου;

δ. Πόσες περιστροφές εκτελεί ο κύλινδρος κατά την κίνησή του από την κορυφή μέχρι τη βάση του πλάγιου επιπέδου;

4.49. Ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού έχει μέτρο $\omega = 50\ rad/s$. Η μέγιστη ταχύτητα των διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού έχει μέτρο $u_{max} = 40\ m/s$.

α. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του τροχού.

β. Ποιο είναι το μέτρο της ελάχιστης ταχύτητας των διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού;

γ. Δύο σημεία Β και Γ μιας κατακόρυφης διαμέτρου του τροχού, τα οποία βρίσκονται σε απόσταση $r = R/2$ από το κέντρο μάζας Κ του τροχού, έχουν την ίδια χρονική στιγμή ταχύτητες $\vec{u}_B$ και $\vec{u}_\Gamma$, αντίστοιχα. Ποιος είναι ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\vec{u}_B$ και $\vec{u}_\Gamma$;

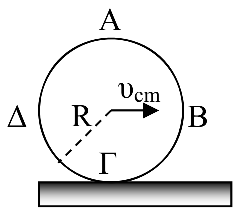
4.50. Τροχός ακτίνας $R = 0{,}25\ m$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο δρόμο. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του τροχού είναι $\omega_0 = 40\ rad/s$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο τροχός αρχίζει να επιβραδύνεται ομαλά και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του μηδενίζεται, αφού διανύσει διάστημα $x = 25\ m$. Να υπολογίσετε:

α. την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού.

β. τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης του τροχού.

γ. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 2s$.

δ. τον αριθμό των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2s$.



4.51. Το διπλανό σχήμα δείχνει τον τροχό ενός αυτοκινήτου ακτίνας R κάποια στιγμή που το κοντέρ του δείχνει ένδειξη u_{cm} και ο οδηγός πατώντας σταθερά το γκάζι αυξάνει την ταχύτητα u_{cm} με ρυθμό σταθερό και ίσο με a_{cm}. Τα μεγέθη R, u_{cm} και a_{cm} θεωρούνται γνωστά. Αν την στιγμή αυτή έρχεται σε επαφή με το έδαφος το σημείο Γ του τροχού, να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης, $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)$, των σημείων Γ, Δ και Α του τροχού.

4.52. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση. Οι τροχοί του αυτοκινήτου έχουν ακτίνα 40 *cm* και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Σε χρόνο 5 *s* το αυτοκίνητο αποκτά ταχύτητα 72 *km/h*. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κάθε τροχού.

β. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του κάθε τροχού.

γ. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας κάθε τροχού τη χρονική στιγμή t = 8 *s*.

δ. την απόσταση από το έδαφος, του σημείου της περιφέρειας των τροχών, το οποίο έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{cm}\sqrt{3}$.

ε. την επιτάχυνση του σημείου της περιφέρειας των τροχών, το οποίο απέχει από το έδαφος 80 *cm*, τη χρονική στιγμή t = 5 *s*.

στ. τον αριθμό των περιστροφών κάθε τροχού στο χρονικό διάστημα των 5 πρώτων sec της κίνησης.

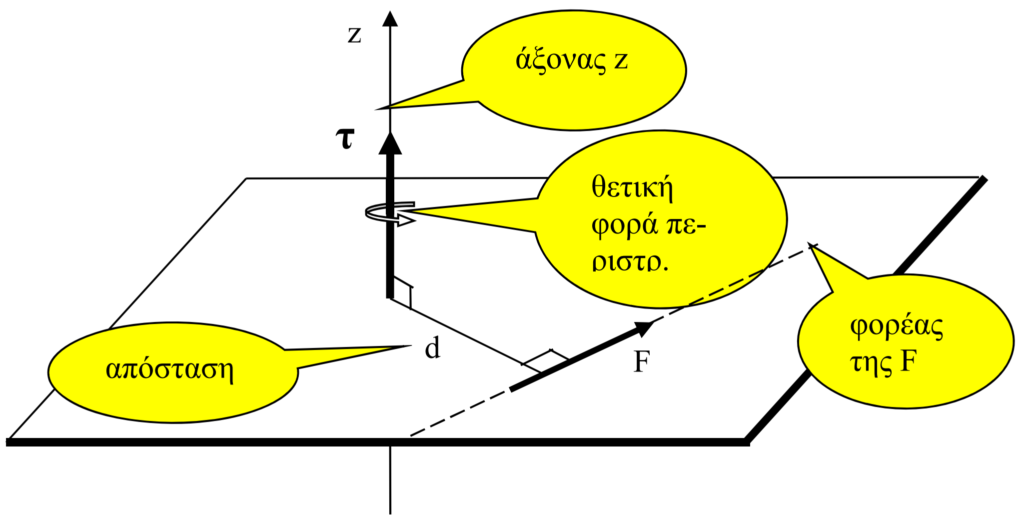
[Απ. 4 m/s^2, 10 rad/s^2, 80 *rad/s*, 60 *cm,* περίπου 1000 m/s^2, 62,5/π]

§4.3 Ροπή δύναμης.

Η ροπή δύναμης είναι διανυσματικό μέγεθος και εκφράζει την ικανότητα της δύναμης να περιστρέψει ένα αρχικά ακίνητο στερεό ή να μεταβάλλει τη στροφική του κατάσταση, γύρω από έναν άξονα. Ταυτόχρονα περιγράφει και τη φορά περιστροφής του σώματος. Συμβολίζεται με το γράμμα **τ** και ορίζεται (σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο) ως προς άξονα και ως προς σημείο. Οι δύο αυτές έννοιες είναι ουσιαστικά ταυτόσημες, χρησιμοποιούμε όμως την έννοια «ροπή δύναμης ως προς σημείο» όταν το στερεό στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος δεν είναι σταθερός.

Α. ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ z.

1. <u>Ο φορέας της δύναμης F ανήκει σε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στον άξονα</u>.



Σχ. 9

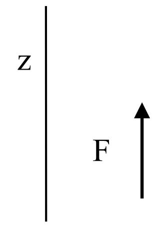
Ορίζουμε ροπή της δύναμης F, κατά τον άξονα z, το διανυσματικό μέγεθος που έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής z, φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση d της δύναμης από τον άξονα περιστροφής z.

$$\boxed{\tau = F \cdot d} \qquad (4.19)$$

Μονάδα της ροπής δύναμης στο S.I. είναι το 1 N·m, το οποίο ΔΕΝ είναι το 1 joule.

2. <u>Ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής z</u>.

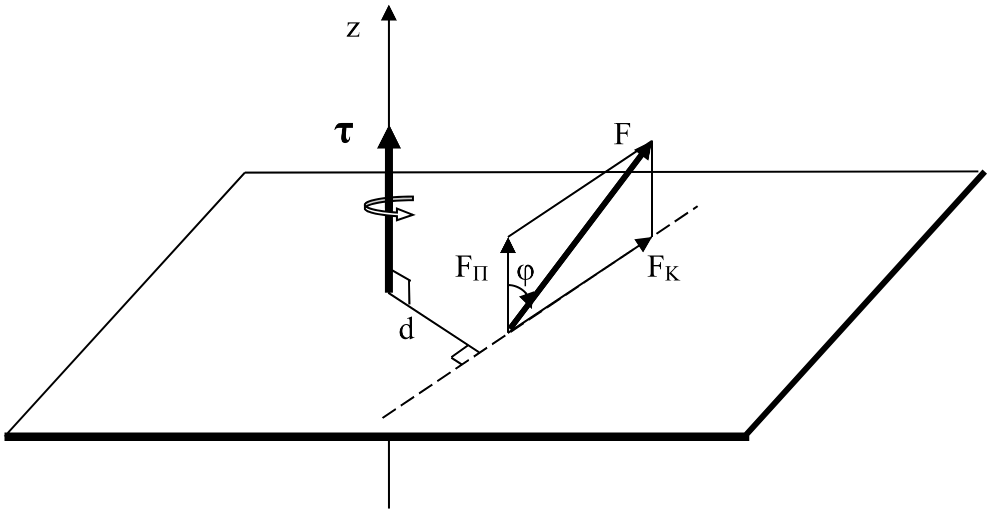
Στην περίπτωση αυτή η δύναμη δεν έχει την ικανότητα να περιστραφεί γύρω από τον άξονα, επομένως η ροπή της είναι ίση με το μηδέν.



$$\boxed{\tau = 0}$$

3. <u>Ο φορέας της δύναμης σχηματίζει γωνία φ με τη διεύθυνση του άξονα z</u>.

Στην περίπτωση αυτή για να υπολογίσουμε τη ροπή της δύναμης αναλύουμε τη δύναμη F σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στον άξονα ($F_Π$) και μία που να ανήκει σε επίπεδο κάθετο στον άξονα (F_K).



Σχ. 11

Για τη ροπή της δύναμης F κατά τον άξονα z θα ισχύει $\tau_F = \tau_{F_Π} + \tau_{F_K}$. (4.20)

(Το **α λ γ ε β ρ ι κ ό** άθροισμα των ροπών των συνιστωσών κατά έναν άξονα είναι ίσο με τη ροπή της συνισταμένης τους κατά τον ίδιο άξονα. (**Θεώρημα των ροπών**)).

Η ροπή της συνιστώσας $F_Π$, σύμφωνα με το προηγούμενο, είναι ίση με μηδέν επειδή είναι παράλληλη στον άξονα. Η ροπή της συνιστώσας F_K, σύμφωνα με την εξίσωση 4.19 είναι $\tau_{F_K} = F_K \cdot d$. Όπως όμως προκύπτει από το σχήμα είναι $F_K = F \cdot ημφ$, άρα η εξίσωση 4.20 γίνεται $\tau_F = \cancel{\tau_{F_Π}} + \tau_{F_K} \Rightarrow \tau_F = F_K \cdot d \Rightarrow \boxed{\tau_F = F \cdot d \cdot ημφ}$. (4.21)

Σύμφωνα με την εξίσωση 4.21 η ροπή μιας δύναμης είναι ΙΣΗ ΜΕ ΜΗΔΕΝ, όταν

α. ημφ = 0, δηλαδή όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα,

β. d = 0, δηλαδή όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα ή όταν η δύναμη ασκείται πάνω στον άξονα.

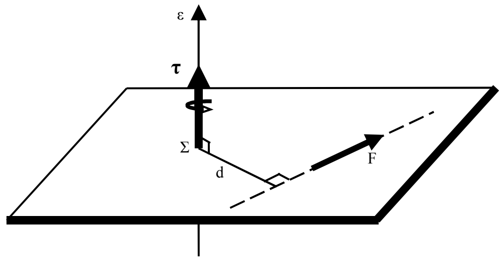
Στις περιπτώσεις αυτές η δύναμη δεν έχει την ικανότητα να περιστραφεί γύρω από τον άξονα.

Β. ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ Σ.

Αν σε ένα ελεύθερο να κινηθεί στερεό ασκηθεί δύναμη F, της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε το στερεό θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας, τότε το στερεό θα εκτελέσει μία σύνθετη κίνηση η οποία μπορεί να αναλυθεί σε μία μεταφορική, σαν η δύναμη να ασκείται στο κέντρο μάζας, και μία στροφική γύρω από έναν νοητό άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τον φορέα της δύναμης και από το κέντρο μάζας.

Στην περίπτωση αυτή, που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής, χρησιμοποιούμε την έννοια της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Ορίζουμε ως ροπή δύναμης F ως προς ένα σημείο Σ το διανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση την ευθεία (ε) που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν ο φορέας της δύναμης και το σημείο Σ[1], φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση d του σημείου Σ από τον φορέα της δύναμης. $\boxed{\tau = F \cdot d}$ (4.22)



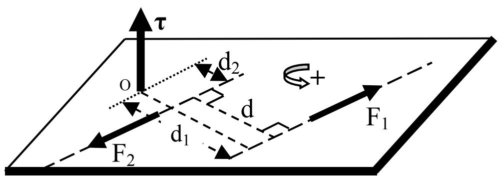
Σχ. 12

Σύμφωνα με την εξίσωση 4.22 η ροπή της δύναμης είναι ΙΣΗ ΜΕ ΜΗΔΕΝ, όταν d = 0, δηλαδή όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο Σ, ή όταν η δύναμη ασκείται στο σημείο Σ.
Στις περιπτώσεις αυτές η δύναμη δεν έχει την ικανότητα να περιστραφεί γύρω από το σημείο.

Γ. ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

ΖΕΥΓΟΣ δυνάμεων ονομάζουμε ένα σύστημα από δύο παράλληλες (και ομοεπίπεδες) δυνάμεις που ασκούνται στο ίδιο σώμα και έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις. $\left(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2\right)$. (4.23)

Έστω ότι σε ένα ελεύθερο να κινηθεί στερεό ασκείται ζεύγος δυνάμεων. Αν μεταφέρουμε τις δυνάμεις που αποτελούν το ζεύγος στο κέντρο μάζας του, τότε επειδή είναι αντίθετες (σχέση 4.23), θα έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν. Συνεπώς το ζεύγος ΔΕΝ μπορεί να μεταφέρει ένα σώμα.



Σχ. 13

➢ ***ΕΡΩΤΗΣΗ:*** Ποιο είναι όμως το αποτέλεσμα του ζεύγους δυνάμεων;

Ας υπολογίσουμε τη ροπή των δυνάμεων που αποτελούν το ζεύγος, ως προς ένα τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου που ορίζουν οι φορείς του ζεύγους.

Θεωρούμε ως ΘΕΤΙΚΗ φορά περιστροφής τη «μαθηματικά» θετική φορά, δηλαδή την **αριστερόστροφη** ή την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

$\tau_{F_1}{}^{(O)} = +F_1 \cdot d_1$ και $\tau_{F_2}{}^{(O)} = -F_2 \cdot d_2$. (Η δύναμη F_1 τείνει να περιστραφεί γύρω από το σημείο Ο αριστερόστροφα (+), ενώ η δύναμη F_2 τείνει να περιστραφεί γύρω από το σημείο Ο δεξιόστροφα (-)). Για τη συνολική ροπή που ασκείται στο στερεό θα ισχύει $\tau_F{}^{(O)} = \tau_{F_1}{}^{(O)} + \tau_{F_2}{}^{(O)} \Rightarrow \tau_F{}^{(O)} = F_1 d_1 - F_2 d_2 \overset{F_1=F_2=F}{\Longrightarrow} \tau_F{}^{(O)} = F\left(d_1 - d_2\right)$. Από το σχήμα 13 προκύπτει ότι $d_1 - d_2 = d$, άρα $\boxed{\tau_F{}^{(O)} = +F \cdot d}$ (4.24)

[1] Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι μία ευθεία και ένα σημείο ορίζουν τη θέση ενός μοναδικού επιπέδου.

Από την εξίσωση 4.24 προκύπτουν τα εξής:

α. Η ροπή του ζεύγους είναι πάντα διάφορη από το μηδέν, γιατί $d \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ΠΑΝΤΑ η περιστροφή του στερεού.

β. Η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Ο, είναι δηλαδή ίδια όπου κι αν είναι το σημείο ή όποια κι αν είναι η θέση του άξονα, ο οποίος πρέπει να είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει το ζεύγος.

γ. Η ροπή του ζεύγους έχει μέτρο που είναι ανάλογο με το μέτρο της μιας δύναμης και με τη μεταξύ τους (κάθετη) απόσταση d. (Η απόσταση αυτή ονομάζεται β ρ α χ ί ο ν α ς του ζεύγους)

δ. Για ελεύθερο στερεό, το σημείο εφαρμογής του διανύσματος της ροπής μπορεί να είναι όπου εμείς θέλουμε (ΕΛΕΥΘΕΡΟ διάνυσμα), εκτός αν το στερεό περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους, οπότε το διάνυσμα της ροπής έχει τη διεύθυνση του άξονα).

➢ ***ΑΠΑΝΤΗΣΗ:*** *Όταν λοιπόν σε ένα ελεύθερο στερεό ασκείται ζεύγος δυνάμεων, το αποτέλεσμα θα είναι μόνο η περιστροφή του στερεού γύρω από νοητό άξονα ο οποίος διέρχεται από το* **κέντρο μάζας του** *και είναι κάθετος στο επίπεδο του ζεύγους.*

§4.4 Ισορροπία στερεού σώματος.

Το βασικό ερώτημα είναι «τι πρέπει να ισχύει για να ισορροπεί ένα σώμα;»
Το σώμα μπορεί να είναι σημειακό αντικείμενο (υλικό σημείο) ή στερεό.
Η απάντηση στο ερώτημα πρέπει να στηρίζεται στο νόμο της αδράνειας.
Πριν όμως απαντήσουμε, ας θυμηθούμε μερικές έννοιες.

Τι σημαίνει ισορροπία; Διαφέρει η ισορροπία από την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενός σημειακού αντικειμένου ή τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ενός στερεού με σταθερή ταχύτητα;

Σας είναι γνωστό ότι όλα τα παραπάνω εξαρτώνται από το ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ. Ένα σώμα μπορεί να κινείται ως προς ένα σύστημα αναφοράς και ταυτόχρονα να ηρεμεί ως προς ένα άλλο. Συνεπώς, αν δεν ορισθεί σαφώς το σύστημα αναφοράς, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε την ηρεμία από την κίνηση.

Για σημειακό αντικείμενο η απαίτηση της ισορροπίας ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς θα μπορούσε να περιγραφεί με τις αλγεβρικές εξισώσεις: $\sum F_x = 0$ και $\sum F_y = 0$. Όμως οι δύο αυτές εξισώσεις μας εξασφαλίζουν και την ηρεμία του σημειακού αντικειμένου; Η απάντηση είναι όχι. Εξαρτάται και από την προϋπάρχουσα κινητική κατάσταση του σώματος. Αν το σώμα ήταν ακίνητο, θα παραμείνει ακίνητο, ενώ αν κινείται θα εξακολουθήσει να κινείται (εννοείται ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς).

Η διαφορά του σημειακού αντικειμένου από ένα στερεό σώμα, σε ότι αφορά την κίνηση ή την ηρεμία, είναι ότι το στερεό μπορεί επιπλέον να περιστραφεί. Έτσι λοιπόν η απαίτηση της ισορροπίας για ένα στερεό σώμα πρέπει να συμπληρωθεί.

Αν θυμηθούμε ότι το αίτιο της περιστροφής είναι η ροπή δύναμης, αρκεί να απαιτήσουμε να είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων ΩΣ ΠΡΟΣ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΣΗΜΕΙΟ ή ΑΞΟΝΑ ίση με μηδέν. Τότε το στερεό θα ισορροπεί. Θα είναι όμως ακίνητο, μόνο αν ήταν ακίνητο, δηλαδή αν είχε μηδενική ταχύτητα και μηδενική γωνιακή ταχύτητα.
Ένα στερεό θα ισορροπεί όταν ισχύουν ταυτόχρονα οι αλγεβρικές εξισώσεις:

$$\boxed{\sum \tau = 0 \text{ και } \sum F_x = 0 \text{ και } \sum F_y = 0}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:
Αν $\Sigma\tau = 0$ και $\Sigma F \neq 0$, τότε το σώμα θα ισορροπεί στροφικά (θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ή δε θα στρέφεται αν $\omega_0 = 0$), ενώ η μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του θα είναι μεταβαλλόμενη.
Αν $\Sigma\tau \neq 0$ και $\Sigma F = 0$, τότε το στερεό θα εκτελεί μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση και θα ισορροπεί μεταφορικά (το κέντρο μάζας του θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή θα παραμένει ακίνητο αν $\upsilon_{cm,0} = 0$).
Αν $\Sigma\tau \neq 0$ και $\Sigma F \neq 0$, τότε το στερεό θα εκτελεί μεταβαλλόμενη κίνηση τόσο στροφική όσο και μεταφορική.

<table>
<tr><th>Στ</th><th>ΣF</th><th>ω_0</th><th>Στροφική</th><th>$\upsilon_{cm,0}$</th><th>Μεταφορική</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$=0$</td><td rowspan="4">$=0$</td><td rowspan="2">$=0$</td><td rowspan="2">ακίνητο</td><td>$=0$</td><td>ακίνητο</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td><td>Ευθ. ομαλή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td rowspan="2">ομαλή</td><td>$=0$</td><td>ακίνητο</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td><td>Ευθ. ομαλή</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$=0$</td><td rowspan="4">$\neq 0$</td><td rowspan="2">$=0$</td><td rowspan="2">ακίνητο</td><td>$=0$</td><td rowspan="4">Μεταβαλλό-μενη</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td rowspan="2">ομαλή</td><td>$=0$</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\neq 0$</td><td rowspan="4">$=0$</td><td rowspan="2">$=0$</td><td rowspan="4">Μεταβαλλό-μενη</td><td>$=0$</td><td>ακίνητο</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td><td>Ευθ. ομαλή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td>$=0$</td><td>ακίνητο</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td><td>Ευθ. ομαλή</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\neq 0$</td><td rowspan="4">$\neq 0$</td><td rowspan="2">$=0$</td><td rowspan="4">Μεταβαλλό-μενη</td><td>$=0$</td><td rowspan="4">Μεταβαλλό-μενη</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td>$=0$</td></tr>
<tr><td>$\neq 0$</td></tr>
</table>

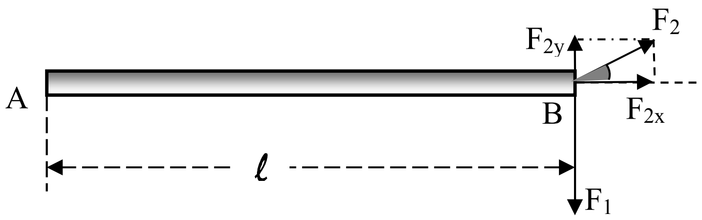
- ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΡΙΩΝ ΜΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

> Αν ένα στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται ΑΚΡΙΒΩΣ ΤΡΕΙΣ μη παράλληλες ομοεπίπεδες δυνάμεις ισορροπεί, τότε οι φορείς των τριών αυτών δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη: Επειδή οι δυνάμεις δεν είναι παράλληλες, ανά δύο θα τέμνονται. Ονομάζουμε Α το σημείο τομής των δύο εξ αυτών, έστω των F_1 και F_2. Επειδή το στερεό ισορροπεί πρέπει $\Sigma\tau = 0$, ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα και ως προς το Α.

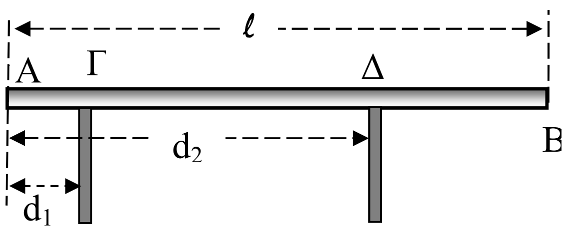
Έτσι λοιπόν οι ροπές των δυνάμεων F_1 και F_2 ως προς το σημείο Α θα είναι μηδέν.
$\Sigma\tau^{(A)} = 0 \Rightarrow \cancel{\tau_{F_1}{}^{(A)}} + \cancel{\tau_{F_2}{}^{(A)}} + \tau_{F_3}{}^{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_{F_3}{}^{(A)} = 0$. Επομένως και η ροπή της F_3 ως προς το σημείο Α είναι ίση με το μηδέν.
Αυτό σημαίνει ότι και η δύναμη F_3 διέρχεται από το σημείο Α.

Παράδειγμα 4.3 Μια αβαρής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ = 6 m μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Στο άκρο Β της ράβδου ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις με μέτρα F_1 = 10 N και F_2 = 2 N. Η δύναμη F_1 είναι κάθετη στη ράβδο, ενώ η F_2 σχηματίζει γωνία 30^0 με τον άξονα της ράβδου και γωνία 120^0 με τον φορέα της F_1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή των δύο δυνάμεων ως προς το άκρο Α.



Λύση
Θεωρούμε σα θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη (την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού).
Η δύναμη F_1 τείνει να περιστραφεί γύρω από το σημείο Α δεξιόστροφα.
Επομένως για την αλγεβρική τιμή της ροπής της δύναμης F_1 ως προς το σημείο Α ισχύει
$\tau_{F_1}{}^{(A)} = -F_1 \cdot \ell$. (4.3.1)
Για να υπολογίσουμε τη ροπή της δύναμης F_2, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου και μία σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Ισχύει ότι $\vec{\tau}_{F_2}{}^{(A)} = \vec{\tau}_{F_{2x}}{}^{(A)} + \vec{\tau}_{F_{2y}}{}^{(A)}$. (4.3.2)
Η ροπή της συνιστώσας F_{2x} είναι ίση με μηδέν γιατί ο φορέας της διέρχεται από το σημείο Α.
Για την αλγεβρική τιμή της ροπής της συνιστώσας F_{2y} ισχύει ότι $\tau_{F_{2y}} = +F_{2y}\ell$. (4.3.3)
Για τη συνιστώσα F_{2y} ισχύει F_{2y} = F_2 ημ30^0. Άρα η 4.3.2 με τη βοήθεια και της 4.3.3 γράφεται, αλγεβρικά, $\tau_{F_2} = 0 + F_2 \cdot \eta\mu 30^0 \cdot \ell$.
Για τη συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ισχύει: $\tau_{o\lambda} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \overset{4.3.1}{\Rightarrow}$
$\tau_{o\lambda} = -F_1 \cdot \ell + F_2 \cdot \ell \cdot \eta\mu 30^0 \Rightarrow \tau_{o\lambda} = -10\text{N} \cdot 6\text{m} + 2\text{N} \cdot 6\text{m} \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tau_{o\lambda} = (-60+6)\text{Nm} \Rightarrow$
$\tau_{o\lambda} = -54\text{Nm}$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ράβδος ΑΒ, εξαιτίας των δύο δυνάμεων, θα περιστραφεί δεξιόστροφα.

Παράδειγμα 4.4 Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους ℓ = 8 m και βάρους w = 1000 N, στηρίζεται σε δύο σημεία της Γ και Δ, τα οποία απέχουν από το άκρο της Α αποστάσεις d_1 = 1 m και d_2 = 5 m, αντίστοιχα.



Ένας άνθρωπος βάρους w_1 = 1000 N βρίσκεται ακίνητος στο άκρο της Α. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια. Να υπολογίσετε

α. τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα υποστηρίγματα στη δοκό, στα σημεία Γ και Δ.

β. Μέχρι ποια απόσταση από το άκρο Β μπορεί να βαδίσει ο άνθρωπος χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

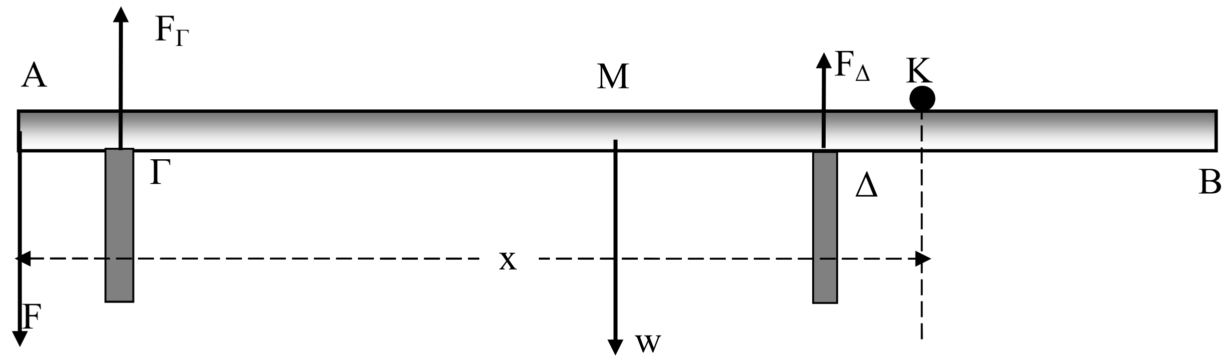
Λύση

α. Αρχικά πρέπει να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

Στη δοκό ασκούνται: Μία δύναμη εξ αποστάσεως, που είναι το βάρος της w, με σημείο εφαρμογής το μέσο της δοκού και τρεις δυνάμεις εξ επαφής· μία από τα πόδια του ανθρώπου στο σημείο Α και δύο από τα υποστηρίγματα στα σημεία Γ και Δ.

Η δύναμη F που ασκείται στη δοκό από τα πόδια του ανθρώπου είναι κατά μέτρο ίση με τη δύναμη F΄ που ασκείται στον άνθρωπο από τη δοκό, ως δράση – αντίδραση. Επειδή ο άνθρωπος, ως σημειακό αντικείμενο, ισορροπεί υπό την επίδραση δύο αντίρροπων δυνάμεων, του βάρους του w_1 και της F΄, πρέπει να ισχύει η συνθήκη ισορροπίας ΣF = 0. Συνεπώς πρέπει F΄ - w_1 = 0 ή F΄ = w_1. Επειδή όμως F΄ = F προκύπτει F = w_1.

Οι δυνάμεις στα σημεία Γ και Δ, ως δυνάμεις στήριξης, είναι κατακόρυφες (κάθετες στη δοκό) με φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Επειδή η δοκός ισορροπεί πρέπει να ισχύει Στ = 0 ως προς οποιοδήποτε άξονα ή σημείο. Επιλέγουμε ένα σημείο από το οποίο να διέρχεται μία από τις άγνωστες δυνάμεις, ώστε η ροπή της ως προς το σημείο αυτό να είναι ίση με μηδέν. Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο Δ από το οποίο διέρχεται η άγνωστη δύναμη $F_Δ$.

$\Sigma\tau^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \tau_F^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} + \cancel{\tau_{F_\Delta}^{(\Delta)}} = 0 \Rightarrow \tau_{w_1}^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} = 0$. Ορίζουμε σα θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη, οπότε

$$+F\cdot(A\Delta) - F_\Gamma\cdot(\Gamma\Delta) + w\cdot(M\Delta) = 0 \Rightarrow w_1\cdot d_2 - F_\Gamma\cdot(d_2 - d_1) + w\cdot\left(d_2 - \frac{\ell}{2}\right) \Rightarrow$$

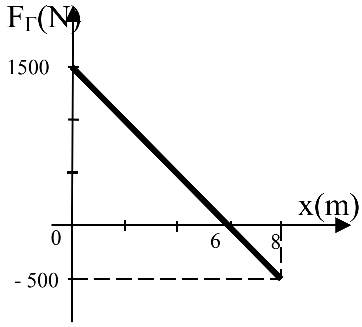
$$F_\Gamma\cdot(5m - 1m) = 1000N\cdot 5m + 1000N\cdot\left(5m - \frac{8m}{2}\right) \Rightarrow F_\Gamma\cdot 4m = 5000Nm + 1000Nm \Rightarrow$$

$\boxed{F_\Gamma = 1500Nm}$.

Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε άλλο σημείο π.χ το Γ και να εφαρμόσουμε ξανά τη συνθήκη Στ = 0 ως προς το σημείο αυτό ή να εφαρμόσουμε τη συνθήκη ΣF = 0. Επιλέγουμε εδώ το δεύτερο τρόπο.

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + w - F_\Gamma - F_\Delta = 0 \Rightarrow F_\Delta = w_1 + w - F_\Gamma \Rightarrow \boxed{F_\Delta = 500N}$

β. Όταν ο άνθρωπος βαδίσει προς το άλλο άκρο της δοκού, το μέτρο της δύναμης F_Γ από το στήριγμα θα αρχίσει να μειώνεται συνεχώς. Αφού ο άνθρωπος περάσει το σημείο Δ, υπάρχει περίπτωση η δύναμη F_Γ να μηδενιστεί, οπότε η δοκός θα αρχίσει να ανατρέπεται. Έστω Κ ένα σημείο στο οποίο βρίσκεται ο άνθρωπος πριν η δοκός ανατραπεί (αν ανατραπεί) και έστω x η απόσταση ΚΑ. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη F_Γ σε συνάρτηση με το x. Επειδή η δοκός εξακολουθεί να ισορροπεί οριζόντια, θα ισχύει η συνθήκη Στ = 0. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη αυτή ως προς το σημείο Δ: $\Sigma\tau^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \tau_F^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} + \cancel{\tau_{F_\Delta}^{(\Delta)}} = 0 \Rightarrow$



$$\tau_{w_1}^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -w_1 \cdot (x - d_2) - F_\Gamma \cdot (d_2 - d_1) + w \cdot \left(d_2 - \frac{\ell}{2}\right) = 0 \overset{(S.I)}{\Rightarrow}$$

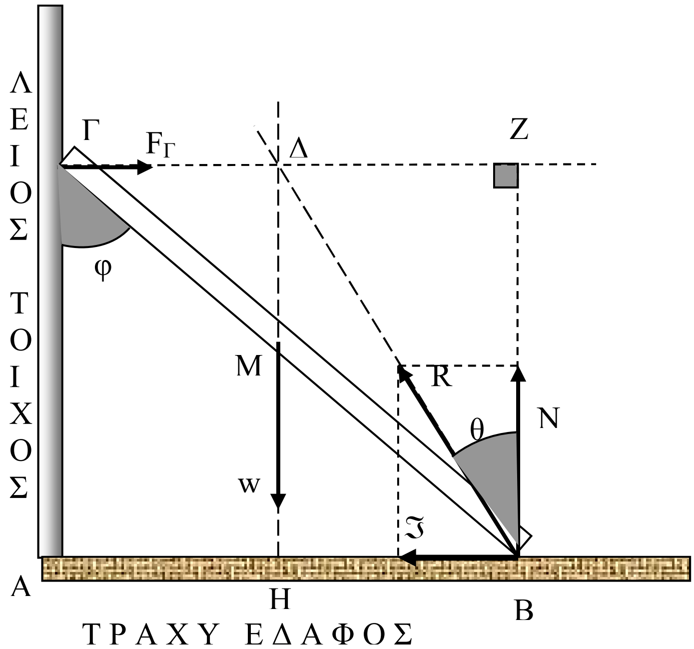
$$-1000 \cdot (x - 5) - F_\Gamma \cdot (5 - 1) + 1000 \cdot \left(5 - \frac{8}{2}\right) = 0 \Rightarrow 4F_\Gamma = -1000x + 6000 \Rightarrow F_\Gamma = -250x + 1500$$

(S.I.)

Για να μην ανατραπεί η δοκός πρέπει να ισχύει $F_\Gamma \geq 0 \Rightarrow -250x + 1500 \geq 0 \Rightarrow x \leq 6m$.

Επομένως ο άνθρωπος μπορεί να βαδίσει πάνω στη δοκό χωρίς αυτή να ανατραπεί μέχρι ένα σημείο Κ το οποίο απέχει από το άκρο Α απόσταση το πολύ 6 m ή το λιγότερο απόσταση $\ell - x = 2\,m$, από το άκρο Β της δοκού.

Παράδειγμα 4.5 Μια ομογενής δοκός ΒΓ μήκους ℓ και βάρους w, ισορροπεί με το άκρο της Γ ακουμπισμένο σε λείο κατακόρυφο τοίχο και άλλο άκρο της Β σε επαφή με οριζόντιο έδαφος. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και να υπολογίσετε τα μέτρα τους. Δίνεται και η γωνία φ που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον κατακόρυφο τοίχο.



Λύση

Στη δοκό ασκούνται τρεις δυνάμεις, μία εξ αποστάσεως, το βάρος της και δύο εξ επαφής, μία με τον λείο τοίχο και μία με το τραχύ έδαφος.

Η δύναμη του βάρους w είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και σημείο εφαρμογής το μέσον Μ της δοκού, ενώ η δύναμη στήριξης F_Γ από τον λείο τοίχο είναι κάθετη στον τοίχο. Η τρίτη δύναμη R από το έδαφος, μπορεί να σχεδιαστεί τυχαία, επειδή όμως είναι η τρίτη δύναμη μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να διέρχεται από το σημείο τομής Δ των δύο άλλων (βλέπε σχήμα).

Η δύναμη αυτή αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους δυνάμεις, την τριβή $\Im$ και την κάθετη δύναμη στήριξης N. Είναι $\Im$ = R ημθ και N =R συνθ.

Επειδή δοκός ισορροπεί πρέπει Στ = 0. Για την εφαρμογή της συνθήκης επιλέγουμε το σημείο Β της ράβδου, από το οποίο διέρχονται ουσιαστικά δύο άγνωστες δυνάμεις ($\Im$ και N). $\Sigma\tau^{(B)}=0 \Rightarrow \tau_{F_\Gamma}^{(B)}+\tau_w^{(B)}+\cancel{\tau_R^{(B)}}=0 \Rightarrow -F_\Gamma\cdot(BZ)+w\cdot(BH)=0$. Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι (BZ) = ℓ συνφ και $(BH)=\frac{\ell}{2}\cdot$ημφ. Άρα

$$-F_\Gamma\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\varphi=0 \Rightarrow \boxed{F_\Gamma=\frac{w}{2}\varepsilon\varphi\varphi}.$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια και τις συνθήκες $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l}F_\Gamma-T=0\\ N-w=0\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l}F_\Gamma=T\\ N=w\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l}T=\frac{w}{2}\varepsilon\varphi\varphi\\ N=w\end{array}\right\rangle \qquad (4.5.1)$$

Επομένως $R=\sqrt{N^2+T^2} \Rightarrow R=\sqrt{w^2+\frac{w^2}{4}\varepsilon\varphi^2\varphi} \Rightarrow R=\frac{w}{2}\sqrt{4+\varepsilon\varphi^2\varphi}$

Για τη γωνία θ ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{T}{N} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{2}$.

➢ ΔΥΝΑΜΗ ΤΡΙΒΗΣ

Στη μελέτη της κίνησης των στερεών σωμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η δύναμη της τριβής. Είναι, σε πολλές περιπτώσεις, το αίτιο της περιστροφής τους. Αν, π.χ. αφήσουμε μία σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί από την κορυφή ενός πλάγιου επιπέδου, αυτή θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση μόνο αν μεταξύ σφαίρας και επιπέδου υπάρχει τριβή. Αν το επίπεδο είναι λείο ή η σφαίρα είναι λεία (ή και τα δύο) τότε η κίνηση της σφαίρας θα είναι μόνο μεταφορική. Η δύναμη της τριβής, στην περίπτωση αυτή, είναι η μοναδική που θα μπορούσε να δημιουργήσει την απαραίτητη ροπή για να στραφεί το στερεό.

Όπως είναι γνωστό υπάρχουν δύο είδη δύναμης τριβής, η ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ (ή διαφορετικά Κινητική Τριβή) και η ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ.

Η **Τριβή ολίσθησης ($\Im_K$)** εμφανίζεται όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο και είναι η μία συνιστώσα της δύναμης επαφής που ασκείται στο σώμα από το επίπεδο. Έχει σημείο εφαρμογής το σημείο επαφής του σώματος με το επίπεδο και κατεύθυνση αντίρροπη από την ταχύτητα του σώματος. Το μέτρο της τριβής ολίσθησης δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\Im_K=\mu_k\cdot N} \qquad (4.25)$$

όπου N είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης στήριξης από το επίπεδο (η άλλη συνιστώσα της δύναμης επαφής) και μ_κ είναι ένας καθαρός θετικός αριθμός που ονομάζεται συντελεστής τριβής ολίσθησης (σ.τ.ο.) και εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που τρίβονται και από τη θερμοκρασία. Η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη από το εμβαδό των επιφανειών και από το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, αρκεί να μην είναι πολύ μεγάλο. Εξαρτάται όμως, όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού της 4.25, από την κάθετη δύναμη στήριξης, από τη φύση των επιφανειών και από τη θερμοκρασία (την οποία όμως θεωρούμε σταθερή).

Η **Στατική Τριβή ($\mathfrak{I}_s$)** εμφανίζεται όταν το σώμα είναι ακίνητο αλλά έχει την τάση να κινηθεί εξ αιτίας κάποιας δύναμης. Επειδή το σώμα παραμένει ακίνητο, το μέτρο της στατικής τριβής είναι πάντα ίσο με το μέτρο της δύναμης (ή της συνιστώσας της δύναμης στον ίδιο άξονα) που προσπαθεί να κινήσει το σώμα. Επομένως για το μέτρο της στατικής τριβής δεν υπάρχει κάποια σχέση όπως η 4.25 που να το υπολογίζει απ ευθείας.

Υπάρχει όμως μία μέγιστη τιμή του μέτρου της στατικής τριβής, για την οποία το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί. Η τριβή αυτή ονομάζεται ΜΕΓΙΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ ($\mathfrak{I}_{s,\,max}$) ή ΟΡΙΑΚΗ ΤΡΙΒΗ. Η σχέση από την οποία υπολογίζεται το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής είναι $\boxed{\mathfrak{I}_{s,max} = \mu_s \cdot N}$ (4.26)

όπου μ_s είναι ο συντελεστής στατικής τριβής, ο οποίος θεωρητικά είναι λίγο μεγαλύτερος από τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_k αλλά συνήθως τους θεωρούμε ίσους.

ΤΡΙΒΗ και ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ.

Όταν ένα στερεό σώμα κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), το σημείο επαφής του με το επίπεδο στο οποίο κυλίεται, έχει κάθε στιγμή ταχύτητα ίση με το μηδέν. Η δύναμη τριβής που του ασκείται από το επίπεδο είναι ΣΤΑΤΙΚΗ, επομένως μικρότερη από την $\mathfrak{I}_{s,max}$.

Όταν το στερεό κυλίεται και ταυτόχρονα ολισθαίνει στο επίπεδο, η δύναμη τριβής είναι ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ, δηλαδή $\mathfrak{I}_k = \mu_k N$. Επομένως για να μην ολισθαίνει ένα στερεό πρέπει για τη δύναμη τριβής να ισχύει η συνθήκη: $\mathfrak{I} \le \mathfrak{I}_{s,max}$, δηλαδή $\boxed{\mathfrak{I} \le \mu_s \cdot N}$ (4.27)

Η σχέση 4.27 αποτελεί την <u>ΕΚΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΛΙΣΗΣ</u>.

Όπως θα δικαιολογήσουμε στην ενότητα για τις ενέργειες, κατά την κύλιση ενός στερεού, **το έργο της στατικής τριβής είναι ίσο με μηδέν.** Έτσι αν στο στερεό ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις και η στατική τριβή, τότε μπορούμε για την κίνησή του, να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.).

Παράδειγμα 4.6 Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ της δοκού ΒΓ και του εδάφους, στο προηγούμενο παράδειγμα 4.5, ώστε η δοκός να ισορροπεί.

Λύση

$$\text{Πρέπει}: \mathfrak{I} \le \mathfrak{I}_{s,max} \Rightarrow \mathfrak{I} \le \mu_s \cdot N \overset{(4.5.1)}{\Longrightarrow} \frac{w}{2}\varepsilon\phi\varphi \le \mu_s \cdot w \Rightarrow \mu_s \ge \frac{1}{2}\varepsilon\phi\varphi \Rightarrow$$

$$\mu_{s,\min} = \frac{1}{2}\varepsilon\phi\varphi$$

§4.5 Κινητική Ενέργεια – Ροπή Αδράνειας.

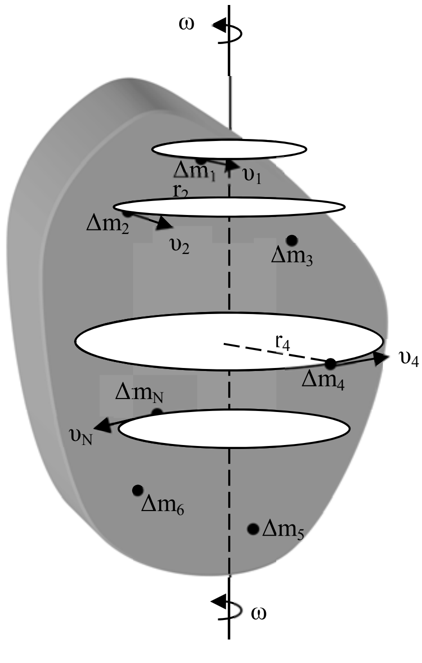
Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ, έχει κινητική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση $\boxed{K = \frac{1}{2}m\upsilon^2}$ (4.28)

Ένα στερεό σώμα έχει τη δυνατότητα

- **i.** να στρέφεται γύρω από άξονα ή
- **ii.** να μεταφέρεται ή
- **iii.** να εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Έστω ένα στερεό τυχαίου σχήματος το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρούμε ότι το στερεό αποτελείται από ένα σύνολο σημειακών μαζών Δm_1, Δm_2, Δm_3, …, Δm_N.

Όσες από τις μάζες αυτές δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής θα κινούνται σε παράλληλες κυκλικές τροχιές, των οποίων τα κέντρα θα βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής. Έστω Δm_1, Δm_2, Δm_3, …, Δm_N οι στοιχειώδης μάζες που δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα και r_1, r_2, r_3, …, r_N οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών τους αντίστοιχα.



Όλες οι μάζες αυτές θα έχουν κάθε στιγμή την ίδια γωνιακή ταχύτητα, ίση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού. Τα μέτρα των (γραμμικών) ταχυτήτων τους θα είναι:

$\upsilon_1 = \omega\, r_1$, $\upsilon_2 = \omega\, r_2$, $\upsilon_3 = \omega\, r_3$, …, $\upsilon_N = \omega\, r_N$ και η κινητική ενέργεια θα είναι αντίστοιχα :

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}\Delta m_1 \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{1}{2}\Delta m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2,$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2}\Delta m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow \Delta K_2 = \frac{1}{2}\Delta m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2,$$

$$\Delta K_3 = \frac{1}{2}\Delta m_3 \cdot \upsilon_3^2 \Rightarrow \Delta K_3 = \frac{1}{2}\Delta m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2$$

$$\vdots$$

$$\Delta K_N = \frac{1}{2}\Delta m_N \cdot \upsilon_N^2 \Rightarrow \Delta K_N = \frac{1}{2}\Delta m_N \cdot \omega^2 \cdot r_N^2.$$

Για την κινητική ενέργεια του στερεού θα ισχύει ότι $K = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3 + \ldots + \Delta K_N$. Αντικαθιστούμε και ταυτόχρονα βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\frac{1}{2}\omega^2$

$$K = \frac{1}{2}\left(\Delta m_1 \cdot r_1^2 + \Delta m_2 \cdot r_2^2 + \Delta m_3 \cdot r_3^2 + \ldots \Delta m_N \cdot r_N^2\right)\omega^2, \qquad (4.29)$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε και σε ποιο σύντομη μορφή σαν $K = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\left(\Delta m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \omega^2$.

(Ποιο σωστά, αντί για το σύμβολο του αθροίσματος $\left(\sum\right)$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του ολοκληρώματος $\left(\int\right)$).

Στην εξίσωση 4.29 η αριθμητική τιμή της παρένθεσης εξαρτάται από

α. τη μάζα του στερεού

β. τη θέση του άξονα περιστροφής

γ. την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής και

δ. από το σχήμα του στερεού.

Συμβολίζουμε με Ι την παρένθεση αυτή και την ονομάζουμε ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής, δηλαδή

$$I = \Delta m_1 \cdot r_1^2 + \Delta m_2 \cdot r_2^2 + \Delta m_3 \cdot r_3^2 + \ldots \Delta m_N \cdot r_N^2 . \qquad (4.30)$$

Ο τρόπος υπολογισμού της ροπής αδράνειας διαφέρει από στερεό σε στερεό, απαιτεί πολλές φορές γνώση μαθηματικών που ξεφεύγει από τα όρια του σχολείου και για τον λόγο αυτόν δεν απαιτείται. Εξαίρεση αποτελεί ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας του ομογενούς δακτυλίου (βλέπε παράδειγμα 4.7).

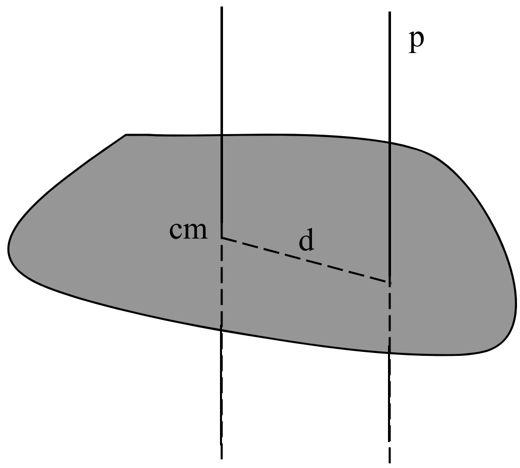
Για τη ροπή αδράνειας ισχύει η **προσθετική ιδιότητα**: Η ροπή αδράνειας ενός συστήματος στερεών που στρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα, είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας του κάθε μέλους του συστήματος, ως προς τον ίδιο άξονα.

Μονάδα της ροπής αδράνειας στο **S.I.** είναι το **1 kg m²**.

Με τη βοήθεια της σχέσης 4.30 η κινητική ενέργεια ενός στερεού λόγω της στροφικής κίνησής του γύρω από άξονα (εξίσωση 4.29) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \qquad (4.31)$$

➢ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ (θεώρημα Steiner)



Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού μάζας Μ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε η ροπή αδράνειας του ίδιου στερεού ως προς άξονα p που είναι παράλληλος προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και απέχει από αυτόν απόσταση d, είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας I_{cm} και του γινομένου της μάζας Μ του στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης d.

$$I_p = I_{cm} + M \cdot d^2 \qquad (4.32)$$

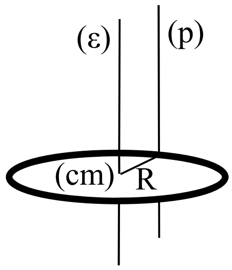
Όπως προκύπτει από τη σχέση 4.32 η μικρότερη τιμή της ροπής αδράνειας, για παράλληλους άξονες, είναι ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Παράδειγμα 4.7 Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας ενός ομογενούς λεπτού δακτυλίου μάζας Μ και ακτίνας R, ως προς άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται

α. από το κέντρο μάζας του και

β. από ένα σημείο της περιφέρειάς του.

Λύση



Στον δακτύλιο η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του και εφόσον είναι ομογενής το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο.

α. Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας θα γίνει με εφαρμογή του ορισμού (σχέση 4.30). Χωρίζουμε τη μάζα του σε στοιχειώδης μάζες Δm_1, Δm_2, Δm_3, …, Δm_N. Οι αντίστοιχες αποστάσεις των μαζών αυτών από τον άξονα περιστροφής (ε) που διέρχεται από το κέντρο μάζα είναι $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r_3 = \ldots = \Delta r_N = R$. Επομένως η σχέση 4.30 γράφεται

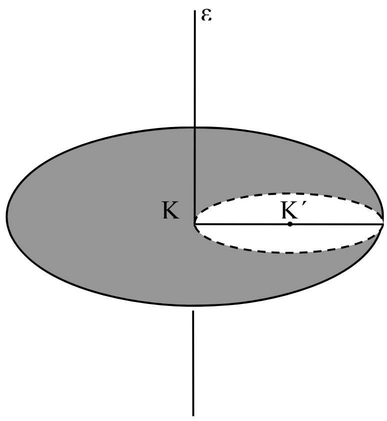
$$I_{cm} = \Delta m_1 \cdot R^2 + \Delta m_2 \cdot R^2 + \Delta m_3 \cdot R^2 + \ldots \Delta m_N \cdot R^2 \Rightarrow I_{cm} = \left(\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \ldots \Delta m_N\right) R^2$$

Επειδή ο άξονας (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον δακτύλιο, το άθροισμα των στοιχειωδών μαζών είναι ίσο με τη μάζα του δακτυλίου $\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \ldots \Delta m_N = M$

Επομένως $\boxed{I_{cm} = MR^2}$. (4.7.1)

β. Ο άξονας (p) είναι παράλληλος με τον άξονα (ε) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του δακτυλίου και απέχει από αυτόν απόσταση d = R. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Steiner για τους παράλληλους άξονες p και ε: $I_p = I_{cm} + Md^2 \overset{(4.7.1)}{\Longrightarrow} I_p = MR^2 + MR^2 \Rightarrow \boxed{I_p = 2MR^2}$

Παράδειγμα 4.8 Ένας λεπτός ομογενής και ισοπαχής κυκλικός δίσκος έχει μάζα Μ και ακτίνα R. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα (ε) που διέρχεται από το κέντρο του Κ και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα (ε) του στερεού που απομένει όταν αφαιρέσουμε ένα τμήμα του που έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$ και κέντρο ένα σημείο Κ΄ ώστε ΚΚ΄= $\frac{R}{2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Για τη ροπή αδράνειας ισχύει η προσθετική ιδιότητα, δηλαδή $I_{(\varepsilon)} = I_{1(\varepsilon)} + I_{2(\varepsilon)}$, (4.8.1)

όπου Ι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα (ε) του συμπαγούς δίσκου και I_1, I_2 οι ροπές αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα (ε) των δύο τμημάτων που αποτελούν το στερεό.

Δίνεται $I_{(\varepsilon)} = I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας Ι2 του τμήματος που αφαιρέσαμε . Είναι $I_{2,cm} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mR^2$, (4.8.2)

όπου m η μάζα του τμήματος που αφαιρέσαμε. Από το θεώρημα Steiner υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας Ι2 ως προς τον παράλληλο άξονα (ε).

$$I_{2(\varepsilon)} = I_{2,cm} + md^2 \overset{(4.8.2)}{=} \frac{1}{8}mR^2 + m\frac{R^2}{4} \Rightarrow I_{2(\varepsilon)} = \frac{3}{8}mR^2 . \quad (4.8.3)$$

Επειδή ο δίσκος είναι ομογενής, έχει σταθερή πυκνότητα. Είναι $\rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{V'} \Rightarrow$

$$\frac{M}{S \cdot \cancel{h}} = \frac{m}{S' \cdot \cancel{h}} \Rightarrow \frac{M}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}} = \frac{m}{\cancel{\pi}\frac{\cancel{R^2}}{4}} \Rightarrow M = 4m \Rightarrow m = \frac{M}{4}$$

Αντικαθιστούμε στην 4.8.3: $I_{2(\varepsilon)} = \frac{3}{8}\frac{M}{4}R^2 \Rightarrow I_{2(\varepsilon)} = \frac{3}{32}MR^2$. Με αντικατάσταση στην 4.8.1 παίρνουμε $\frac{1}{2}MR^2 = I_1 + \frac{3}{32}MR^2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{3}{32}MR^2 \Rightarrow I_1 = \frac{13}{32}MR^2$

§4.6 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Είναι γνωστό ότι για να μεταβληθεί η κινητική κατάσταση ενός σημειακού αντικειμένου σταθερής μάζας, πρέπει να του ασκηθεί (συνισταμένη) δύναμη. Η σχέση που συνδέει το αίτιο (συνισταμένη δύναμη) και στο αποτέλεσμα (επιτάχυνση) περιγράφεται από το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. (4.33)

Αντίστοιχος νόμος ισχύει και για ένα στερεό σώμα. Δηλαδή για να μεταβληθεί η στροφική κατάσταση ενός στερεού, το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ως προς τον οποίο έχει σταθερή ροπή αδράνειας, πρέπει να ασκηθεί σε αυτό (συνισταμένη) ροπή. Η σχέση που συνδέει το αίτιο (συνισταμένη ροπή) με το αποτέλεσμα (γωνιακή επιτάχυνση) περιγράφεται από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης: $\boxed{\Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}}$ (4.34)

Σύμφωνα με τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης (ΘΝΣΚ),

> το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων ως προς τον ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ περιστροφής του, ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς τον ίδιο άξονα και της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού.

Από τον ΘΝΣΚ προκύπτει ότι η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ένα στερεό όταν του ασκείται σταθερή ροπή, είναι αντίστροφα ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του στερεού.

Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας τόσο δυσκολότερα αλλάζει η στροφική του κατάσταση. Αντίστοιχα, στη μηχανική του σημειακού αντικειμένου, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του τόσο δυσκολότερα αλλάζει η κινητική του κατάσταση.
Επομένως η ροπή αδράνειας για ένα στερεό εκφράζει ότι και η μάζα για ένα σημειακό αντικείμενο, δηλαδή το μέτρο της αδράνειας του σώματος.

Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση.

Από τη σχέση 4.34 προκύπτει επίσης ότι αν στο στερεό το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι ίσο με μηδέν, τότε και η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το στερεό διατηρεί την κινητική του κατάσταση, δηλαδή αν είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να παραμένει ακίνητο, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Ο ΘΝΣΚ όπως διατυπώθηκε αναφέρεται σε στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που το στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση όπου ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται; Τα συμπεράσματα εξακολουθούν να ισχύουν αρκεί ο άξονας

α. να διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού,

β. να είναι άξονας συμμετρίας του στερεού και

γ. να μην αλλάζει προσανατολισμό (δηλαδή να μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του).

Επομένως για ένα στερεό που εκτελεί σύνθετη κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, είναι άξονας συμμετρίας και δεν αλλάζει προσανατολισμό, ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma\tau = \mathrm{I}\alpha_{\gamma\omega\nu}$, $\Sigma F = ma_{cm}$.

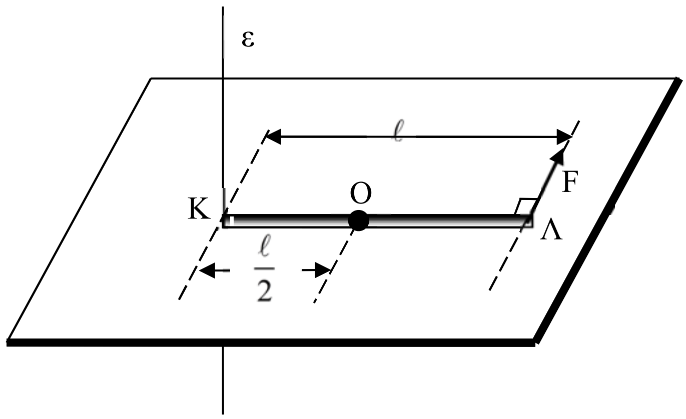
Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής είναι σταθερό, τότε το στερεό αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. $\Sigma\tau = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Αν και η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή τότε είναι και a_{cm} = σταθ.

Για την κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις 4.9 έως 4.12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t,\ \Delta\theta = \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2,\ \upsilon_{cm} = \upsilon_{cm,0} + a_{cm}\cdot t \ \text{ και } \ \Delta x = \upsilon_{cm,0}\cdot t + \frac{1}{2}a_{cm}\cdot t^2$$

Παράδειγμα 4.9 Ομογενής ράβδος ΚΛ μήκους $\ell = 1m$ και μάζας Μ = 3 kg, μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Κ και είναι κάθετος στη ράβδο. Στο μέσο Ο της ράβδου είναι στερεωμένο σώμα Σ με μάζα m = 0,8 kg αμελητέων διαστάσεων. Το σύστημα ράβδος - σώμα Σ είναι αρχικά ακίνητο και τη χρονική στιγμή t = 0 στο άκρο Λ της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη F μέτρου 18 Ν, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο.



Να υπολογίσετε

α. τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά η ράβδος.

γ. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t = 2 s.

δ. τον αριθμό των περιστροφών του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή t = 2 s.

Η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας Μ και μήκους ℓ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο, υπολογίζεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

Λύση

α. Υπολογίζουμε αρχικά τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της Κ, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Steiner.

$$I_K = I_{cm} + Md^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{3}M\ell^2 \qquad (4.9.1)$$

Η ροπή αδράνειας του σημειακού αντικειμένου Σ ως προς τον ίδιο άξονα (ε) υπολογίζεται από τη σχέση $I_\varepsilon = m \cdot r^2 \Rightarrow I_\varepsilon = m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\varepsilon = \frac{1}{4}m\ell^2$ (4.9.2)

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής (ε) είναι

$$I_{o\lambda} = I_K + I_\varepsilon \xRightarrow[4.9.2]{4.9.1} I_{o\lambda} = \frac{1}{3}M\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 \Rightarrow I_{o\lambda} = \frac{1}{3}\cdot 3kg\cdot(1m)^2 + \frac{1}{4}\cdot 0,8kg\cdot(1m)^2 \Rightarrow I_{o\lambda} = 1,2\,kg\cdot m^2.$$

β. Στο σύστημα ασκείται δύναμη στη ράβδο στο σημείο Κ από τον άξονα, οι βαρυτικές δυνάμεις και η δύναμη F. Η ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της δύναμης από τον άξονα περιστροφής στο Κ είναι μηδέν επειδή διέρχεται από το σημείο Κ. Οι ροπές των βαρυτικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι επίσης ίσες με μηδέν γιατί είναι παράλληλες στον άξονα. Επομένως η μοναδική δύναμη που δημιουργεί την απαραίτητη ροπή για την περιστροφή του συστήματος είναι η δύναμη F. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = \mathrm{I}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = \mathrm{I}_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow +F\cdot\ell = \mathrm{I}_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{18N\cdot 1m}{1,2kg\cdot m^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 15\frac{rad}{s^2}.$$

γ. Επειδή $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ = σταθ. η κίνηση του συστήματος θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική.

Είναι $\omega = \cancel{\omega_0} + \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \Rightarrow \omega = 15\frac{rad}{s^2}\cdot 2s \Rightarrow \omega = 30\frac{rad}{s}$. Όλα τα σημεία του συστήματος, εκτός του Κ, έχουν τη χρονική στιγμή t = 2 s την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω = 30 rad/s.

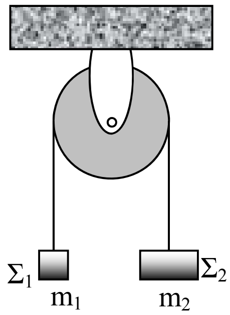
Το μέσο Ο της ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα ακτίνας $\frac{\ell}{2} = 0,5m$. Η γραμμική του ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $\upsilon_O = \omega\cdot\frac{\ell}{2} \Rightarrow \upsilon_O = 30\frac{rad}{s}\cdot 0,5m \Rightarrow \upsilon_O = 15\frac{m}{s}$.

δ. Η γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί η ράβδος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta\theta = \cancel{\omega_0 t} + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}\cdot 15\frac{rad}{s^2}\cdot 4s^2 \Rightarrow \Delta\theta = 30(rad).$$

Ο αριθμός Ν των περιστροφών υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta\theta = N\cdot 2\pi \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{30}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{15}{\pi} \Rightarrow N \approx 4,77 \text{ περ.}$$



Παράδειγμα 4.10 Η ομογενής τροχαλία του διπλανού σχήματος έχει μάζα M = 2 kg και ακτίνα R = 0,2 m, μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα της χωρίς τριβές. Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχουν μάζες m_1 = 1 kg και m_2 = 3 kg αντίστοιχα και είναι δεμένα στα άκρα ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας. Θεωρούμε ότι η τριβή μεταξύ τροχαλίας και σχοινιού είναι αρκετά μεγάλη ώστε το σχοινί να μην ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Τη χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε τα δύο σώματα ελεύθερα να κινηθούν.

Α. Να αποδείξετε ότι το μέτρο της δύναμης T_1 που ασκεί το σχοινί στο σώμα $Σ_1$ είναι διαφορετικό από το μέτρο της δύναμης T_2 που ασκεί το σχοινί στο σώμα $Σ_2$.

Β. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθούν τα δύο σώματα.

β. τα μέτρα των δυνάμεων T_1 και T_2.

Γ. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η κατακόρυφη απόσταση των δύο σωμάτων θα γίνει h = 1 m, να υπολογίσετε

γ. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας.

δ. το μέτρο της ταχύτητας των δύο σωμάτων.

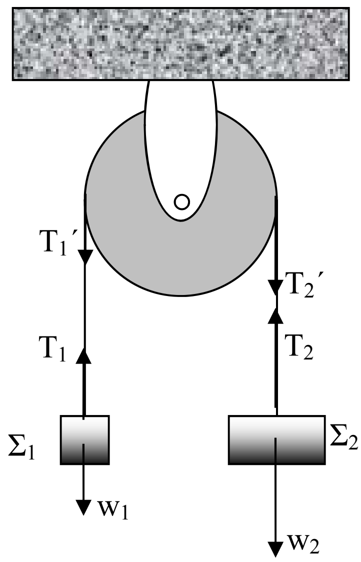
ε. την κινητική ενέργεια του συστήματος και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

στ. τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Τι παρατηρείτε;

ζ. τον αριθμό των περιστροφών της τροχαλίας.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 m/s^2.

Λύση



Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται το βάρος του w_1 και η δύναμη T_1 από το σχοινί. Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται το βάρος του w_2 και η δύναμη T_2 από το σχοινί. Στην τροχαλία ασκείται το βάρος της, η δύναμη από τον άξονα (δεν έχουν σχεδιαστεί) και οι αντιδράσεις των δυνάμεων T_1 και T_2 που έχουν ίσα μέτρα, με τις T_1 και T_2, επειδή συνδέονται με αβαρές νήμα $\left(T_1' = T_1 \ \kappa\alpha\iota \ T_2' = T_2\right)$.

Α. Από τις δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία, μόνο οι $T_1΄$ και $T_2΄$έχουν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της. Εφαρμόζουμε το ΘΝΣΚ για την τροχαλία $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

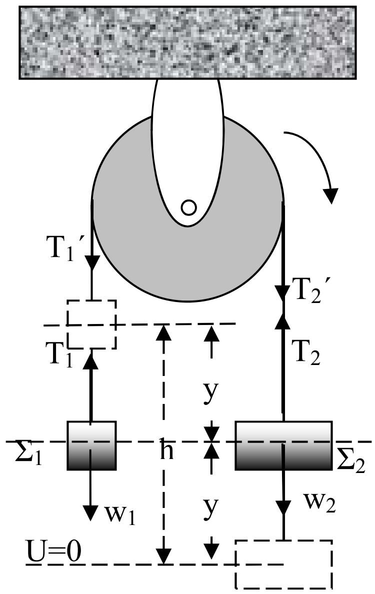
$\Rightarrow T_1R - T_2R = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 - T_2 = \dfrac{I\alpha_{\gamma\omega\nu}}{R}$. (Θεωρήσαμε θετική την αριστερόστροφη φορά). Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν $T_1 = T_2$ τότε ή I = 0 ή $\alpha_{γων}$ = 0. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\,kg\cdot(0,2\,m)^2 \Rightarrow I = 0,04\,kg\cdot m^2 \neq 0$$

Επομένως θα έπρεπε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$ που σημαίνει ότι η τροχαλία θα παρέμενε ακίνητη. Επομένως $T_1 \neq T_2$.

Αν και είναι προφανές προς τα πού θα στραφεί η τροχαλία, ας προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε.

Θεωρούμε γνωστή τη μία μάζα, π.χ τη m_1 και υπολογίζουμε την τιμή m_2' που έπρεπε να είχε η άλλη μάζα ώστε το σύστημα να ισορροπεί. Αν $m_2 > m_2'$ τότε το $Σ_2$ θα κινηθεί προς τα κάτω και η τροχαλία θα στραφεί δεξιόστροφα, διαφορετικά θα στραφεί αριστερόστροφα.



Επειδή η τροχαλία δε στρέφεται θα ισχύει ότι $T_1 = T_2$, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα. Επειδή τα σώματα ισορροπούν θα ισχύει για το καθένα η συνθήκη $ΣF = 0$ δηλαδή $w_1 - T_1 = 0$ και $w_2' - T_2 = 0$ ή $w_1 = T_1$ και $w_2' = T_2$. Επειδή όμως $T_1 = T_2$ θα είναι και $w_1 = w_2'$ ή $m_1 = m_2'$. Όμως από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι $m_2 > m_1$, άρα και $m_2 > m_2'$. Επομένως η τροχαλία θα στραφεί δεξιόστροφα, την οποία φορά θεωρούμε ως θετική.

Β. α. Εφαρμόζουμε τους νόμους της κίνησης για κάθε σώμα χωριστά.

ΤΡΟΧΑΛΙΑ: $Στ = I\,\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$$\Rightarrow T_2R - T_1R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (4.10.1)$$

$Σ_1$: $ΣF = m_1a_1 \Rightarrow T_1 - w_1 = m_1a_1$ (4.10.2)

$Σ_2$: $ΣF = m_2a_2 \Rightarrow w_2 - T_2 = m_2a_2$ (4.10.3)

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό (έχει σταθερό μήκος) τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν κάθε στιγμή την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση και ταχύτητα. Δηλαδή $a_1 = a_2$ και $υ_1 = υ_2$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις 4.10.1 έως 4.10.3 και έχουμε

$$\cancel{T_2} - \cancel{T_1} + \cancel{T_1} - w_1 + w_2 - \cancel{T_2} = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} + m_1a + m_2a \Rightarrow (m_2 - m_1)g = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} + (m_1 + m_2)a .$$

(4.10.4)

Επειδή το σχοινί δε γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας η επιτάχυνση των σωμάτων είναι ίση με τη γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας στα οποία εφάπτεται το σχοινί. Όμως $a_ε = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$, άρα $a = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$. (4.10.5)

Από την 4.10.4 με τη βοήθεια της 4.10.5 έχουμε $(m_2 - m_1)g = \frac{1}{2}Ma + (m_1 + m_2)a \Rightarrow$

$$(m_2 - m_1)g = \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}g \Rightarrow a = \frac{3-1}{\frac{1}{2}\cdot 2 + 1 + 3}10\frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2} .$$

β. Από την 4.10.2: $T_1 - w_1 = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1a + m_1g \Rightarrow T_1 = 1\cdot(4+10)N \Rightarrow T_1 = 14\,N$.

Από την 4.10.3: $w_2 - T_2 = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2g - m_2a \Rightarrow T_2 = 3\cdot(10-4)N \Rightarrow T_2 = 18\,N$.

Γ. γ. Επειδή η τροχαλία δεν μετακινείται και το σχοινί έχει σταθερό μήκος, αν το ένα σώμα κατέβει κατά y, το άλλο θα ανέβει επίσης κατά y. Επομένως, όταν τα σώματα απέχουν κατακόρυφα κατά h θα ισχύει ότι

$$y+y=h \Rightarrow y=\frac{1}{2}h \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}at^2=\cancel{\frac{1}{2}}h \Rightarrow t=\sqrt{\frac{h}{a}} \Rightarrow t=0,5\,s\,.$$

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης με την οποία στρέφεται η τροχαλία υπολογίζεται από τη σχέση 4.10.5: $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{a}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{4}{0,2}\,rad/s^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=20\,rad/s^2$.

Η γωνιακή ταχύτητα την οποία έχει αποκτήσει εκείνη τη στιγμή η τροχαλία είναι
ω = $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ t ➔ ω = 20·0,5 rad/s ➔ ω = 10 rad/s.

δ. Τη στιγμή t = 0,5 s τα δύο σώματα έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες, το οποίο υπολογίζεται από την εξίσωση υ = at ➔ υ = 4·0,5 m/s ➔ υ = 2 m/s.

ε. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων και της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης της τροχαλίας.

$$K_{o\lambda}=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \xRightarrow{(S.I.)} K_{o\lambda}=\frac{1}{2}1\cdot 2^2+\frac{1}{2}3\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 0,04\cdot 10^2 \Rightarrow K_{o\lambda}=10\,J\,.$$

Επειδή το σύστημα ήταν αρχικά ακίνητο είναι $\Delta K_{o\lambda}$ = $K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$ – $K_{o\lambda,\alpha\rho\chi}$ = 10 J – 0➔
$\Delta K_{o\lambda}$ = 10 J. (4.10.6)

στ. Θεωρούμε αυθαίρετα ως επίπεδο αναφοράς (U = 0) το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την πιο χαμηλή θέση του συστήματος (θέση του Σ₂, βλέπε σχήμα).

$$U_{\alpha\rho\chi}=U_{\Sigma_1}+U_{\Sigma_2}+U_{\tau\rho o\chi}=\left(m_1+m_2\right)g\cdot y+U_{\tau\rho o\chi}\overset{y=\frac{h}{2}}{=}\left(m_1+m_2\right)g\cdot\frac{h}{2}+U_{\tau\rho o\chi}\,.$$

$$U_{\tau\varepsilon\lambda}=U_{\Sigma_1}+\cancel{U_{\Sigma_2}}+U_{\tau\rho o\chi}=m_1\cdot g\cdot h+U'_{\tau\rho o\chi}\,.$$

$$\Delta U_{o\lambda}=U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi}=m_1\cdot g\cdot h+U'_{\tau\rho o\chi}-\left(m_1+m_2\right)g\frac{h}{2}-U_{\tau\rho o\chi}=\left(m_1-m_2\right)g\frac{h}{2}+\Delta U_{\tau\rho o\chi}\,.$$

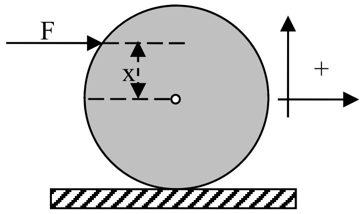
Επειδή η τροχαλία βρίσκεται σε σταθερό ύψος, είναι $\Delta U_{\tau\rho o\chi}=0$. Επομένως

$\Delta U_{o\lambda}=\left(1-3\right)\cdot 10\cdot 0,5\ J \Rightarrow \Delta U_{o\lambda}=-10\ J\,.$ (4.10.7)

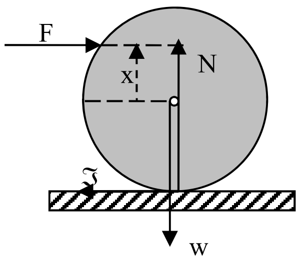
Από τις 4.10.6 και 4.10.7 προκύπτει ότι $\Delta K_{o\lambda}$ + $\Delta U_{o\lambda}$ = 10 J – 10 J = 0.

ζ. Από την εξίσωση $\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ υπολογίζουμε τη γωνία κατά την οποία έχει στραφεί η τροχαλία. $\theta=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\left(0,5\right)^2 rad \Rightarrow \theta=2,5\,rad$. Είναι θ = Ν·2π $\Rightarrow N=\frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N=\frac{2,5}{2\pi}$ *περιστρ.*

Παράδειγμα 4.11 Ο ομογενής δίσκος του σχήματος έχει μάζα M, ακτίνα R και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή στατικής τριβής μ_s. Ασκούμε στο δίσκο οριζόντια δύναμη F, της οποίας ο φορέας απέχει x από το κέντρο του δίσκου. Να μελετήσετε την κίνηση του δίσκου, για διάφορες τιμές της απόστασης x $(-R \le x \le R)$. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.



Λύση



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο.
Το βάρος του w = Mg, την κάθετη δύναμη στήριξης N και τη δύναμη τριβής $\Im$. (Επιλέγουμε αυθαίρετα τη φορά της τριβής προς τα αριστερά.) (Οι φορείς των w και N συμπίπτουν)
Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις για την κίνηση του δίσκου.

- Για τη στροφική κίνηση γύρω από τον (νοητό) άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου:

$$\Sigma\tau^{(cm)} = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F^{(cm)} + \tau_T^{(cm)} = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\cdot x + \Im\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (4.11.1)$$

- Για τη μεταφορική κίνηση ισχύουν: $\left.\begin{matrix}\Sigma F_x = M\cdot a_{cm}\\ \Sigma F_y = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}F-\Im = M\cdot a_{cm}\\ N-w=0\end{matrix}$ (4.11.2)

Για να κυλίεται ο δίσκος, χωρίς να ολισθαίνει, πρέπει να ισχύει $\Im \le \mu_s N$. (4.11.3)
Στην περίπτωση της κύλισης, χωρίς ολίσθηση, ισχύει η σχέση $a_{cm} = R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$. (4.11.4)
Η σχέση 4.11.1 με τη βοήθεια της 4.11.4 γράφεται

$$F\cdot x + \Im\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2Fx+2\Im R}{MR} \quad (4.11.5)$$

Αντικαθιστούμε την 4.11.5 στην 4.11.2α: $F-\Im = \frac{2Fx+2\Im R}{R} \Rightarrow 2Fx+2\Im R = FR-\Im R \Rightarrow$

$$3\Im R = F(R-2x) \Rightarrow \Im = \frac{F}{3}\left(1-\frac{2x}{R}\right). \quad (4.11.6)$$

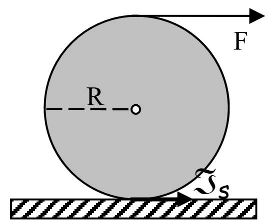
Αντικαθιστούμε την 4.11.6 στην 4.11.3: $\frac{F}{3}\left(1-\frac{2x}{R}\right) \le \mu_s Mg \Rightarrow \mu_s \ge \frac{F}{3Mg}\left(1-\frac{2x}{R}\right)$ (4.11.7)

Από τη σχέση 4.11.5 με τη βοήθεια της 4.11.6 προκύπτει $a_{cm} = \frac{2F}{3M}\left(1+\frac{x}{R}\right)$ (4.11.8)

Από τη σχέση 4.11.6 προκύπτει ότι τόσο το μέτρο, όσο και η φορά, της στατικής τριβής εξαρτώνται από την απόσταση x. Έτσι αν

- $1-\frac{2x}{R} > 0 \Rightarrow -R \le x < \frac{R}{2}$ τότε $\Im > 0$, επομένως έχει τη φορά του σχήματος.
- $1-\frac{2x}{R} < 0 \Rightarrow \frac{R}{2} < x \le R$ τότε $\Im < 0$, επομένως έχει φορά αντίθετη από αυτήν του σχήματος.

➢ $x=\frac{R}{2}$, τότε από την 4.11.6 προκύπτει ότι $\Im$ = 0, από την 4.11.5 $a_{cm}=\frac{F}{M}$ και από την 4.11.4 $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{F}{MR}$. Επειδή $\Im$ = 0, ο δίσκος, στην περίπτωση αυτή, θα εκτελέσει κύλιση χωρίς ολίσθηση, ακόμη και αν το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.



➢ $x=R$, τότε από την 4.11.6 προκύπτει ότι $\Im=-\frac{F}{3}$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της στατικής τριβής είναι αντίθετη από αυτή που είχε σχεδιαστεί στο αρχικό σχήμα, δηλαδή είναι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μέτρο της στατικής τριβής είναι $|\Im|=\frac{F}{3}$. Στην περίπτωση αυτή, από τη σχέση 4.11.5 έχουμε

$$a_{cm}=\frac{2FR+2\left(-\frac{F}{3}\right)R}{MR}\Rightarrow a_{cm}=\frac{4F}{3M}$$ και από την 4.11.4 $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{4F}{3MR}$.

Για τον συντελεστή στατικής τριβής, από τη σχέση 4.11.3 προκύπτει ($|\Im|=\frac{F}{3}$)

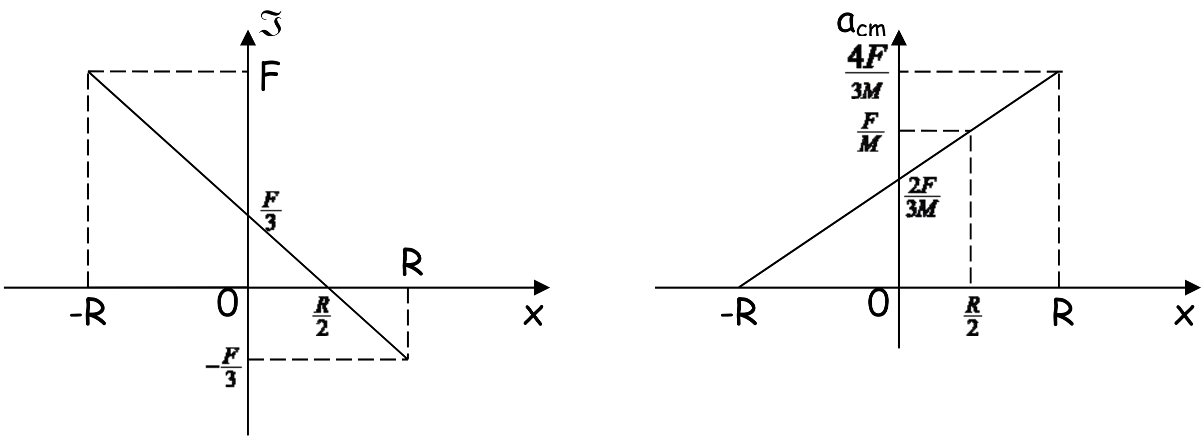
$$\frac{F}{3}\le\mu_s Mg\Rightarrow\mu_s\ge\frac{F}{3Mg}\Rightarrow\mu_{s,\min}=\frac{F}{3Mg}.$$

➢ x = -R, τότε από την 4.11.6 προκύπτει $\Im$ = F και από την 4.11.8 ότι a_{cm} = 0.

Από την 4.11.3 προκύπτει ότι $\mu_s\ge\frac{F}{Mg}\Leftrightarrow\mu_{s,min}=\frac{F}{Mg}$. 4.11.9

Αυτό σημαίνει ότι αν ικανοποιείται η 4.11.9 ο δίσκος θα παραμείνει ακίνητος, διαφορετικά θα ολισθήσει.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της στατικής τριβής και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του, σε συνάρτηση με την απόσταση x. (εξισώσεις 4.11.6 και 4.11.8)



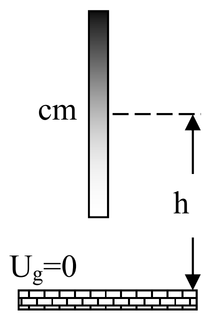
Από τη γραφική παράσταση $a_{cm}=f(x)$ παρατηρούμε ότι a_{cm} > 0 στο (-R, R]. Αυτό σημαίνει ότι ο δίσκος κινείται πάντα προς την κατεύθυνση της δύναμης F.

§4.7 Έργο – Ενέργεια στη στροφική κίνηση.

Στην παράγραφο 4.5 αποδείξαμε ότι στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα έχει κινητική ενέργεια εξαιτίας της στροφικής του κίνησης, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση 4.31 $\boxed{K_{\sigma\tau\rho}=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2}$.

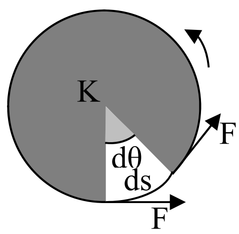
Αν το στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και περιστροφική, γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας $K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$ και της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $K_{\sigma\tau\rho}=\frac{1}{2}I\omega^2$, δηλαδή $\boxed{K_{o\lambda}=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2}$. (4.35)

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



Αν ένα στερεό μάζας M βρίσκεται σε ύψος h, σχετικά με κάποιο επίπεδο αναφοράς, τότε το σώμα έχει δυναμική ενέργεια, που υπολογίζεται από τη σχέση U = Mgh, όπου το ύψος h είναι η κατακόρυφη απόσταση του ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ του σώματος από το επίπεδο αναφοράς.

ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Όταν μία δύναμη περιστρέφει ένα στερεό σώμα, παράγει έργο το οποίο μπορεί να εκφραστεί με όρους ροπής ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος.
Έστω ότι μία δύναμη F σταθερού μέτρου ασκείται εφαπτομενικά στην περιφέρεια τροχού ακτίνας R, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Ο τροχός σε χρόνο dt στρέφεται κατά μία απειροστά μικρή γωνία dθ και το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται κατά το απειροστά μικρό τόξο μήκους ds = R dθ. Μπορούμε να θεωρήσουμε το απειροστά μικρό τόξο σαν ευθύγραμμο και τη δύναμη $\vec{F}$ σταθερή. Από τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης, για μετατόπιση ds, προκύπτει ότι dW = F ds ⇒ dW = F R dθ ⇒ $\boxed{dW = \tau\, d\theta}$, (4.36)
επειδή το γινόμενο FR εκφράζει τη ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα περιστροφής.
Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F για γωνιακή μετατόπιση του τροχού κατά θ, αρκεί να τη διαιρέσουμε σε στοιχειώδης γωνιακές μετατοπίσεις $d\theta_1$, $d\theta_2$, $d\theta_3$, ...$d\theta_\nu$ και να προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα. Δηλαδή
$W=dW_1+dW_2+\ldots+dW_\nu \Rightarrow W=\tau_1 d\theta_1+\tau_2 d\theta_2+\ldots+\tau_\nu d\theta_\nu$. Για την περίπτωση του τροχού που εξετάζουμε η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής είναι σταθερή και ίση με τ. Συνεπώς $\boxed{W = \tau\cdot\theta}$, (4.37)
όπου, όπως πάντα, τη γωνία θ την εκφράζουμε σε rad.

Σημειώστε ότι το έργο μιας ροπής μπορεί να είναι θετικός αριθμός, αν η ροπή τείνει να επιταχύνει γωνιακά το στερεό, ή αρνητικό, αν η ροπή τείνει να επιβραδύνει γωνιακά το στερεό.

ΙΣΧΥΣ ΡΟΠΗΣ

Η ισχύς ορίζεται ως ο ρυθμός παραγωγής έργου, δηλαδή $\boxed{P \overset{ορσ}{=} \frac{dW}{dt}}$ (4.38)

Η 4.38 με τη βοήθεια της 4.36 γράφεται: $P = \frac{\tau d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{P = \tau \cdot \omega}$. (4.39)

Η εξίσωση 4.39 δίνει τη ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ισχύ της ροπής της δύναμης F. Προφανώς πρέπει τόσο η ροπή τ όσο και η γωνιακή ταχύτητα ω να αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή και να είναι υπολογισμένες ως προς τον ίδιο άξονα περιστροφής.

Αν η στροφική κίνηση του στερεού είναι ομαλή και η ροπή της συγκεκριμένης δύναμης, ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι σταθερή, τότε και η ισχύς είναι σταθερή.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Α. <u>Στη στροφική κίνηση:</u> Αν σε ένα στερεό το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκούνται δυνάμεις με συνισταμένη ροπή διάφορη του μηδενός, τότε αποκτά γωνιακή επιτάχυνση με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η γωνιακή του ταχύτητα και η κινητική του ενέργεια (εξ. 4.31).

«Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των έργων των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό, το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.»

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \Sigma W = \frac{1}{2} I \omega_{τελ}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{αρχ}^2 . \quad (4.40)$$

Β. <u>Στη σύνθετη κίνηση:</u> Αν σε ένα στερεό το οποίο μεταφέρεται και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, ασκούνται δυνάμεις που έχουν σαν αποτέλεσμα τόσο τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού όσο και τη μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του, το Θ.Μ.Κ.Ε. γράφεται

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \Sigma W = \left(\frac{1}{2} I_{cm} \omega_{τελ}^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_{cm,τελ}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} I_{cm} \omega_{αρχ}^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_{cm,αρχ}^2 \right). \quad (4.41)$$

Θεώρημα (Αρχή) Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)

Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

Αν στο σώμα οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές, τότε η μηχανική ενέργεια του στερεού διατηρείται σταθερή:

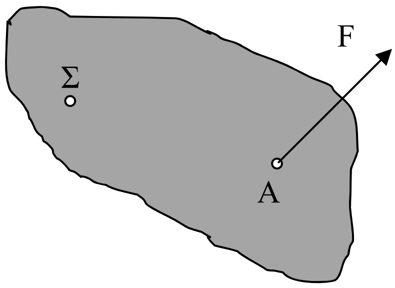
$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

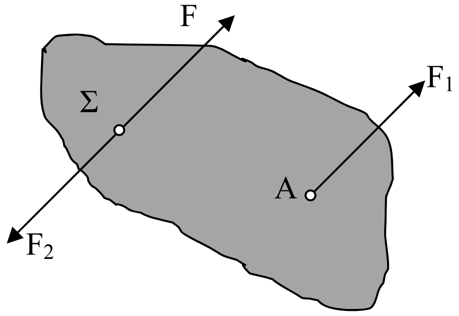
$$\left(\frac{1}{2} I_{cm} \omega_{αρχ}^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_{cm,αρχ}^2 \right) + MgH_{αρχ} = \left(\frac{1}{2} I_{cm} \omega_{τελ}^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_{cm,τελ}^2 \right) + MgH_{τελ} \quad (4.42)$$

Έργο της στατικής τριβής κατά την κύλιση ενός στερεού.

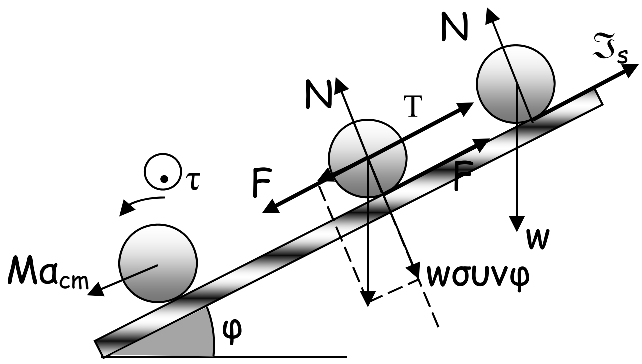
Μπορούμε να αποδείξουμε το εξής: Κάθε δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα στον εαυτό της σε οποιοδήποτε σημείο Σ του στερεού, αρκεί να προσθέσουμε ένα ζεύγος δυνάμεων του οποίου η ροπή να είναι ίση με τη ροπή της δύναμης που μεταφέραμε, ως προς το σημείο Σ.

Απόδειξη:





Έστω ότι η δύναμη F εφαρμόζεται στο σημείο Α του στερεού. Προφανώς δε θα αλλάξει τίποτα αν σε ένα σημείο Σ εφαρμόσουμε δύο αντίθετες δυνάμεις F_1 και F_2 έτσι ώστε $\vec{F_1} = \vec{F}$ και $\vec{F_2} = -\vec{F}$. Τώρα στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις: Στο σημείο Σ η δύναμη F και το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F_1} = -\vec{F_2} = \vec{F}$.



Θεωρούμε μία σφαίρα η οποία κατέρχεται πλάγιο επίπεδο κυλιόμενη χωρίς να ολισθαίνει. Στη σφαίρα ασκούνται τρεις δυνάμεις, το βάρος της w, η κάθετη δύναμη στήριξης N και η στατική τριβή $\mathfrak{I}_s$. Μεταφέρουμε τη στατική τριβή παράλληλα στον εαυτό της, στο κέντρο μάζας της σφαίρας και ταυτόχρονα ασκούμε το ζεύγος δυνάμεων F, ώστε $F = \mathfrak{I}_s = T$ (μέτρα).

Έτσι το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα είναι ισοδύναμο με μια συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο κέντρο μάζας της και ένα ζεύγος δυνάμεων του οποίου η ροπή ως προς το κέντρο μάζας είναι $\tau = FR = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$. Επομένως το έργο της στατικής τριβής $\mathfrak{I}_s$ είναι ίσο με το άθροισμα των έργων της δύναμης T και της ροπής του ζεύγους. Έστω ότι καθώς η σφαίρα κατέρχεται το κέντρο μάζας της μετατοπίζεται κατά Δx και ότι η σφαίρα έχει στραφεί κατά γωνία Δθ. Σύμφωνα με την σχέση 4.3 ισχύει $\Delta x = R\,\Delta\theta$. Επομένως $W_{\mathfrak{I}s} = W_T + W_\tau = -T\,\Delta x + \tau\,\Delta\theta = -\mathfrak{I}_s\,\Delta x + F\,R\,\Delta\theta \rightarrow$
$W_{\mathfrak{I}s} = -\mathfrak{I}_s\,\Delta x + \mathfrak{I}_s\,\Delta x \rightarrow W_{\mathfrak{I}s} = 0$.

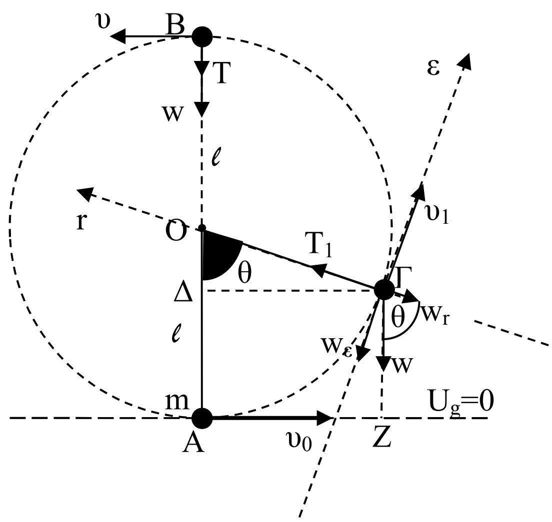
Η στατική τριβή συμμετέχει τόσο στη στροφική κίνηση της σφαίρας (είναι η μόνη δύναμη που έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας), όσο και στη μεταφορική κίνηση ($\Sigma F_x = Ma_{cm} \rightarrow w_x - \mathfrak{I}_s = Ma_{cm}$). Όπως προκύπτει, <u>το έργο της στατικής τριβής κατά τη στροφική κίνηση είναι αντίθετο από το έργο της κατά τη μεταφορική κίνηση</u>.

Α Ν Α Κ Υ Κ Λ Ω Σ Η

Α. Σημειακού αντικειμένου

α. με **ΝΗΜΑ** αβαρές και μη εκτατό (σταθερού μήκους)

Ένα σώμα μάζας m, που είναι δεμένο σε νήμα μήκους ℓ, ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση. Ζητάμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο μέτρο της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας που πρέπει να δώσουμε στο σώμα ώστε να διαγράψει τον πλήρη κατακόρυφο κύκλο, δηλαδή να κάνει ανακύκλωση.



Στο πρόβλημα της ανακύκλωσης το κρίσιμο σημείο είναι το ψηλότερο σημείο, το Β στο διπλανό σχήμα. Για να διαγράψει το σώμα τον κύκλο, πρέπει το νήμα να είναι συνεχώς τεντωμένο. Πρέπει δηλαδή η δύναμη που τεντώνει το νήμα (τάση του νήματος) να έχει μη αρνητική αλγεβρική τιμή (η φορά της δύναμης αυτής είναι πάντα προς το άλλο άκρο του νήματος, δηλαδή προς το κέντρο στην περίπτωσή μας). Για να βρούμε μια σχέση που να δίνει την αλγεβρική τιμή της δύναμης Τ, σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση Γ, καθώς ανεβαίνει προς τη ψηλότερη θέση Β. Στο σώμα ενεργούν δύο δυνάμεις, το βάρος του w και η δύναμη Τ από το νήμα. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, μία στη διεύθυνση της ακτίνας ΟΓ (άξονας r) και μία στη διεύθυνση της εφαπτομένης (άξονας ε). Είναι w_r = mg συνθ.

Επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της ακτίνας να δίνει την κεντρομόλο δύναμη. Δηλαδή πρέπει $T_1 - w_r = \frac{mv_1^2}{\ell} \Rightarrow$

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{\ell} + mg\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (4.43)$$

Στην εξίσωση 4.43 ο πρώτος όρος στο β΄ μέλος είναι θετικός αριθμός, ενώ ο δεύτερος όρος έχει το ίδιο πρόσημο με το συνθ. Έτσι αν $\sigma\upsilon\nu\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η Τ είναι μηδέν, όταν συνθ=0 (νήμα οριζόντιο) και ταυτόχρονα υ_1= 0. Αν όμως $\sigma\upsilon\nu\theta < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, τότε η 4.43 γράφεται $T_1 = \frac{mv_1^2}{\ell} - mg|\sigma\upsilon\nu\theta|$. Πρέπει λοιπόν, για να είναι τεντωμένο το νήμα, αφού περάσει την οριζόντια θέση, να ισχύει $T_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{mv_1^2}{\ell} - mg|\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 0 \Rightarrow v_1^2 \geq g\ell|\sigma\upsilon\nu\theta|$. Στη θέση Β είναι θ = π ⇒ $|\sigma\upsilon\nu\theta| = 1$, άρα

$$v_B^2 \geq g\ell \qquad (4.44)$$

Σύμφωνα με την 4.44 το σώμα για να εκτελέσει την ανακύκλωση πρέπει όταν διέρχεται από το ψηλότερο σημείο Β να έχει ταχύτητα με ελάχιστη τιμή την $\upsilon_{B,min} = \sqrt{g\ell}$.

Για να υπολογίσουμε τώρα την υ_0, εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Α και Β:

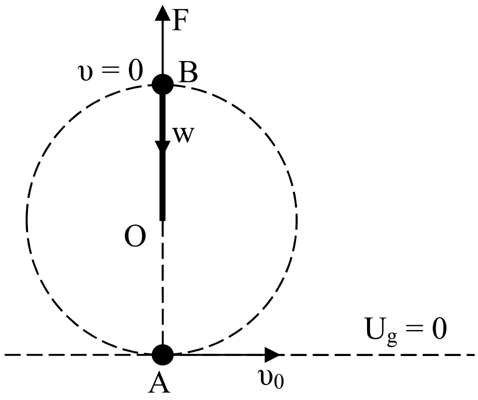
$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(BA) \Rightarrow v_B^2 = v_0^2 - 2g \cdot 2\ell.$ (4.45)

$$4.44 \overset{4.45}{\Longrightarrow} v_0^2 - 4g \cdot \ell \geq g\ell \Rightarrow v_0^2 \geq 5g\ell$$

Επομένως η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στο σώμα στην αρχική θέση ισορροπίας του είναι $\upsilon_{0,min} = \sqrt{5g\ell}$.

β. <u>με **ΡΑΒΔΟ** αμελητέας μάζας.</u>

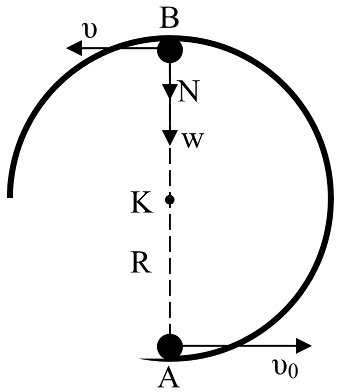
Αντικαθιστούμε το νήμα με αβαρή ράβδο. Ζητάμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη οριζόντια ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στο σώμα ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση.



Στο σώμα θα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος του w και η δύναμη F από τη ράβδο. Σε αντίθεση με την τάση του νήματος T, η οποία έχει σταθερή φορά (προς το άλλο άκρο του νήματος), η δύναμη από τη ράβδο μπορεί να έχει φορά ή προς το άλλο άκρο της ράβδου ή αντίθετη. Για να εκτελέσει το σώμα ανακύκλωση αρκεί να φτάσει στο ψηλότερο σημείο με μηδενική ταχύτητα (στην πραγματικότητα ελάχιστα μεγαλύτερη). Για τον υπολογισμό της $υ_{0,min}$ αρκεί η εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. στις θέσεις Α και Β, με $υ_B = 0$. $K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow \frac{1}{2}mυ_0^2 + 0 = 0 + mg \cdot 2\ell \Rightarrow υ_0^2 = 4g\ell \Rightarrow υ_0 = \sqrt{4g\ell}$

γ. στο **εσωτερικό** λείας κατακόρυφης κυλινδρικής ή σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R.

Ο τρόπος υπολογισμού της ελάχιστης ταχύτητας $υ_0$ είναι ο ίδιος με την περίπτωση της ανακύκλωσης **με νήμα** (περίπτωση α). Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος w και η κάθετη δύναμη στήριξης N, η οποία όπως και η τάση του νήματος, έχει σταθερή φορά προς το κέντρο K του κύκλου.



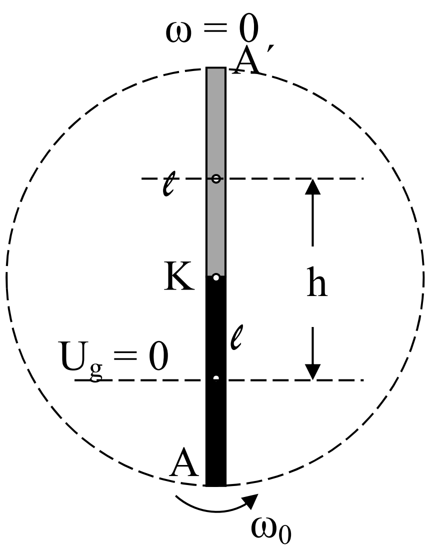
Αποδεικνύεται ότι $υ_{0,min} = \sqrt{5gR}$

(Αναφερόμαστε σε σώμα χωρίς διαστάσεις, επομένως δεν υπάρχει η δυνατότητα της ιδιοπεριστροφής του.)

Β. Στερεού σώματος

δ. κατακόρυφης **ομογενούς ράβδου**, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της K $\left(I_K = \frac{1}{3}M\ell^2\right)$.

Ζητάμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας που πρέπει να δώσουμε στη ράβδο ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση.



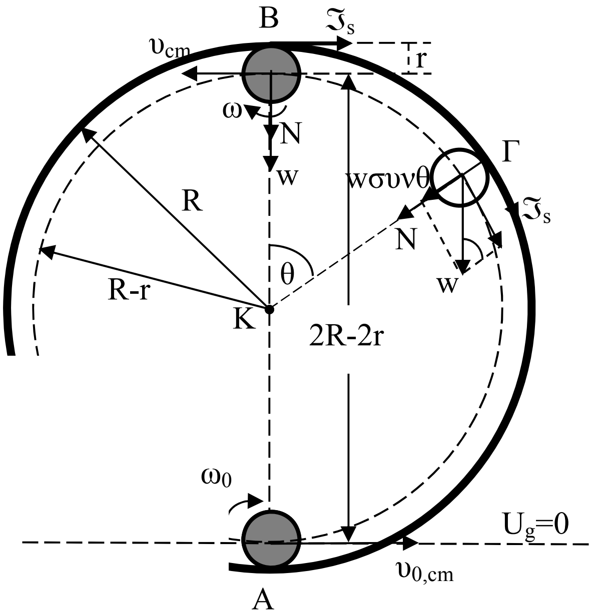
Και στην περίπτωση αυτή η λογική του τρόπου υπολογισμού είναι ίδια με την περίπτωση ανακύκλωσης σώματος με αβαρή ράβδο. Αρκεί η ράβδος να μπορέσει να φτάσει στην κατακόρυφη θέση ΚΑ΄ με μηδενική ταχύτητα. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση ΚΑ.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε για τις δύο θέσεις της ράβδου:

$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}I\omega_0^2 + 0 = 0 + Mgh \Rightarrow$

$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = Mg\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega_0^2 = Mg\ell \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{6g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}$ *και* $υ_A = \omega_0\ell \Rightarrow υ_A = \sqrt{6g\ell}$

ε. μικρής σφαίρας ακτίνας r στο **εσωτερικό** κατακόρυφης κυλινδρικής ή σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R $\left(I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2\right)$.



Ζητάμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το κέντρο μάζας της μικρής σφαίρας ώστε αυτή, χωρίς να ολισθήσει, να εκτελέσει ανακύκλωση.
Δίνουμε στη μικρή σφαίρα αρχική ταχύτητα υ_0 και ταυτόχρονα αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 έτσι ώστε να ισχύει $\upsilon_0 = \omega_0$ r.
Για να μπορέσει να κάνει την ανακύκλωση, πρέπει μέχρι να φτάσει στο ψηλότερο σημείο να είναι σε επαφή με την επιφάνεια, πρέπει δηλαδή να της ασκείται η κάθετη δύναμη στήριξης N και φυσικά η στατική τριβή $\mathfrak{I}_s$.
Στη θέση B η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη είναι συνισταμένη w + N και επομένως ισχύει $F_K = w + N$. (4.46)
Το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο K και ακτίνα R – r.

$$4.46 \Rightarrow N = F_K - mg \Rightarrow N = \frac{m\upsilon_B^2}{R-r} - mg \overset{N\geq 0}{\Longrightarrow} \frac{m\upsilon_B^2}{R-r} - mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon_B^2 \geq g(R-r). \quad (4.47)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις A και B:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + mg(2R-2r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega_B^2 + 2mg(R-r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_0^2 + \frac{1}{5}r^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}\upsilon_B^2 + \frac{1}{5}r^2\omega_B^2 + 2g(R-r)$$

Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, σε κάθε θέση της ισχύει η σχέση υ = ω r.
Με αντικατάσταση έχουμε $\frac{1}{2}\upsilon_0^2 + \frac{1}{5}r^2\left(\frac{\upsilon_0}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\upsilon_B^2 + \frac{1}{5}r^2\left(\frac{\upsilon_B}{r}\right)^2 + 2g(R-r) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\upsilon_0^2 + \frac{1}{5}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\upsilon_B^2 + \frac{1}{5}\upsilon_B^2 + 2g(R-r) \Rightarrow 7\upsilon_0^2 = 7\upsilon_B^2 + 20g(R-r) \Rightarrow$$

$$\upsilon_B^2 = \upsilon_0^2 - \frac{20}{7}g(R-r) \quad (4.48)$$

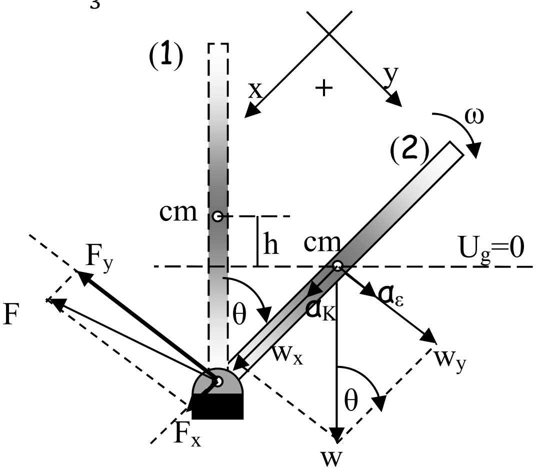
$$4.47 \overset{4.48}{\Longrightarrow} \upsilon_0^2 - \frac{20}{7}g(R-r) \geq g(R-r) \Rightarrow \upsilon_0^2 \geq \frac{27}{7}g(R-r)$$

Η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στο κέντρο μάζας της σφαίρας είναι
$\upsilon_{0,min} = \sqrt{\frac{27}{7}g(R-r)}$ και αντίστοιχα η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega_{0,min} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{27}{7}g(R-r)}$.

<u>Σημείωση:</u> Αν δεχτούμε ότι $r \ll R$ τότε $\upsilon_{0,min} = \sqrt{\frac{27}{7}gR}$, γιατί $R - r \cong R$, σχέση που είναι διαφορετική από τη $\upsilon_{0,min} = \sqrt{5gR}$, που βρήκαμε στην περίπτωση γ. Αυτό δείχνει ότι η μικρή σφαίρα δεν μπορεί να θεωρηθεί σημειακό αντικείμενο και αυτό ωφείλεται στη ροπή αδράνειας που έχει η σφαίρα, γιατί η σχέση $r \ll R$ δε σημαίνει ότι r = 0.

ΔΥΝΑΜΗ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ μάζας Μ, που είναι αρθρωμένη σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση (1) (θέση ασταθούς ισορροπίας), όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση: $I = \frac{1}{3}M\ell^2$.



Σπρώχνουμε λίγο τη ράβδο ώστε να περιστραφεί γύρω από τον άξονα και ζητάμε να υπολογίσουμε τη δύναμη F που της ασκείται από την άρθρωση τη στιγμή που έχει στραφεί κατά γωνία θ (θέση (2)).

Σημαντικό ρόλο στην περίπτωση αυτή παίζει το κέντρο μάζας της ράβδου, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το σημείο άρθρωσης και ακτίνα $\frac{\ell}{2}$.

Η κίνηση της ράβδου είναι στροφική μη ομαλά μεταβαλλόμενη. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος της w και η δύναμη F από την άρθρωση, την οποία σχεδιάζουμε με τυχαία διεύθυνση και φορά. Αναλύουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, έναν κατά τη διεύθυνση της ράβδου (άξονας x) και έναν κάθετο σ'αυτόν (άξονας y).

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει σε αυτούς τους άξονες δύο συνιστώσες, την κεντρομόλο επιτάχυνση $α_Κ$ και την επιτρόχια (γραμμική) επιτάχυνση $α_ε$, αντίστοιχα.

Για την επιτρόχια επιτάχυνση ισχύει η σχέση 4.8: $a_ε = α_{γων}\frac{\ell}{2}$ και για την κεντρομόλο επιτάχυνση ισχύει η σχέση 4.5: $a_K = ω^2\frac{\ell}{2}$.

Για την κίνηση του κέντρου μάζας εφαρμόζουμε στους δύο άξονες το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\left.\begin{aligned}ΣF_x &= Ma_K\\ ΣF_y &= Ma_ε\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}w_x + F_x &= Ma_K\\ w_y - F_y &= Ma_ε\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}F_x &= Mω^2\frac{\ell}{2} - Mgσυνθ \quad (4.49)\\ F_y &= Mgημθ - Mα_{γων}\frac{\ell}{2} \quad (4.50)\end{aligned}\right\}$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω και τη γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$.

<u>*Υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας:*</u> Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για τις θέσεις (1) και (2), θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στη θέση (2):

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}Iω^2 + 0$. Είναι $I = \frac{1}{3}M\ell^2$ και $h = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}συνθ \Rightarrow$ $h = \frac{\ell}{2}(1 - συνθ)$. Με αντικατάσταση στην ΑΔΜΕ έχουμε $Mg\frac{\ell}{2}(1 - συνθ) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2ω^2 \Rightarrow$

$$ω^2 = \frac{3g(1 - συνθ)}{\ell} \Rightarrow ω = \sqrt{\frac{3g(1 - συνθ)}{\ell}}$$

<u>*Υπολογισμός της γωνιακής επιτάχυνσης:*</u> Εφαρμόζουμε το ΘΝΣΚ: $\sum τ = I\,α_{γων}$

Από τις δυνάμεις που ενεργούν στη ράβδο, ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής έχει μόνο η w_y. Επομένως $w_y\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2α_{γων} \Rightarrow Mgημθ\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2α_{γων} \Rightarrow α_{γων} = \frac{3gημθ}{2\ell}$.

Αντικαθιστούμε στις σχέσεις 4.49 και 4.50:

$$4.49 \Rightarrow F_x = M\frac{3g(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\ell}\frac{\ell}{2} - Mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow F_x = \frac{3-5\sigma\upsilon\nu\theta}{2}Mg$$

$$4.50 \Rightarrow F_y = Mg\eta\mu\theta - M\frac{3g\eta\mu\theta}{2\ell}\frac{\ell}{2} \Rightarrow F_y = \frac{\eta\mu\theta}{4}Mg$$

Για το μέτρο της δύναμης F έχουμε: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = Mg\sqrt{\left(\frac{3-5\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu\theta}{4}\right)^2}$.

ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

- Γωνιακής μετατόπισης: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$.
- Γωνιακής ταχύτητας: $\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$.
- Στροφικής κινητικής ενέργειας: $\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}\mathrm{I}\cdot\cancel{2}\omega\cdot\omega' = \mathrm{I}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\omega \Rightarrow$

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \tau\cdot\omega = \mathrm{P}_\tau \qquad (4.51)$$

- Μεταφορικής κινητικής ενέργειας: $\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{M}\upsilon_{cm}^2\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}M\cdot\cancel{2}\upsilon_{cm}\cdot\upsilon_{cm}' = M\cdot a_{cm}\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow$

$$\frac{dK\mu\varepsilon\tau}{dt} = \Sigma F_x\cdot\upsilon_{cm} \qquad (4.52)$$

Παράδειγμα 4.12 Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου, μήκους ℓ και γωνίας κλίσης φ, αφήνουμε ελεύθερο να κυλίσει έναν κύλινδρο μάζας Μ. Ο κύλινδρος κατέρχεται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρείτε

α. την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

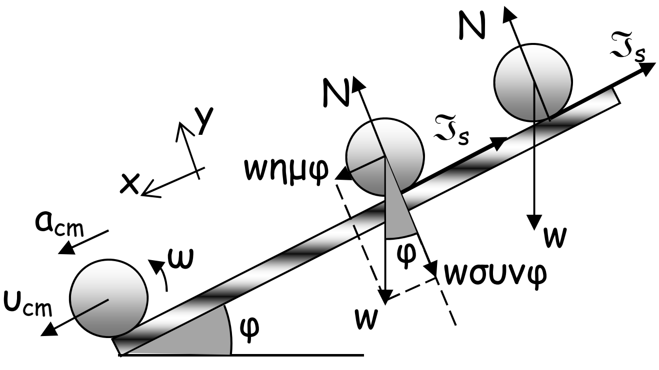
β. την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

γ. τη μικρότερη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, όπου R η ακτίνα του κυλίνδρου.

Λύση

__1^ος^ τρόπος:__ (Δυναμική μέθοδος)

α. Για τη <u>στροφική κίνηση</u> γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου:



$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Im_s R = \frac{1}{2}MR^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\Rightarrow \Im_s = \frac{1}{2}MR\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \overset{a_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R}{\Rightarrow}$

$$\Im_s = \frac{1}{2}Ma_{cm}. \qquad (4.12.1)$$

Για τη <u>μεταφορική κίνηση</u> του κέντρου μάζας του κυλίνδρου:

$\Sigma F_x = Ma_{cm} \Rightarrow$ wημφ - $\Im_s = Ma_{cm} \overset{4.12.1}{\Longrightarrow}$ wημφ - $\frac{1}{2}Ma_{cm} = Ma_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}Ma_{cm} \Rightarrow$

. $\boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi}$ (4.12.2)

β. Η μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας είναι ομαλά επιταχυνόμενη (a_{cm} = σταθ.). Για την κίνησή του ισχύουν οι εξισώσεις: $\upsilon_{cm} = a_{cm}t$ και $\ell = \frac{1}{2}a_{cm}t^2$.

Κάνουμε απαλοιφή του χρόνου t: $t = \frac{\upsilon_{cm}}{a_{cm}}$ και $\ell = \frac{1}{2}\cancel{a_{cm}}\frac{\upsilon_{cm}^2}{a_{cm}^{\cancel{2}}} \Rightarrow \ell = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2a_{cm}} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{2\ell a_{cm}}$

$\overset{4.12.2}{\Longrightarrow} \upsilon_{cm} = \sqrt{2\ell\frac{2}{3}g\eta\mu\varphi} \Longrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}g\ell\eta\mu\varphi}$. (4.12.3)

γ. Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος πρέπει $\Im_s \le \mu_s N$. (4.12.4)
Η κάθετη δύναμη στήριξης Ν υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow N = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi$. (4.12.5)
Υπολογίζουμε τη στατική τριβή με τη βοήθεια των εξισώσεων 4.12.1 και 4.12.2.
$\Im_s = \frac{1}{2}M\frac{2}{3}g\eta\mu\varphi \Rightarrow \Im_s = \frac{1}{3}Mg\eta\mu\varphi$. (4.12.6)
Αντικαθιστούμε στην 4.12.4 τις σχέσεις 4.12.6 και 4.12.5:
$\frac{1}{3}Mg\eta\mu\varphi \le \mu_s Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_s \ge \frac{1}{3}\varepsilon\varphi\varphi$. Επομένως πρέπει $\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{1}{3}\varepsilon\varphi\varphi}$.

<u>2ος τρόπος:</u> (Ενεργειακή μέθοδος)

Στον κύλινδρο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι μόνο η συντηρητική δύναμη του βάρους του (η στατική τριβή και η κάθετη δύναμη στήριξης δεν παράγουν έργο). Επομένως για την κίνηση του κυλίνδρου μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + 0 \Rightarrow$

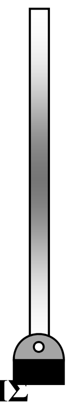
$\cancel{M}g\ell\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cancel{M}R^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow 4g\ell\eta\mu\varphi = \upsilon_{cm}^2 + 2\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = \frac{4}{3}g\ell\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}g\ell\eta\mu\varphi}$, σύμφωνη με τη σχέση 4.12.3.

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις κίνησης και απαλείφουμε το χρόνο

$\ell = \frac{1}{2}\cancel{a_{cm}}\frac{\upsilon_{cm}^2}{a_{cm}^{\cancel{2}}} \Rightarrow \ell = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2a_{cm}} \Rightarrow a_{cm} = \frac{\frac{4}{3}g\cancel{\ell}\eta\mu\varphi}{2\cancel{\ell}} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi$, σύμφωνη με τη σχέση 4.12.2

Παράδειγμα 4.13 Μια ομογενής ράβδος μάζας Μ και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβή γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη σε κατακόρυφη θέση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από τη θέση αυτή και περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Τη στιγμή που γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά, να βρείτε



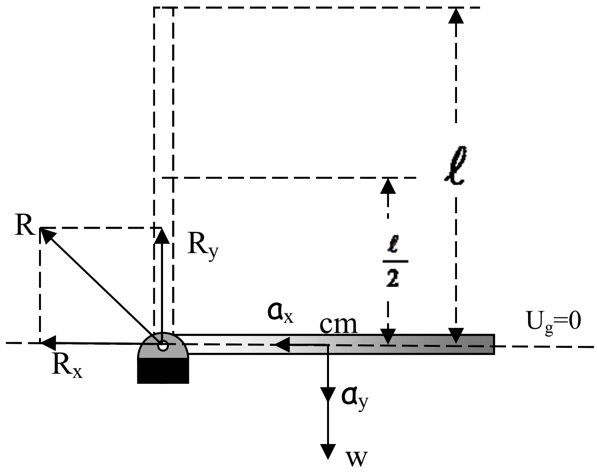
α. τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

β. τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

γ. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της ράβδου.

δ. το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{3}M\ell^2$.



Λύση

Στη ράβδο ασκούνται δύο ομοεπίπεδες δυνάμεις, το βάρος της w, με σημείο εφαρμογής το μέσον της, και η δύναμη R από τον άξονα.

α. Επειδή δεν υπάρχουν τριβές η μηχανική ενέργεια της ράβδου διατηρείται

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$0 + Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 \Rightarrow$

$\cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{3}\cancel{M}\ell^{\cancel{2}}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$.

β. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης τη στιγμή που η ράβδος είναι οριζόντια: $\Sigma\tau = I\,\alpha_{γων} \Rightarrow$

$w\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2\alpha_{γων} \Rightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{2} = \frac{1}{3}\cancel{M}\ell^{\cancel{2}}\alpha_{γων} \Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$.

γ. Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $\frac{\ell}{2}$. Στην οριζόντια θέση το κέντρο μάζας έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $a_x = \omega^2\frac{\ell}{2}$ και γραμμική επιτάχυνση $a_y = \alpha_{γων}\frac{\ell}{2}$. Με αντικατάσταση $a_x = \frac{3g}{\ell}\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_x = \frac{3}{2}g$ και $a_y = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_y = \frac{3}{4}g$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{3g}{2}\right)^2 + \left(\frac{3g}{4}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{3g\sqrt{5}}{4}$.

δ. Για το κέντρο μάζας της ράβδου, έχουμε

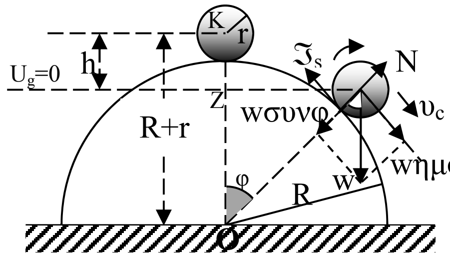
$\Sigma F_x = Ma_x \Rightarrow R_x = M\frac{3}{2}g \Rightarrow R_x = \frac{3}{2}Mg$.

$\Sigma F_y = Ma_y \Rightarrow w - R_y = M\frac{3}{4}g \Rightarrow R_y = Mg - \frac{3Mg}{4} \Rightarrow R_y = \frac{Mg}{4}$. Επομένως

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{\sqrt{37}}{4}Mg \Rightarrow R \cong 1,52\cdot Mg$.

Παράδειγμα 4.14 Ημισφαίριο ακτίνας R είναι στερεωμένο με τη βάση του σε οριζόντιο δάπεδο. Από το ανώτερο σημείο του ημισφαιρίου αφήνουμε μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r, η οποία αρχίζει να κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου του ημισφαιρίου. Να βρείτε τη γωνία θ την οποία σχηματίζει η ακτίνα του ημισφαιρίου με την κατακόρυφη, τη στιγμή που η μικρή σφαίρα εγκαταλείπει το ημισφαίριο. Η ροπή αδράνειας της μικρής σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.

Λύση



Σε μια τυχαία θέση, στην οποία η ακτίνα R σχηματίζει γωνία φ με την αρχική κατακόρυφη θέση της μικρής σφαίρας, οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος w, η κάθετη δύναμη στήριξης N και η στατική τριβή $\Im_s$ για την οποία ισχύει $\Im_s \le \mu_s N$.

Το κέντρο μάζας της μικρής σφαίρας κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R + r.

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε δύο ορθογώνιους άξονες, τον άξονα x κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο ημισφαίριο και τον άξονα y κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του ημισφαιρίου.

Η μόνη δύναμη που μπορεί να αναλυθεί είναι η δύναμη του βάρους. Για τις συνιστώσες του βάρους ισχύει w_x = wημφ = mgημφ και w_y = wσυνφ = mgσυνφ.

Επειδή η κίνηση του κέντρου μάζας είναι κυκλική, πρέπει κατά τη διεύθυνση της ακτίνας να ισχύει: $\Sigma F_y = F_{κεντρ} \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - N = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{R+r} \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{m\upsilon_{cm}^2}{R+r}$ (4.14.1)

Για να είναι η μικρή σφαίρα σε επαφή με το ημισφαίριο πρέπει να ισχύει

$$N \ge 0 \xRightarrow{4.14.1} \cancel{m}g\sigma\upsilon\nu\varphi \ge \frac{\cancel{m}\upsilon_{cm}^2}{R+r} \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 \le (R+r)g\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (4.14.2)$$

Για την κίνηση της μικρής σφαίρας εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε.

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + 0 \Rightarrow$

$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{m}r^2\omega^2$. Επειδή η μικρή σφαίρα δεν ολισθαίνει στην επιφάνεια του ημισφαιρίου, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή με τη σχέση $\upsilon_{cm} = \omega r$. Με αντικατάσταση και απαλοιφή παρανομαστών παίρνουμε $10gh = 5\upsilon_{cm}^2 + 2\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = \frac{10}{7}gh$. (4.14.3)

Υπολογίζουμε το ύψος h από τη γεωμετρία του σχήματος. Είναι h = (KZ) = (OK) – (OZ) ή h = R + r – (R + r)συνφ ή h = (R + r)(1 – συνφ). (4.14.4)

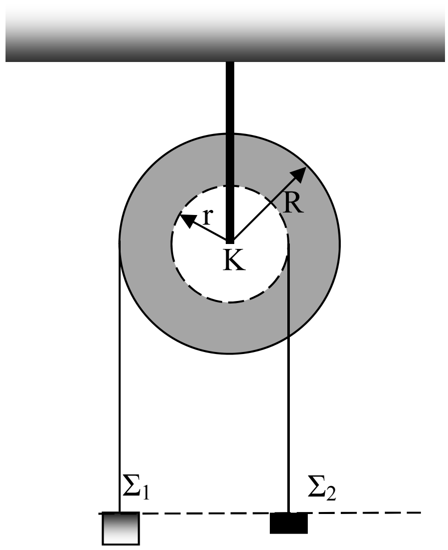
Η σχέση 4.14.3 με τη βοήθεια της 4.14.4 γίνεται: $\upsilon_{cm}^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)$ (4.14.5)

Αντικαθιστούμε στην 4.14.2 τη σχέση 4.14.5 και έχουμε

$\frac{10}{7}\cancel{g}\,\cancel{(R+r)}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) \le \cancel{(R+r)}\,\cancel{g}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow 10 - 10\sigma\upsilon\nu\varphi \le 7\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi \ge \frac{10}{17}$. Η μικρή σφαίρα θα χάσει την επαφή της με το ημισφαίριο στη θέση όπου η ακτίνα θα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο για την οποία θα ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{10}{17}$ $(\theta \cong 54^0)$.

Στη θέση αυτή η ταχύτητα του κέντρου μάζας της μικρής σφαίρας υπολογίζεται από την εξίσωση 4.14.5: $\upsilon_{cm}^2 = \frac{10}{7} g(R+r)\left(1-\frac{10}{17}\right) \Rightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{10}{17} g(R+r)}$.

Παράδειγμα 4.15 Μια διπλή τροχαλία έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της I_K = 0,09 kgm^2. Η τροχαλία συνδέεται, με τη βοήθεια δύο νημάτων, με δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι μάζες των δύο σωμάτων είναι αντίστοιχα m_1 = 2 kg και m_2 = 3 kg, ενώ οι ακτίνες της διπλής τροχαλίας είναι r = 0,1 m και R = 0,2 m. Το σύστημα των δύο σωμάτων και της τροχαλίας αρχικά ηρεμεί με τα δύο σώματα να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σύστημα αφήνεται ελεύθερο. Τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά και δεν ολισθαίνουν στα αυλάκια της τροχαλίας. Να υπολογίσετε



α. τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

β. την επιτάχυνση κάθε σώματος.

γ. το μέτρο της δύναμης που ασκεί κάθε νήμα στην τροχαλία.

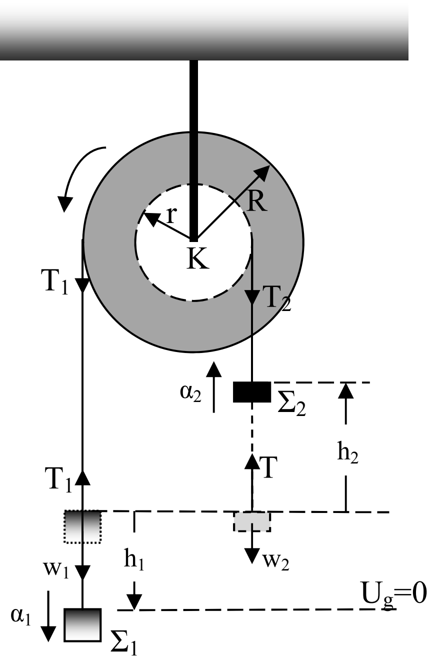
δ. το μέτρο της ταχύτητας κάθε σώματος όταν το σώμα $Σ_1$ έχει μετατοπιστεί από την αρχική του θέση κατά 1 m.

ε. το χρονικό ρυθμό μετατροπής ενέργειας, σε κινητική ενέργεια περιστροφής της τροχαλίας, τη στιγμή που η μετατόπιση του $Σ_1$ από την αρχική του θέση είναι 1 m.

Δίνεται g = 10 m/s^2 και ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής.

Λύση

Αρχικά προσδιορίζουμε την κατεύθυνση κατά την οποία θα περιστραφεί η τροχαλία (δεν είναι απαραίτητο, μπορούμε να θεωρήσουμε αυθαίρετα μια φορά περιστροφής και να την ελέγξουμε από το πρόσημο της απάντησης).



Η τροχαλία θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ομόρροπη με τη μεγαλύτερη ροπή των δυνάμεων w_1 και w_2, ως προς τον άξονα περιστροφής της.

$|\tau_{w_1}| = w_1 R = m_1 g R = 2\cdot 10\cdot 0,2 Nm = 4Nm$.

$|\tau_{w_2}| = w_2 r = m_2 g r = 3\cdot 10\cdot 0,1 Nm = 3Nm$

Επειδή $|\tau_{w_1}| > |\tau_{w_2}|$ η τροχαλία θα στραφεί αριστερόστροφα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε τη φορά περιστροφής έχει περιγραφεί στο παράδειγμα 4.10).

Εφαρμόζουμε τους νόμους κίνησης για κάθε σώμα χωριστά.

ΤΡΟΧΑΛΙΑ: $\Sigma\tau^{(K)} = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R - T_2 r = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$. (4.15.1)

ΣΩΜΑ Σ_1: $\Sigma F = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow w_1 - T_1 = m_1 \cdot a_1$. (4.15.2)

ΣΩΜΑ Σ_2: $\Sigma F = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow T_2 - w_2 = m_2 \cdot a_2$. (4.15.3)

Όταν η τροχαλία στραφεί κατά μια γωνία θ, τότε το σώμα Σ_1 θα κινηθεί προς τα κάτω κατά y_1, ενώ το σώμα Σ_2 θα κινηθεί προς τα πάνω κατά y_2. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στα αυλάκια της τροχαλίας, ισχύει ότι $y_1 = R\theta$ και $y_2 = r\theta$. Επομένως

$\frac{dy_1}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \upsilon_1 = R \cdot \omega$, και $\frac{dy_2}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \upsilon_2 = r \cdot \omega$. (4.15.4)

Επίσης $\frac{d\upsilon_1}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_1 = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ και $\frac{d\upsilon_2}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_2 = r \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$. (4.15.5)

Είναι $\frac{y_1}{y_2} = \frac{R \cdot \cancel{\theta}}{r \cdot \cancel{\theta}} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{0,2m}{0,1m} \Rightarrow y_1 = 2y_2$, ομοίως $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$ και $a_1 = 2a_2$.

Από την 4.15.2 έχουμε $m_1 g - T_1 = m_1 R\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 R\alpha_{\gamma\omega\nu}$. (4.15.6)

Από την 4.15.3 έχουμε $T_2 - m_2 g = m_2 r\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 r\alpha_{\gamma\omega\nu}$. (4.15.7)

Με αντικατάσταση στην 4.15.1 παίρνουμε $\left(m_1 g - m_1 R\alpha_{\gamma\omega\nu}\right)R - \left(m_2 g + m_2 r\alpha_{\gamma\omega\nu}\right)r = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$\left(m_1 gR - m_1 R^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\right) - \left(m_2 gr + m_2 r^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\right) = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \left(m_1 R - m_2 r\right)g = \left(m_1 R^2 + m_2 r^2 + I_K\right)\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + I_K} g \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2kg \cdot 0,2m - 3kg \cdot 0,1m}{2kg \cdot 4\times10^{-2}m^2 + 3kg \cdot 1\times10^{-2}m^2 + 9\times10^{-2}kgm^2} 10m/s^2 \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{0,1kgm}{0,2kgm^2} 10ms^{-2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5s^{-2} \text{ ή } \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5\frac{rad}{s^2}}$$

β. Η επιτάχυνση κάθε σώματος υπολογίζεται από τις εξισώσεις 4.15.5.

$a_1 = 0,2$ m 5 rad/s^2 $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = 1 \text{ m/s}^2}$.

$a_2 = 0,1$ m 5 rad/s^2 $\Rightarrow$ $\boxed{a_2 = 0,5 \text{ m/s}^2}$.

γ. Από την εξίσωση 4.15.6 έχουμε $T_1 = 2kg \cdot 10m/s^2 - 2kg \cdot 0,2m \cdot 5rad/s^2 \Rightarrow T_1 = 18N$.

Από την εξίσωση 4.15.7 έχουμε $T_2 = 3kg \cdot 10m/s^2 + 3kg \cdot 0,1m \cdot 5rad/s^2 \Rightarrow T_2 = 31,5N$.

δ. Όταν το Σ_1 έχει κατέβει κατά $h_1 = 1$ m, το Σ_2 θα έχει ανέβει κατά $h_2 = \frac{h_1}{2} = 0,5$ m.

Υπολογίζουμε τις ταχύτητες των σωμάτων με εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα ΤΡΟΧΑΛΙΑ – Σ_1 – Σ_2: $E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$0 + (m_1 + m_2)gh_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2 + m_2 g\left(h_1 + h_2\right) \xRightarrow{4.15.4}$

$$m_1 gh_1 + \cancel{m_2 gh_1} = \frac{1}{2}m_1\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2 + \cancel{m_2 gh_1} + m_2 gh_2 \Rightarrow$$

$$2\left(m_1 h_1 - m_2 h_2\right)g = \left(m_1 R^2 + m_2 r^2 + I_K\right)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2\left(m_1 h_1 - m_2 h_2\right)g}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + I_K} \xRightarrow{(S.I)}$$

$$\omega^2 = \frac{2\left(2\cdot1 - 3\cdot0,5\right)10}{2\cdot4\times10^{-2} + 3\cdot10^{-2} + 9\times10^{-2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{10}{0,2}} rad/s \Rightarrow \omega = 5\sqrt{2}\, rad/s$$

Από τις εξισώσεις 4.15.4 παίρνουμε: $\upsilon_1 = 0,2\ 5\sqrt{2}$ m/s $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon_1 = \sqrt{2} \text{ m/s}}$ και

$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} m/s}$.

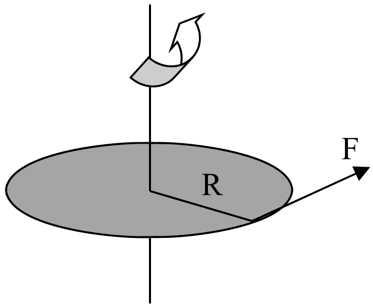
ε. Για το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας της τροχαλίας, σύμφωνα με την εξίσωση 4.51, έχουμε

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=\Sigma\tau^{(K)}\cdot\omega\overset{4.15.1}{\Longrightarrow}\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=I_K\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\omega\Rightarrow\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=9\times10^{-2}\cdot5\cdot5\sqrt{2}\,J/s\Rightarrow\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=2,25\sqrt{2}\,W$$

Παράδειγμα 4.16 Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας R = 0,1 m και μάζας M = 4 kg μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούμε στο δίσκο εφαπτομενικά στην περιφέρειά του οριζόντια δύναμη F, η οποία του προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ = 4 rad/s^2.
Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της δύναμης F.
β. τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου σε χρόνο 5 s.
γ. το έργο της ροπής της δύναμης F σε χρόνο 5 s.
δ. τη μέση ισχύ της ροπής στο χρονικό διάστημα των 5 s.
ε. την ισχύ της ροπής τη χρονική στιγμή t = 5 s.
στ. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δίσκου στο χρονικό διάστημα των 5s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}MR^2$



Λύση

α. Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow F\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow F=\frac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$$

$$F=\frac{1}{2}\cdot4kg\cdot0,1m\cdot4s^{-2}\Rightarrow F=0,8N.$$

β. $\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2\Rightarrow\Delta\theta=\frac{1}{2}\cdot4s^{-2}\cdot(5s)^2\Rightarrow\Delta\theta=50rad$.

γ. $W_\tau=\tau\cdot\Delta\theta\Rightarrow W_\tau=FR\cdot\Delta\theta\Rightarrow W_\tau=0,8N\cdot0,1m\cdot50\Rightarrow W_\tau=4J$

δ. $\overline{P}=\frac{W}{t}\Rightarrow\overline{P}=\frac{4J}{5s}\Rightarrow\overline{P}=0,8W$

ε. $\left.\begin{array}{c}P=\tau\cdot\omega\\ \omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}P=\tau\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}t\\ \tau=FR\end{array}\right\}\Rightarrow P=FR\alpha_{\gamma\omega\nu}t\Rightarrow P=0,8N\cdot0,1m\cdot4s^{-2}\cdot5s\Rightarrow P=1,6W$

στ. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Κ.Ε. η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το έργο της δύναμης F στο ίδιο χρονικό διάστημα. Συνεπώς $\Delta K=W_F\Rightarrow\Delta K=4J$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

__Οδηγία:__ Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

4.53. Η ροπή μιας δύναμης περιγράφει την ικανότητα της δύναμης

α. να προκαλεί παραμόρφωση σε ένα σώμα.
β. να προκαλεί αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας ενός σώματος.
γ. να προκαλεί ταλάντωση ενός σώματος.
δ. να στρέφει ένα σώμα.

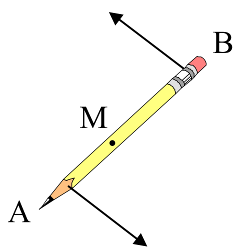
4.54. Για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί στο σώμα

α. δύναμη που ο φορέας της να είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής.
β. δύναμη που ο φορέας της να διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.
γ. ροπή.
δ. ροπή αδράνειας.

4.55. Ζεύγος δυνάμεων αποτελούν δυο δυνάμεις οι οποίες

α. είναι μεταξύ τους παράλληλες έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.
β. είναι ίσες και βρίσκονται σε παραλλήλους φορείς.
γ. είναι μεταξύ τους κάθετες και έχουν ίσα μέτρα.
δ. είναι μεταξύ τους κάθετες και η μια είναι διπλάσια της άλλης.

4.56. Σε ένα μολύβι, που ισορροπεί σε οριζόντια επιφάνεια, ασκούμε το ζεύγος των δυνάμεων που φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή του ζεύγους είναι



α. μεγαλύτερη ως προς το σημείο Α.
β. μεγαλύτερη ως προς το σημείο Β.
γ. μεγαλύτερη ως προς το μέσο Μ του μολυβιού.
δ. ίδια ως προς κάθε σημείο που ανήκει ή δεν ανήκει στο μολύβι.

4.57. Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα

α. είναι μηδέν όταν το σώμα στο οποίο ασκείται η δύναμη ισορροπεί.
β. είναι μηδέν όταν ο φορέας της τέμνει τον άξονα περιστροφής.
γ. είναι διανυσματικό μέγεθος με μονάδα μέτρησης στο S.I το 1 *N/m*.
δ. δεν εξαρτάται από τη θέση του άξονα.

4.58. Δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σε σώμα και προκαλεί ως προς ένα σημείο Ο του σώματος ροπή $\vec{\tau}_F$. Η ροπή της δύναμης ως προς το σημείο αυτό παραμένει σταθερή αν

α. αντιστρέψουμε την φορά της δύναμης.
β. μετακινήσουμε τη δύναμη πάνω στο φορέα της ώστε να ασκείται σε νέο σημείο.
γ. μετακινήσουμε τη δύναμη παράλληλα στο φορέα της.
δ. διπλασιάσουμε το μέτρο της δύναμης και ταυτόχρονα διπλασιάσουμε και τον μοχλοβραχίονα της.

4.59. Σε σώμα που έχει την δυνατότητα να περιστρέφεται γύρω από άξονα $z'z$ ασκείται δύναμη $\vec{F}$ η οποία δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς των άξονα περιστροφής $z'z$ έχει μέτρο που είναι ίσο με

α. μηδέν, αν ο φορέας της δύναμης δεν περνάει από τον άξονα περιστροφής.

β. το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

γ. το μέτρο της ροπής την οποία δημιουργεί η συνιστώσα της δύναμης που ανήκει στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα.

δ. το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί το τετράγωνο της απόστασης του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής της.

4.60. Τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις μέτρου $F_1 = F_2 = F_3 = 10$ N είναι παράλληλες και ασκούνται στα σημεία Κ, Λ και Μ αντίστοιχα, ενός σώματος. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Κ, και στο Λ απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 0,2 m και έχουν αντίθετη φορά. Ποια από της παρακάτω προτάσεις είναι σωστή.

Το μέτρο της συνισταμένης ροπής των τριών δυνάμεων ως προς το σημείο Μ είναι ίσο με

α. 2 Nm. **β.** 6 Nm. **γ.** 1,2 Nm. **δ.** 4 Nm.

4.61. Ένα στερεό σώμα ισορροπεί πάντα υπό την επίδραση τριών σταθερών ομοεπίπεδων δυνάμεων, αν

α. οι τρεις δυνάμεις είναι συγγραμμικές.

β. οι ροπές των δύο δυνάμεων ως προς το σημείο εφαρμογής της τρίτης δύναμης είναι διανύσματα αντίθετα.

γ. το στερεό έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί ως προς κάποιο σταθερό άξονα και η ροπή της κάθε δύναμης ως προς τον άξονα αυτό είναι ίση με μηδέν.

δ. καταργηθεί η μία από τις τρεις δυνάμεις υπάρχει περίπτωση το στερεό να εξακολουθήσει να ισορροπεί.

4.62. Ένα ελεύθερο στερεό σώμα ισορροπεί με τη δράση ομοεπίπεδων δυνάμεων. Οι δυνάμεις που δέχεται το στερεό σώμα ικανοποιούν τις σχέσεις.

α. $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ και $\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$ **β.** $\Sigma\vec{F} \neq \vec{0}$ και $\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$

γ. $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ και $\Sigma\vec{\tau} \neq \vec{0}$ **δ.** $\Sigma\vec{F} \neq \vec{0}$ και $\Sigma\vec{\tau} \neq \vec{0}$

4.63. Μία ομογενής ράβδος βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Στη ράβδο ασκούνται ταυτόχρονα δύο σταθερές δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη ράβδο και η ράβδος εξακολουθεί να ηρεμεί. Συνεπώς

α. οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.

β. η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι μηδέν.

γ. οι δύο δυνάμεις έχουν συνισταμένη ροπή, ως προς τον άξονα, ίση με μηδέν.

δ. οι δύο δυνάμεις είναι οπωσδήποτε ομόρροπες.

4.64. Μια αβαρής ράβδος μήκους ℓ δέχεται στα άκρα της Κ και Λ δυο κάθετες σε αυτήν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ίδιας φοράς, για τα μέτρα των οποίων ισχύει $F_1 = 2F$ και $F_2 = F$. Η ράβδος και οι δύο δυνάμεις βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει να ασκηθεί κάθετα σε αυτήν τρίτη δύναμη ομοεπίπεδη με τις άλλες δύο που το μέτρο της ισούται με

α. 2F και το σημείο εφαρμογής της απέχει από το άκρο Κ απόσταση $\ell/4$.

β. 3F και το σημείο εφαρμογής της απέχει από το άκρο Κ απόσταση $\ell/3$.

γ. 2F και το σημείο εφαρμογής της απέχει από το άκρο Κ απόσταση $\ell/3$.

δ. 3F και το σημείο εφαρμογής της απέχει από το άκρο Κ απόσταση $2\ell/3$.

4.65. Ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος ως προς κάποιον άξονα ονομάζουμε

α. το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την απόσταση του κέντρου μάζας από το σημείο περιστροφής.

β. το γινόμενο του τετραγώνου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής.

γ. το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής.

δ. το άθροισμα των γινομένων των τετραγώνων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τις αποστάσεις τους από τον άξονα περιστροφής.

4.66. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του, <u>δεν</u> εξαρτάται από

α. τη μάζα του σώματος. **β.** το μέγεθος και το σχήμα του σώματος.

γ. τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. **δ.** τη θέση του άξονα περιστροφής.

4.67. Η μάζα εκφράζει στη μεταφορική κίνηση ότι εκφράζει στην περιστροφική κίνηση

α. η ροπή. **β.** η ροπή αδράνειας.

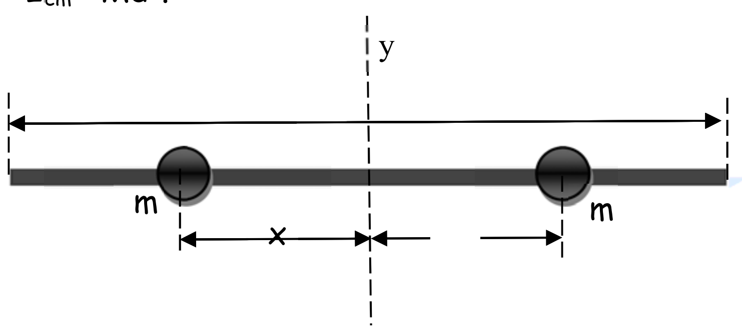
γ. η γωνιακή ταχύτητα. **δ.** η γωνιακή επιτάχυνση.

4.68. Ένα στερεό σώμα μάζας Μ έχει ροπή αδράνειας I_{cm} ως προς άξονα yy΄ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Η ροπή αδράνειας Ι του σώματος αυτού ως προς άξονα που είναι παράλληλος στον yy΄ και απέχει από αυτόν απόσταση d υπολογίζεται από τη σχέση

α. $I = I_{cm} + M\,d$. **β.** $I = I_{cm} + Md^2$.

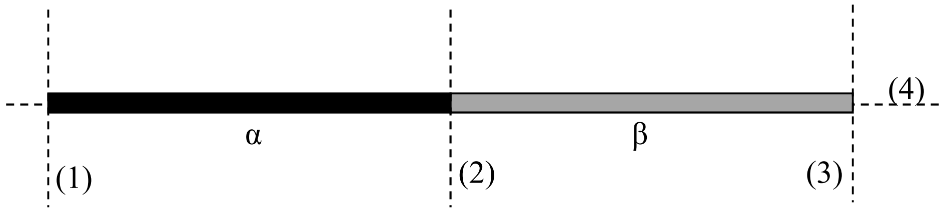
γ. $I = I_{cm}^2 + Md^2$. **δ.** $I = I_{cm} - Md^2$.

4.69. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια αβαρής ράβδος μήκους ℓ και δύο ίδιες σημειακές μάζες m, που η κάθε μια απέχει απόσταση x από τον άξονα περιστροφής, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της. Το σύστημα ράβδος - μάζες έχει ροπή αδράνειας Ι ως προς τον άξονα περιστροφής y ενώ αν η μάζες μετακινηθούν στα άκρα της ράβδου το σύστημα ράβδος - μάζες έχει ροπή αδράνειας 4Ι σε σχέση με τον ίδιο άξονα. Η απόσταση x ισούται με



α. $\frac{\ell}{4}$. β. $\frac{\ell}{3}$. γ. $\frac{\ell}{6}$. δ. $\frac{\ell}{8}$

4.70. Μια ράβδος αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά, τα οποία έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Το υλικό α έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το υλικό β. Η ροπή αδράνειας της ράβδου έχει μεγαλύτερη τιμή όταν αυτή στρέφεται γύρω από τον άξονα



α. (1). β. (2). γ. (3). δ. (4).

4.71. Ένας δίσκος και ένας δακτύλιος έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες. Συνεπώς

α. η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι μεγαλύτερη από του δακτυλίου.

β. η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι ίση με του δακτυλίου.

γ. η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι μικρότερη από του δακτυλίου.

δ. δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τις ροπές αδράνειας των δύο στερεών.

4.72. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο

α. της μάζας του σώματος και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του.

β. της γωνιακής ταχύτητας και της ροπής αδράνειας του σώματος (υπολογισμένη ως προς τον άξονα περιστροφής).

γ. της ροπής αδράνειας του σώματος (υπολογισμένη ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

δ. της ροπής αδράνειας του σώματος (υπολογισμένη ως προς τον άξονα περιστροφής) και του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

4.73. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

α. συσχετίζει τη γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού με τη γωνιακή του ταχύτητα.

β. συσχετίζει τη συνολική ροπή που ασκείται στο στερεό με τη γωνιακή του επιτάχυνση.

γ. συσχετίζει τη συνολική δύναμη που ασκείται στο στερεό με τη γωνιακή επιτάχυνσή του.

δ. εφαρμόζεται μόνο σε σώματα που εκτελούν στροφική κίνηση, χωρίς να μεταφέρονται.

4.74. Η γωνιακή επιτάχυνση ενός τροχού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι

α. ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής.

β. αντίστροφα ανάλογη στη μάζα του τροχού.

γ. ανεξάρτητη από τη δύναμη που ασκείται στον τροχό.

δ. αντίστροφα ανάλογη με την ροπή που ασκείται στον τροχό.

4.75. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στην περίπτωση που το στερεό κυλίεται, αρκεί να εφαρμοστεί για άξονα

α. παράλληλο στη μετατόπιση.

β. που είναι κάθετος στη μετατόπιση.

γ. που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ο οποίος είναι άξονας συμμετρίας και δεν αλλάζει προσανατολισμό.

δ. περιστροφής ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

4.76. Ένας δακτύλιος και ένας δίσκος έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα κάθετο στην επιφάνειά τους που περνάει από το κέντρο τους. Ασκούμε την ίδια δύναμη, εφαπτομενικά, σε σημείο της περιφέρειάς τους. Η γωνιακή επιτάχυνση

α. και των δύο είναι ίδια γιατί έχουν ίδια μάζα.

β. και των δύο είναι ίδια γιατί δέχονται την ίδια δύναμη.

γ. του δίσκου είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μικρότερη ροπή αδράνειας

δ. του δακτυλίου είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

4.77. Δύο συμπαγείς κύλινδροι, έχουν ίσες μάζες, ίδιο ύψος και μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους. Ο ένας είναι ξύλινος και ο άλλος σιδερένιος. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρειά τους την ίδια δύναμη. Η γωνιακή επιτάχυνση

α. και των δύο είναι ίδια γιατί έχουν ίδια μάζα.

β. και των δύο είναι ίδια γιατί δέχονται ίδια δύναμη.

γ. του ξύλινου κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

δ. του σιδερένιου κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μικρότερη ακτίνα.

4.78. Ένας κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν ο ίδιος κύλινδρος περιστρεφόταν γύρω από έναν άξονα παράλληλο ως προς τον πρώτο, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα,

α. η κινητική του ενέργεια θα ήταν ίδια.

β. η κινητική του ενέργεια θα ήταν μεγαλύτερη.

γ. η κινητική του ενέργεια θα ήταν μικρότερη.

δ. τα στοιχεία δεν είναι αρκετά για να απαντήσουμε.

4.79. Ένα αυτοκίνητο αυξάνει την ταχύτητα του από υ σε 2υ. Η στροφική κινητική ενέργεια των τροχών του

α. διπλασιάζεται. **β.** υποδιπλασιάζεται.

γ. τετραπλασιάζεται. **δ.** μένει σταθερή.

4.80. Ένας τροχός και ένας δίσκος, ίδιας μάζας και ακτίνας, μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδό τους που περνάει από το κέντρο τους. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $\frac{1}{2}mR^2$ και του τροχού mR^2. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια και των δύο την ίδια δύναμη F μέχρι να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Η ενέργεια που καταναλώσαμε

α. είναι ίδια και για τα δύο στερεά.
β. είναι μεγαλύτερη για τον τροχό.
γ. είναι μεγαλύτερη για το δίσκο.
δ. τα στοιχεία δεν είναι αρκετά για να απαντήσουμε.

4.81. Ένας τροχός και ένας δίσκος έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδό τους που περνάει από το κέντρο τους. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $\frac{1}{2}mR^2$ και του τροχού mR^2. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια και των δύο την ίδια δύναμη F μέχρι να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
Η μέση ισχύς που αναπτύξαμε
α. είναι ίδια και για τους δύο.
β. είναι μεγαλύτερη για τον τροχό
γ. είναι μεγαλύτερη για το δίσκο.
δ. τα στοιχεία δεν είναι αρκετά για να απαντήσουμε.

4.82. Ένα στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Με την επίδραση κατάλληλης ροπής, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβάλλεται από ω σε – ω. Αν η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I, το έργο της ροπής που ασκήθηκε είναι
α. $-I\omega^2$. **β.** 0. **γ.** $\frac{1}{2}I\omega^2$. **δ.** $I\omega^2$.

4.83. Δύο ράβδοι, ίδιων διαστάσεων, η μια ξύλινη και η άλλη μεταλλική, είναι ακίνητες και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το ένα άκρο τους. Ασκούμε κάθετα στο άλλο άκρο των ράβδων την ίδια δύναμη F για τον ίδιο χρόνο. Η ενέργεια που καταναλώνουμε
α. είναι η ίδια και για τις δύο ράβδους.
β. είναι μεγαλύτερη για την ξύλινη ράβδο.
γ. είναι μεγαλύτερη για τη μεταλλική ράβδο.
δ. τα στοιχεία δεν είναι αρκετά για να απαντήσουμε.

4.84. Η ροπή αδράνειας ενός γεωμετρικού στερεού, το οποίο κυλίεται, ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \lambda\, m\, R^2$ (π.χ συμπαγής ή κοίλη σφαίρα, κύλινδρος, δακτύλιος κλπ), όπου $\lambda > 0$ Ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική του κινητική ενέργεια κάθε στιγμή είναι
α. $\frac{1}{\lambda^2}$ **β.** $\frac{1}{\lambda}$
γ. λ^2 **δ.** λ.

4.85. Ασκώντας σταθερή δύναμη στα πεντάλ ενός ποδηλάτου τριπλασιάζουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του. Η ισχύς
α. τριπλασιάζεται. **β.** υποτριπλασιάζεται.
γ. εννεαπλασιάζεται. **δ.** μένει σταθερή.

4.86. Μια μπάλα του μπάσκετ κυλίεται σε οριζόντιο δάπεδο. Η ροπή αδράνειάς της είναι $I_{cm} = \frac{2}{3}mR^2$. Η κινητική ενέργεια της μπάλας λόγω της περιστροφής είναι

α. ίση με την κινητική ενέργεια της λόγω της μεταφοράς.

β. μισή από την κινητική ενέργεια της λόγω μεταφοράς.

γ. τα 2/3 της κινητικής ενέργειας της λόγω της μεταφοράς.

δ. το 1/3 της κινητικής ενέργειας της λόγω της μεταφοράς.

4.87. Η κινητική ενέργεια που έχει ένα στερεό σώμα το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του

α. ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειάς του επί τη γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του.

β. ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών που έχουν λόγω κυκλικής κίνησης οι στοιχειώδεις μάζες που το αποτελούν.

γ. είναι ανάλογο με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

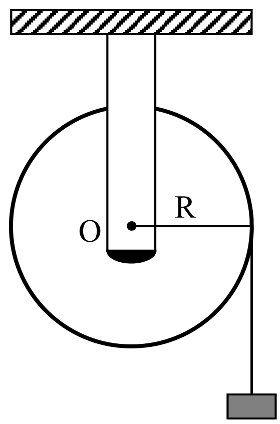
δ. είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του.

4.88. Μια σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο $I = \frac{2}{5}MR^2$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ισούται με

α. 40% **β.** $\frac{400}{3}\%$ **γ.** $\frac{200}{7}\%$ **δ.** $\frac{500}{3}\%$

4.89. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια τροχαλία μάζας Μ και ακτίνας R η οποία περιστρέφεται χωρίς τριβές καθώς ξετυλίγεται το αβαρές και μη εκτατό νήμα που έχουμε τυλίξει στο αυλάκι της. Η μάζα του σώματος, το οποίο είναι δεμένο στην άκρη του νήματος, ισούται με m = M/2 και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τη σχέση $I = 0,5MR^2$. Ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι η σωστή;



Στη χρονική διάρκεια που η δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m μειώθηκε κατά 10 J η κινητική ενέργεια της τροχαλίας αυξήθηκε κατά

α. 2 J. **β.** 5 J. **γ.** 8 J. **δ.** 10 J.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

4.90. Η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στη γη είναι μηδέν.

4.91. Ροπή 1 N m ως προς ένα σημείο O είναι η ροπή δύναμης μέτρου 1 N, της οποίας το σημείο εφαρμογής απέχει από το σημείο O απόσταση 1 m.

4.92. Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς σημείο έχει

α. μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση της από το σημείο αυτό.

β. διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την δύναμη και το σημείο O.

γ. φορά που καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού.

δ. σημείο εφαρμογής το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

4.93. Η ροπή μιας δύναμης ως προς έναν σταθερό άξονα

α. είναι μέγεθος διανυσματικό.

β. έχει στο S.I. μονάδα μέτρησης το 1 joule.

γ. μπορεί να έχει αρνητική αλγεβρική τιμή.

δ. δεν εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής.

ε. παριστάνεται με ένα διάνυσμα το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής.

4.94. Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς σημείο O είναι μηδέν στην περίπτωση που

α. το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι το σημείο O.

β. ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο O.

γ. το σώμα στο οποίο ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ δεν περιστρέφεται εξαιτίας της δράσης και άλλων δυνάμεων.

δ. η δύναμη είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζουν το σημείο εφαρμογής της δύναμης και το σημείο O.

4.95. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων

α. έχει μέτρο που ισούται με το γινόμενο της μιας από τις δυο δυνάμεις επί το μισό της απόστασης των δύο δυνάμεων.

β. ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που αποτελούν το ζεύγος ως προς το ίδιο σημείο.

γ. είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν υπολογιστεί.

δ. έχει θετική αλγεβρική τιμή όταν εξαιτίας του ζεύγους το σώμα περιστρέφεται αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

4.96. Η δυσκολία που συναντάμε, όταν θελήσουμε να θέσουμε σε περιστροφή ένα στερεό, εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής.

4.97. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του εξαρτάται μόνο από τη μάζα του και από την απόσταση του κέντρου μάζας του από τον άξονα περιστροφής.

4.98. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειας του ίδιου στερεού ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας.

4.99. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σταθερού σχήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του θα αυξηθεί αν μειωθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

4.100. Η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι ίση με μηδέν αν ο κύλινδρος είναι ακίνητος.

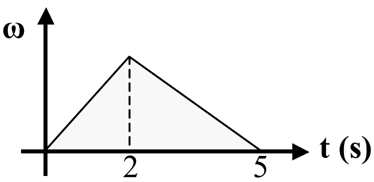
4.101. Η ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δακτυλίου μάζας Μ και ακτίνας R, δίνεται από τη σχέση $I = MR^2$.

4.102. Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν σ' ένα στερεό, που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι σταθερό, τότε η γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφεται το στερεό είναι σταθερή.

4.103. Μία ομογενής σφαίρα κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο και το κέντρο μάζας της έχει σταθερή ταχύτητα. Συνεπώς στη σφαίρα οι δυνάμεις και οι ροπές τους έχουν μηδενική συνισταμένη.

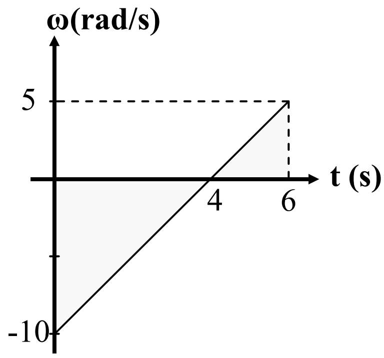
4.104. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει μόνο αν ο άξονας περιστροφής του στερεού είναι σταθερός.

4.105. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο, για έναν τροχό που περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του, με την επίδραση μιας δύναμης που ασκείται εφαπτομενικά στην περιφέρεια του.



α. στο χρονικό διάστημα 2-5 s ο τροχός επιβραδύνεται.
β. στο χρονικό διάστημα 0-2 s η ροπή της δύναμης αυξάνεται.
γ. στο χρονικό διάστημα 0-2 s η ροπή της δύναμης είναι σταθερή και θετική.
δ. στο χρονικό διάστημα 2-5 s η ροπή της δύναμης ελαττώνεται.

4.106. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο.



α. Η ροπή αδράνειας του τροχού αυξάνει συναρτήσει του χρόνου.
β. Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού έχει σταθερή φορά.
γ. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού από 0 έως 4 s έχει ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή επιτάχυνση.
δ. Η ροπή που ασκείται στον τροχό είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου.

4.107. Μια σφαίρα αφήνεται από την κορυφή πλάγιου επιπέδου και κυλάει.

α. Υπεύθυνη για την περιστροφή της ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της είναι η ροπή της τριβής.

β. Υπεύθυνη για τη γραμμική επιτάχυνσή της είναι η συνισταμένη του βάρους και της τριβής.

γ. Το πλάγιο επίπεδο είναι λείο.

δ. Η γραμμική επιτάχυνση a_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$ της σφαίρας συνδέονται με τη σχέση $a_{cm} = \alpha_{γων} R$.

4.108. Η κινητική ενέργεια, ενός ομογενούς δαχτυλιδιού που κυλίεται, λόγω μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης.

4.109. Αν ένα στερεό στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από σταθερό άξονα, τότε το έργο της συνολικής ροπής, ως προς τον ίδιο άξονα, είναι ίσο με μηδέν.

4.110. Η κινητική ενέργεια ενός στερεού, που εκτελεί στροφική κίνηση, δεν εξαρτάται από τη μάζα του στερεού.

4.111. Ένας ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R, περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η κινητική ενέργεια του δίσκου εξαρτάται

α. μόνο από τη μάζα Μ του δίσκου.

β. μόνο από την ακτίνα R του δίσκου.

γ. μόνο από το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του.

δ. και από τη μάζα Μ και από την ακτίνα R και από τη γωνιακή ταχύτητα ω.

4.112. Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Αν υποδιπλασιάσουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφή του θα υποδιπλασιαστεί και η κινητική του ενέργεια.

4.113. Ένας κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος από την κορυφή πλάγιου επιπέδου και κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει.

α. Η αύξηση της κινητικής του ενέργειας ισούται με τη μείωση της δυναμικής του ενέργειας.

β. Η μείωση της δυναμικής του ενέργειας ισούται με το έργο του βάρους του.

γ. Το έργο του βάρους του ισούται μόνο με την αύξηση της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης.

δ. Η κινητική του ενέργεια ισούται κάθε χρονική στιγμή με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφικής κίνησης.

4.114. Το έργο μιας σταθερής ροπής τ

α. μεταβάλλει μόνο την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης και ποτέ την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης.

β. υπολογίζεται από τη σχέση $W = \tau \cdot \omega$.

γ. είναι ανάλογο της γωνιακής μετατόπισης του σώματος.

δ. όταν το στερεό στραφεί κατά γωνία 360^0, είναι ίσο με $\tau \cdot 2\pi$.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

4.115. Να αντιστοιχίσετε τα φυσικά μεγέθη της στήλης Α με τις μονάδες μέτρησής τους στο S.I

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. γωνιακή ταχύτητα	*1.* m/s
β. γωνιακή επιτάχυνση	*2.* $kg\ m^2/s$
γ. ροπή ζεύγους δυνάμεων	*3.* $N\ m$
δ. ταχύτητα λόγω περιστροφής	*4.* rad/s^2
ε. ροπή αδράνειας	*5.* rad/s
	6. $kg\ m^2$

4.116. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. ροπή δύναμης	**1.** $I\ \alpha_{γων}$
β. θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης	**2.** $\omega\ R$
γ. ροπή αδράνειας στερεού	**3.** $2\ \omega\ R$
δ. ταχύτητα σημείου επαφής ενός τροχού που κυλίεται με το έδαφος	**4.** $\sum m_i r_i^2$
ε. ταχύτητα κέντρου μάζας ενός τροχού που κυλίεται	**5.** $F\ d$
	6. μηδέν

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

4.117. Να αποδείξετε ότι το μέτρο της ροπής ζεύγους δυνάμεων είναι ανεξάρτητο από τη θέση του άξονα περιστροφής.

4.118. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε ένα ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο σώμα.

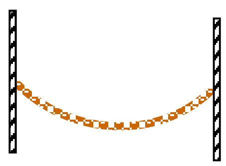
4.119. Να διατυπώσετε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Steiner) και να γράψετε τη μαθηματική του έκφραση. Να εξηγήσετε το κάθε σύμβολο που χρησιμοποιείτε.

4.120. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R

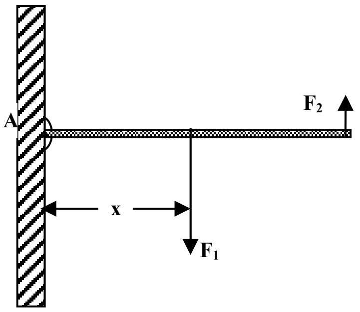
α. ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

β. ως προς άξονα που διέρχεται από ένα σημείο της περιφέρειάς του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

4.121. Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στην αλυσίδα του σχήματος, η οποία είναι στερεωμένη στα 2 άκρα της.



4.122. Αβαρής οριζόντια ράβδος μήκους ℓ, ισορροπεί οριζόντια με την επίδραση των δύο δυνάμεων $\vec{F_1}$ $και$ $\vec{F_2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Α. Η απόσταση x δίνεται από τη σχέση

α. $\frac{F_1 - F_2}{F_1}$ ℓ. **β.** $\frac{F_2}{F_1}$ ℓ

γ. $\frac{F_2 + F_1}{F_1}$ ℓ **δ.** $\frac{F_1}{F_2}$ ℓ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Β. Η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο

α. είναι οριζόντια.

β. είναι κατακόρυφη.

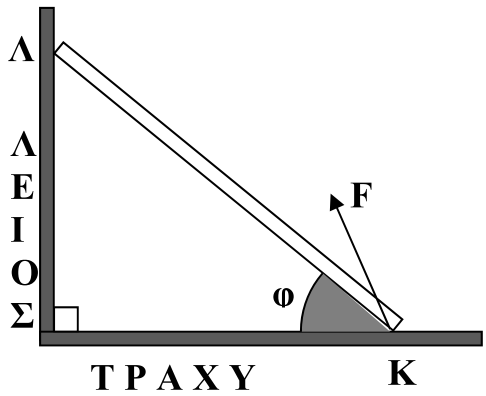
γ. έχει τυχαία διεύθυνση που εξαρτάται από τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F_1}$ $και$ $\vec{F_2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

4.123. Στερεό σώμα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $ω_0$ γύρω από σταθερό άξονα. Τη χρονική στιγμή t_1 ασκείται στο σώμα σταθερή ροπή για χρόνο t_2 οπότε και καταργείται. Να αποδώσετε γραφικά (ποιοτικά) τις μεταβολές σε συνάρτηση με το χρόνο της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού.

4.124. Ένας ομογενής τροχός ακτίνας R κυλίεται σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή επιτάχυνση $α_{cm}$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σημείου του τροχού, που βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της περιφέρειάς του, τη χρονική στιγμή που η γωνιακή του ταχύτητα είναι ω.

4.125. Η ράβδος του διπλανού σχήματος είναι ομογενής έχει βάρος w, μήκος ℓ και ισορροπεί ακίνητη με το επάνω άκρο της να ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο ενώ το κάτω άκρο της σε τραχύ δάπεδο. Η οξεία γωνία που σχηματίζει η ράβδος με το δάπεδο ισούται με φ ενώ η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται από το δάπεδο έχει μέτρο $\frac{5w}{4}$.



Α. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον κατακόρυφο τοίχο ισούται με

α. $\frac{3w}{4}$. **β.** $\frac{4w}{5}$. **γ.** $\frac{5w}{6}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

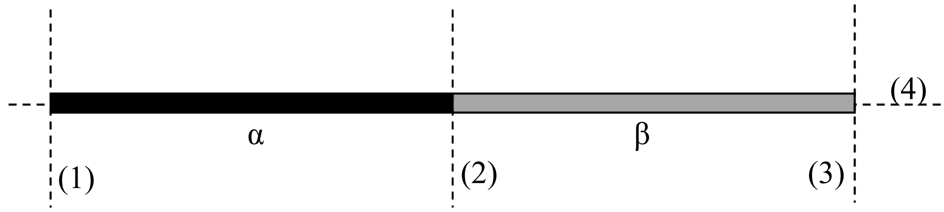
Β. Για την οξεία γωνία φ ισχύει

α. εφφ=$\frac{1}{2}$. **β.** εφφ = 1. **γ.** εφφ = $\frac{2}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.126. Πότε η ροπή αδράνειας μιας ανοιχτής πόρτας είναι μεγαλύτερη, όταν την σπρώξουμε αργά ή γρήγορα;

4.127. Μια λεπτή ράβδος μάζας Μ και μήκους L, αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά α και β, τα οποία έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Το υλικό α έχει τριπλάσια πυκνότητα από το υλικό β. Αν I_1, I_2, I_3 και I_4 είναι οι ροπές αδράνειας της ράβδου, ως προς τους άξονες (1), (2), (3) και (4), αντίστοιχα, να εξετάσετε την ισχύ των παρακάτω σχέσεων:



α. $I_1 = \frac{5}{24}ML^2$ **β.** $I_2 = \frac{1}{12}ML^2$. **γ.** $I_3 = \frac{21}{24}ML^2$. **δ.** $I_4 \cong 0$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου μήκους ℓ και μάζας m, ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το μέσον της: $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$.

4.128. Το σχήμα της προηγούμενης ερώτησης παριστάνει την οριζόντια τομή μιας πόρτας.

Α. Σε ποιο άκρο θα βάζατε τους μεντεσέδες, ώστε η πόρτα να ανοίγει ποιο εύκολα;

α. Στο άκρο από το οποίο διέρχεται ο άξονας (1) ή

β. στο άκρο από το οποίο διέρχεται ο άξονας (3);

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β. Σε ποιο άκρο θα βάζατε τους μεντεσέδες, ώστε αν στο άλλο άκρο ασκήσουμε κάθετα στην επιφάνεια της πόρτας (*) δύναμη ίδιου μέτρου, η πόρτα να περιστραφεί με τη μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση;

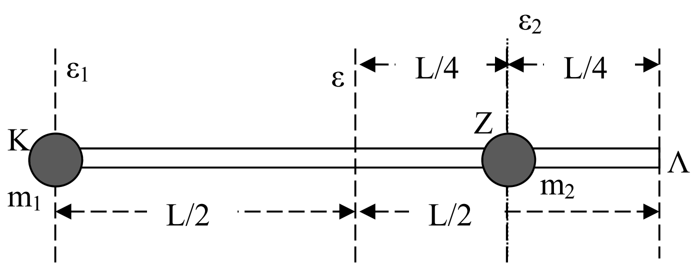
α. Στο άκρο από το οποίο διέρχεται ο άξονας (1) ή

β. στο άκρο από το οποίο διέρχεται ο άξονας (3);

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(*)(Ο φορέας της δύναμης δεν διέρχεται από τον άξονα (1) ή (3) και δεν είναι παράλληλος με αυτούς.)

4.129. Μια ομογενής ράβδος ΚΛ μήκους L και μάζας Μ έχει στο άκρο της Κ κολλημένη μια σημειακή μάζα m_1 ενώ άλλη μια σημειακή μάζα m_2 είναι κολλημένη σε σημείο Ζ της ράβδου που απέχει από το άκρο της Λ απόσταση L/4 όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα (ε) που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτήν, δίνεται από τη σχέση



$I_{\rho,cm} = \frac{1}{12}ML^2$ η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακές μάζες ως προς τον άξονα (ε_1) δίνεται από τη σχέση $I_1 = \frac{25}{48}ML^2$, ενώ η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακές μάζες ως προς τον άξονα (ε_2) δίνεται από τη σχέση $I_2 = \frac{1}{3}ML^2$.

Α. Οι μάζες m_1 και m_2 ικανοποιούν τη σχέση

α. $m_1 = m_2$. **β.** $m_1 = 2m_2$. **γ.** $m_1 = 4m_2$.

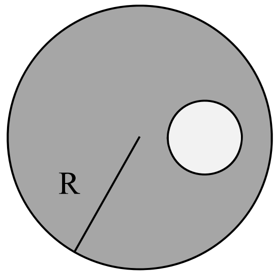
Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακές μάζες ως προς τον άξονα (ε) δίνεται από τη σχέση

α. $I_{(\varepsilon)} = \frac{33}{48} ML^2$. **β.** $I_{(\varepsilon)} = \frac{10}{48} ML^2$. **γ.** $I_{(\varepsilon)} = \frac{3}{16} ML^2$.

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

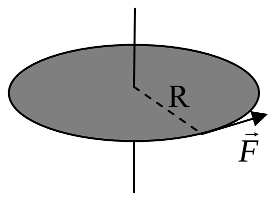
4.130. Η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς και συμπαγούς δίσκου ακτίνας R, μάζας M_0 και πάχους Δx, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του, δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{2} M_0 R^2$. Αφαιρούμε από το δίσκο αυτό ένα κομμάτι σχήματος κύκλου ακτίνας R/4 και πάχους Δx, που το κέντρο του απέχει από το κέντρο του δίσκου απόσταση R/2 όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στερεού που απομένει, ως προς τον άξονα περιστροφής, ισούται με



α. $\frac{247}{512} M_0 R^2$ **β.** $\frac{153}{256} M_0 R^2$ **γ.** $\frac{57}{128} M_0 R^2$

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.131. Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R = 0,2 m και τη χρονική στιγμή t = 0 ξεκινά από την ηρεμία και περιστρέφεται χωρίς τριβές με την επίδραση εφαπτομενικής δύναμης $\vec{F}$ μέτρου F = 10 N, γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του ισούται με I = 2 kg m^2 . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;



α. Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

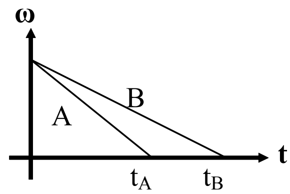
β. Η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου έχει μέτρο 2 N m.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει μέτρο 2 rad/s.

δ. Τη χρονική στιγμή t_2 = 4 s ο δίσκος έχει εκτελέσει 8/π περιστροφές.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4.132. Δύο σφαίρες Α και Β ίδιας ακτίνας, φτάνουν με την ίδια ταχύτητα στη βάση πλάγιου επιπέδου και αρχίζουν να το ανεβαίνουν κυλιόμενες. Οι γωνιακές ταχύτητες των δύο σφαιρών, σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνονται στο σχήμα. Αν οι σφαίρες κατά την άνοδό τους δέχτηκαν την ίδια επιβραδύνουσα ροπή τότε



α. απέκτησαν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.

β. η σφαίρα Α έχει μικρότερη ροπή αδράνειας.

γ. η σφαίρα Α έκανε περισσότερες περιστροφές μέχρι να σταματήσει.

δ. η σφαίρα Β έφτασε ψηλότερα στο πλάγιο επίπεδο απ' ότι η σφαίρα Α.

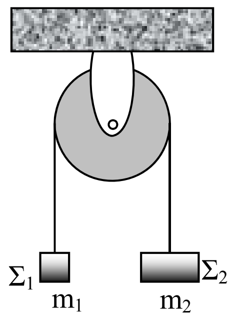
Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.133. Δύο κύλινδροι, ίδιας μάζας και ακτίνας, αφήνονται να κυλήσουν από το ίδιο ύψος κατά μήκος πλάγιου επιπέδου. Ο κύλινδρος Α είναι συμπαγής ενώ ο κύλινδρος Β κοίλος.

α. Η στατική τριβή είναι ίδια και για τους δύο κυλίνδρους.
β. Ο κύλινδρος Α θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση.
γ. Ο κύλινδρος Α θα φτάσει γρηγορότερα στη βάση του πλάγιου επιπέδου.
δ. Ο κύλινδρος Α θα κάνει περισσότερες στροφές μέχρι να φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου απ' ότι ο κύλινδρος Β.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.134. Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα Μ και ακτίνα R και περιστρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{5R}$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Τα δύο σώματα που είναι δεμένα στο αβαρές και μη εκτατό νήμα έχουν μάζες που ικανοποιούν τη σχέση $m_2 = 2m_1$ ενώ η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

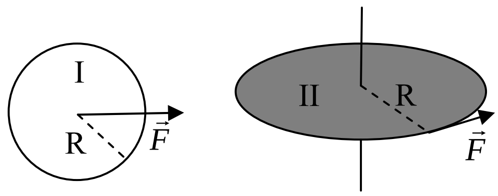


Η μάζα m_1 ισούται με

α. Μ/6. **β.** Μ/2. **γ.** Μ/4. **δ.** Μ/8.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4.135. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ίδιοι οριζόντιοι δίσκοι μάζας Μ και ακτίνας R = 0,5 m ο καθένας. Ο δίσκος (Ι) κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με τη δράση σταθερής δύναμης μέτρου F ενώ ο δίσκος (ΙΙ) περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο έχει ροπή αδράνειας 0,5 MR^2, με τη δράση εφαπτομενικής δύναμης σταθερού μέτρου ίσου με F. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;



Αν ο δίσκος (1) κινείται με επιτάχυνση μέτρου 2 m/s^2 τότε ο δίσκος (2) περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου

α. 2 rad/s^2. **β.** 4 rad/s^2. **γ.** 6 rad/s^2. **δ.** 8 rad/s^2.

4.136. Ένας δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R αφήνεται ελεύθερος από την κορυφή πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 60^0 και κυλίεται πάνω σε αυτό χωρίς να ολισθαίνει. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου έχει μέτρο

α. $a_{cm} = \frac{2g}{3}$ **β.** $a_{cm} = \frac{g\sqrt{3}}{3}$ **γ.** $a_{cm} = g\sqrt{3}$

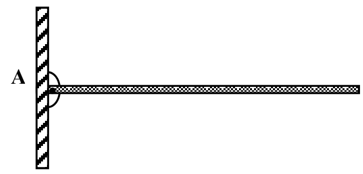
Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Η δύναμη που δέχεται ο δίσκος από το πλάγιο επίπεδο κατά την διάρκεια της κίνησής του σε αυτό έχει μέτρο

α. $\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$ **β.** $\frac{Mg\sqrt{3}}{6}$ **γ.** $\frac{Mg\sqrt{2}}{2}$

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.137. Η οριζόντια ομογενής ράβδος του διπλανού σχήματος μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο της Α. Αρχικά, η ράβδος συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση και αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί γύρω από τον άξονα περιστροφής της χωρίς τριβές. Μέχρι η ράβδος να γίνει κατακόρυφη για πρώτη φορά, το μέτρο της γωνιακής της επιτάχυνσης

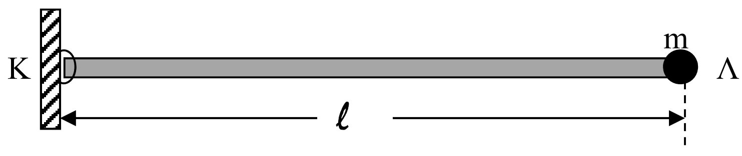


α. αυξάνεται. **β.** μειώνεται.

γ. παραμένει σταθερό. **δ.** αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

4.138. Η ομογενής ράβδος ΚΛ του διπλανού σχήματος έχει μάζα Μ μήκος ℓ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Κ. Στο άκρο της Λ της ράβδου έχουμε στερεώσει σημειακό αντικείμενο μάζας m = M/4. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και περνά από το μέσο της υπολογίζεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$. Αρχικά η ράβδος κρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση και κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερη.

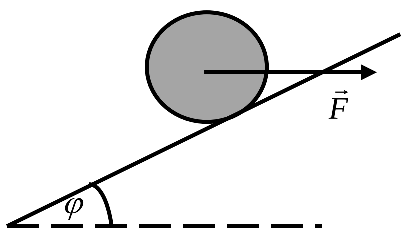


Αν g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη έχει μέτρο

α. $\frac{8g}{3\ell}$ **β.** $\frac{9g}{7\ell}$ **γ.** $\frac{8g}{5\ell}$ **δ.** $\frac{9g}{8\ell}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

4.139. Μια σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R ηρεμεί στη βάση πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούμε στο κέντρο μάζας της σφαίρας οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ οπότε η σφαίρα ξεκινά να ανεβαίνει στο πλάγιο επίπεδο. Αν το πλάγιο επίπεδο είναι λείο, τότε η σφαίρα φτάνει στην κορυφή του την χρονική στιγμή t_1, ενώ αν το πλάγιο επίπεδο είναι τραχύ ώστε η σφαίρα να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε αυτό, η σφαίρα φτάνει στην κορυφή του την χρονική στιγμή t_2. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της υπολογίζεται από τον τύπο $I = \frac{2}{5}MR^2$.



Α. Η στατική τριβή που δέχεται η σφαίρα από το τραχύ δάπεδο έχει

α. ίδια φορά με αυτή της κίνησης του κέντρου μάζας.

β. αντίθετη φορά από αυτή της κίνησης του κέντρου μάζας.

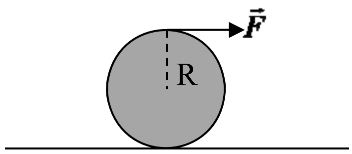
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ικανοποιούν τη σχέση

α. $t_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot t_2$. **β.** $t_1 = \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot t_2$. **γ.** $t_1 = \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot t_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.140. Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει μάζα M = 2 kg ακτίνα R και αρχικά είναι ακίνητος στο οριζόντιο δάπεδο. Από τη χρονική στιγμή t = 0 και μετά, ο τροχός δέχεται οριζόντια σταθερή δύναμη που ασκείται συνεχώς στο ανώτατο σημείο του, οπότε αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο και κατά τη διάρκεια της κίνησης του δέχεται στατική τριβή μέτρου $\Im_s = 10N$. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$



Α. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με

α. 30 N. **β.** 20 N. **γ.** 10 N.

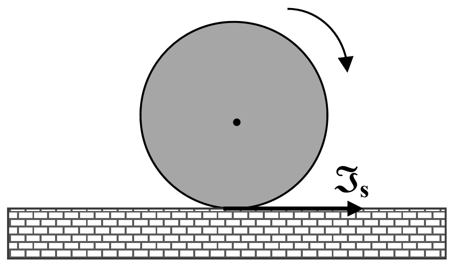
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Το μέτρο της επιτρόχειας επιτάχυνσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με

α. 20 m/s^2. **β.** 30 m/s^2. **γ.** 40 m/s^2.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.141. Μια σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με την βοήθεια οριζόντιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ η οποία ασκείται στο κέντρο της μάζας της. Η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά και η ροπή αδράνειας της ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας δίνεται από τη σχέση $I = \lambda MR^2$ (όπου λ θετική σταθερά). Στο σχήμα φαίνεται η φορά της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα.



Α. Η δύναμη $\vec{F}$ έχει

α. ίδια φορά με την $\vec{\Im}_s$. **β.** αντίθετη φορά από την $\vec{\Im}_s$.

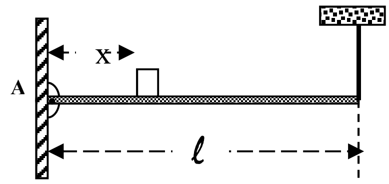
Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα ικανοποιεί τη σχέση

α. $\Im_s = \frac{\lambda}{\lambda+1}F$ **β.** $\Im_s = (\lambda+1)F$ **γ.** $\Im_s = \frac{\lambda+1}{\lambda}F$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.142. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ και βάρους w που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια κατακόρυφου, αβαρούς και μη εκτατού. νήματος, που εί-ναι δεμένο στο άλλο άκρο της ράβδου.



Ένα μικρό σώμα βάρους $w_1 = \frac{w}{4}$ μπορεί να μετακινείται πάνω στη ράβδο.

Α. Το μέτρο της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση x του σώματος από το άκρο Ο της ράβδου δίνεται από την σχέση

α. $T = \frac{w}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2\ell}\right), \gamma\iota\alpha\ 0 \le x \le \ell$ **β.** $T = \frac{w}{2}\left(1 + \frac{x}{2\ell}\right), \gamma\iota\alpha\ 0 \le x \le \ell$.

γ. $T = w\left(1 + \frac{x}{2\ell}\right), \gamma\iota\alpha\ 0 \le x \le \ell$.

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Αν το σώμα βάρους w_1 ακινητοποιηθεί στη θέση x = $\frac{\ell}{4}$ τότε για να αποκτήσει η τάση του νήματος μέτρο ίσο με $T = \frac{35w}{48}$, πρέπει να τοποθετήσουμε επάνω στη ράβδο και ένα δεύτερο μικρό σώμα βάρους $w_2 = w_1 = w/4$ σε σημείο Ζ που απέχει από το άκρο Α από-σταση

α. $\frac{\ell}{4}$. **β.** $\frac{2\ell}{3}$. **γ.** $\frac{5\ell}{6}$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.143. (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ) Δύο συμπαγείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αφήνονται από δύο σημεία, που βρίσκονται στο ίδιο ύψος, ενός πλάγιου επιπέδου. Η σφαίρα Σ_1 κατέρχε-ται κυλιόμενη ενώ η Σ_2 είναι καλυμμένη με λιπαντικό ώστε να ολισθαίνει χωρίς να πε-ριστρέφεται. Στη βάση του πλάγιου επιπέδου

α. με μεγαλύτερη ταχύτητα θα φτάσει η σφαίρα Σ_1.

β. με μεγαλύτερη ταχύτητα θα φτάσει η σφαίρα Σ_2.

γ. οι δύο σφαίρες θα φτάσουν με ίσες ταχύτητες.

δ. δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τις ταχύτητες των δύο σφαιρών, επειδή τα στοιχεία είναι ελλιπή (μάζα, ακτίνα)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.144. (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ) Μια συμπαγής σφαίρα (σ), ένας σφαιρικός φλοιός (φ) και ένα δαχτυλίδι (δ) αφήνονται από την κορυφή του ίδιου πλάγιου επιπέδου. Όλα τα σώματα κατέρχονται κυλιόμενα. Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας είναι $I_\sigma = \frac{2}{5}mR^2$, $I_\varphi = \frac{2}{3}mR^2$, $I_\delta = mR^2$. Η αύξουσα σειρά των μέτρων των ταχυτήτων με τις οποίες θα φτάσουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου είναι

α. $\upsilon_\delta < \upsilon_\sigma < \upsilon_\varphi$ **β.** $\upsilon_\varphi < \upsilon_\sigma < \upsilon_\delta$

γ. $\upsilon_\delta < \upsilon_\varphi < \upsilon_\sigma$ **δ.** $\upsilon_\sigma < \upsilon_\delta < \upsilon_\varphi$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.145. (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ) Ένας συμπαγής κύλινδρος (κ), μια συμπαγής σφαίρα (σ) και ένα δακτυλίδι (δ) αφήνονται ταυτόχρονα από την κορυφή του ίδιου πλάγιου επιπέδου. Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας είναι $I_κ = \frac{1}{2}m_1R_1^2$, $I_σ = \frac{2}{5}m_2 R^2$, και $I_δ = m_3R_3^2$.

Η χρονική σειρά με την οποία θα φτάσουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου είναι:

α. δακτυλίδι, κύλινδρος, σφαίρα.
β. σφαίρα, κύλινδρος, δακτυλίδι.
γ. κύλινδρος και δακτυλίδι μαζί και μετά η σφαίρα.
δ. κύλινδρος, δακτυλίδι, σφαίρα.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.146. Να αποδείξετε τη μαθηματική σχέση από την οποία υπολογίζεται το έργο μιας δύναμης, με όρους ροπής.

4.147. Να αποδείξετε τη μαθηματική σχέση από την οποία υπολογίζεται η ισχύς μιας δύναμης, με όρους ροπής.

4.148. Να διατυπώσετε και να γράψετε τη μαθηματική έκφραση του θεωρήματος έργου – ενέργειας στη στροφική κίνηση. Να εξηγήσετε τι δηλώνει το κάθε σύμβολο που θα χρησιμοποιήσετε.

4.149. Να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια ενός κυλίνδρου ακτίνας R και μάζας M, ο οποίος κυλίεται με ταχύτητα υ, είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα του. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

4.150. Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του που περνάει από το κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα $ω_1$ = 10 rad/s. Με την άσκηση σταθερής ροπής επιταχύνουμε τον τροχό μέχρι να αποκτήσει πρώτα γωνιακή ταχύτητα $ω_2$ = 20 rad/s και στη συνέχεια γωνιακή ταχύτητα $ω_3$ = 30 rad/s.

α. Για να αυξήσουμε τη γωνιακή ταχύτητα από $ω_1$ σε $ω_2$ καταναλώνουμε περισσότερη ενέργεια απ' ότι για να την αυξήσουμε από $ω_2$ σε $ω_3$.
β. Το έργο της ροπής είναι μεγαλύτερο στη μεταβολή από $ω_2$ σε $ω_3$.
γ. Η ενέργεια που καταναλώνουμε είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.
δ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι μεγαλύτερη, όταν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται από $ω_2$ σε $ω_3$.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.151. Δύο κινητήρες έχουν τα εξής χαρακτηριστικά: ο πρώτος ισχύ 600 W στις 6000 στροφές/min και ο δεύτερος ροπή 10 Nm στις 3000 στροφές/min.

α. ο πρώτος κινητήρας έχει μεγαλύτερη ισχύ και ροπή από το δεύτερο.
β. ο δεύτερος κινητήρας έχει μεγαλύτερη ισχύ και ροπή από τον πρώτο.
γ. ο πρώτος κινητήρας έχει μεγαλύτερη ισχύ αλλά μικρότερη ροπή από το δεύτερο.
δ. όσο έργο παράγει ο πρώτος σε 10 s, το παράγει ο δεύτερος σε 12 s.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.152. Ένας τροχός και ένας δίσκος, ίδιας μάζας και ακτίνας με ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής τους $I_τ$ και $I_δ$ ($I_τ > I_δ$), μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδό τους που περνάει από το κέντρο τους. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια και των δύο την ίδια δύναμη F μέχρι να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

α. Η γωνιακή μετατόπιση του τροχού είναι μεγαλύτερη από αυτήν του δίσκου.
β. Η κινητική ενέργεια και των δύο είναι ίδια.
γ. Το έργο που καταναλώσαμε ήταν το ίδιο και για τους δύο.
δ. Η μέση ισχύς που καταναλώσαμε ήταν η ίδια και για τους δύο.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.153. Ένας συμπαγής και ένας κοίλος κύλινδρος, ίδιας μάζας και ακτίνας, μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τους άξονες συμμετρίας τους οι οποίοι είναι σταθεροί. Η ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I_σ = \frac{1}{2}mR^2$ ενώ του κοίλου $I_κ = mR^2$. Τυλίγουμε στην περιφέρεια και των δύο αβαρή νήματα, ίδιου μήκους και ασκούμε στα νήματα την ίδια σταθερή δύναμη F. Όταν τα νήματα ξετυλιχτούν τελείως

α. η ενέργεια που δαπανήσαμε είναι ίδια και για τους δύο.
β. ο συμπαγής κύλινδρος θα έχει αποκτήσει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.
γ. η μέση ισχύς που δαπανήσαμε είναι ίδια και για τους δύο.
δ. ο κοίλος κύλινδρος θα έχει αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.154. Δύο όμοιες σφαίρες αφήνονται από το ίδιο σημείο πλάγιου επιπέδου. Η μια σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη ενώ η άλλη είναι καλυμμένη με λιπαντικό ώστε να ολισθαίνει χωρίς να περιστρέφεται.

α. Το έργο του βάρους είναι το ίδιο και για τις δύο σφαίρες.
β. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας των δύο σφαιρών μέχρι να φτάσουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου είναι η ίδια.
γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας που ολισθαίνει θα είναι κάθε στιγμή μεγαλύτερη από αυτήν της σφαίρας που κυλίεται.
δ. Όταν φτάνουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου, η συνολική κινητική ενέργεια της σφαίρας που κυλίεται θα είναι ίση με αυτήν της σφαίρας που ολισθαίνει.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

4.155. Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου αφήνουμε να κυλήσουν μια συμπαγή και μια κοίλη σφαίρα, ίδιας μάζας και ακτίνας. Οι ροπές αδράνειας των σφαιρών είναι $I_σ = \frac{2}{5}mR^2$ και $I_κ = \frac{2}{3}mR^2$, αντίστοιχα.

α. Στη βάση του πλάγιου επιπέδου θα φτάσει με μεγαλύτερη μεταφορική ταχύτητα η συμπαγής σφαίρα.
β. Στη βάση του πλάγιου επιπέδου θα φτάσει με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια η κοίλη σφαίρα.
γ. Η συμπαγής σφαίρα θα βρίσκεται κάθε στιγμή πιο μπροστά από την κοίλη.
δ. Αν οι σφαίρες ολίσθαιναν θα αποκτούσαν μεγαλύτερες μεταφορικές ταχύτητες.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

4.156. Δύο ομογενείς λεπτές ράβδοι ίδιου μήκους είναι κατασκευασμένες η μία από σίδηρο και η άλλη από ξύλο. Οι ράβδοι μπορούν να περιστρέφονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το ένα άκρο τους. Ασκούμε στο άλλο άκρο των ράβδων, κάθετα στο μήκος τους, την ίδια δύναμη F για ίδιο χρονικό διάστημα. Το έργο της F

α. είναι το ίδιο και για τις δύο ράβδους.
β. είναι μεγαλύτερο για τη ξύλινη ράβδο.
γ. είναι μεγαλύτερο για τη μεταλλική ράβδο.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.157. Μια σφαίρα κυλίεται με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο και ένας κύβος ίσης μάζας ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων έχουν ίσες ταχύτητες. Η ενέργεια, που θα απαιτηθεί για να σταματήσουμε τα δύο σώματα, είναι

α. ίδια.
β. μεγαλύτερη για τη σφαίρα.
γ. μεγαλύτερη για τον κύβο.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.158. Ένα στερεό περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ως προς τον οποίο έχει ροπή αδράνειας Ι. Με την επίδραση κατάλληλης ροπής, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβάλλεται από $\vec{\omega}$ $\sigma\varepsilon$ $-\vec{\omega}$. Το έργο της ροπής είναι

α. μηδέν **β.** $I\omega^2$
γ. $-I\omega^2$ **δ.** $\frac{1}{2}I\omega^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

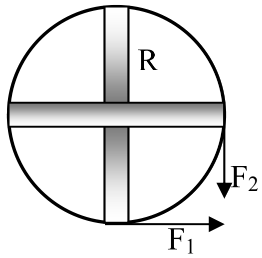
4.159. Ένας δίσκος και ένας δακτύλιος έχουν την ίδια κινητική ενέργεια στη βάση ενός πλάγιου επιπέδου. Τα δύο σώματα ανεβαίνουν στο πλάγιο επίπεδο κυλιόμενα χωρίς να ολισθαίνουν. Ο δακτύλιος έχει διπλάσια μάζα και τη μισή ακτίνα από τον δίσκο.

α. Τα δύο σώματα θα σταματήσουν στιγμιαία στο ίδιο ύψος.
β. Τα δύο σώματα θα εκτελέσουν τον ίδιο αριθμό περιστροφών μέχρι να σταματήσουν στιγμιαία.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση με το γράμμα Σ αν την κρίνετε σωστή και με το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4.160. Ένα μη συμπαγές κυλινδρικό σώμα μάζας M και ακτίνας R, αφήνεται από την κορυφή πλάγιου επιπέδου ύψους h. Το σώμα κυλίεται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου, χωρίς να ολισθαίνει, και φτάνει στη βάση του με ταχύτητα μέτρου, $\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{8gh}{7}}$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι άξονας συμμετρίας του.

4.161. Ο οριζόντιος τροχός του σχήματος έχει μάζα M ακτίνα R και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του (οι ακτίνες του τροχού έχουν αμελητέα μάζα). Αρχικά ο τροχός είναι ακίνητος και από τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούνται συνεχώς εφαπτομενικά στην περιφέρειά του δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ εκ των οποίων η $\vec{F_1}$ έχει σταθερό μέτρο F_1 = F ενώ η $\vec{F_2}$ έχει μεταβλητό μέτρο. Στο τέλος της πρώτης περιστροφής η κινητική ενέργεια του τροχού ισούται με $1{,}5\pi FR$ και ο τροχός περιστρέφεται αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

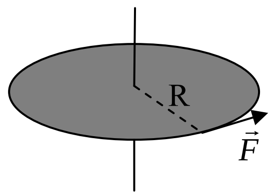
Το έργο της δύναμης $\vec{F_2}$ για την πρώτη περιστροφή ισούται με

α. -0,5πFR **γ.** +0,8πFR

β. +3,5πFR **δ.** -0,2πFR

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.162. Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, έχει μάζα M ακτίνα R και δέχεται συνεχώς εφαπτομενικά στην περιφέρεια του δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο δίσκος είναι ακίνητος και τη χρονική στιγμή t_1 η στιγμιαία ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με P ενώ τη χρονική στιγμή t_2 η στιγμιαία ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με 2P.



Α. Για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει

1. $t_2 = 2t_1$ **2.** $t_2 = 2{,}5t_1$ **3.** $t_2 = 5t_1$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσο με

1. $\frac{3P^2M}{4F^2}$ **2.** $\frac{2P^2M}{F^2}$ **3.** $\frac{3P^2M}{F^2}$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.163. Ένας δακτύλιος μάζας M και ακτίνας R και ένας κύβος ιδίας μάζας με τον δακτύλιο αφήνονται ταυτόχρονα ελευθέρα να κινηθούν από το ίδιο ύψους ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 45^0$. Ο δακτύλιος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ενώ ο κύβος ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο εμφανίζοντας με αυτό συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}5$.

Α. Στη βάση του πλάγιου επιπέδου

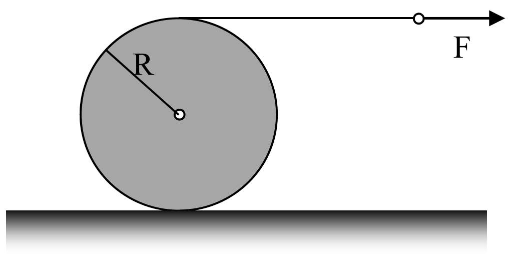
1. φτάνει πρώτα ο δακτύλιος.
2. φτάνει πρώτα ο κύβος.
3. τα δυο σώματα φτάνουν ταυτόχρονα.

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Αν η κινητική ενέργεια του δακτυλίου και η κινητική ενέργεια του κύβου όταν αυτά φτάνουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου ισούται με K_1 και K_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει η σχέση **1.** $K_2 = K_1$ **2.** $K_2 = 0{,}5K_1$ **3.** $K_2 = 0{,}2K_1$

Να επιλέξετε την σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.164. Ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος έχει μάζα M, ακτίνα R και αρχικά είναι ακίνητος. Από τη χρονική στιγμή t = 0 και μετά, ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του αβαρούς λεπτού και μη εκτατού νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω του οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ οπότε ο κύλινδρος ξεκινά να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς το νήμα να γλιστρά στο αυλάκι του. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο των δυο βάσεων του υπολογίζεται από τον τύπο $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Α. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισούται με **1.** $\frac{3F}{2M}$. **2.** $\frac{4F}{3M}$. **3.** $\frac{2F}{5M}$.

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από την χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η δεύτερη στροφή του κυλίνδρου είναι ίσο με

1. $4\pi FR$ **2.** $6\pi FR$ **3.** $8\pi FR$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.165. Ένας ομογενής δίσκος έχει μάζα M και ακτίνα R και κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο κινούμενος προς τα δεξιά με ταχύτητα κέντρου μάζας $\vec{u}_{0,cm}$ και με κινητική ενέργεια K_0. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$. Από τη χρονική στιγμή t = 0 και μετά ο δίσκος δέχεται οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο κέντρο μάζας του, στη διεύθυνση της ταχύτητας του κέντρου μάζας του με αποτέλεσμα να αρχίσει να δέχεται από το δάπεδο στατική τριβή με φορά ίδια με αυτή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του συνεχίζοντας να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Α. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω μεταφορικής κίνησης έχει μεταβληθεί κατά 25% ισούται με

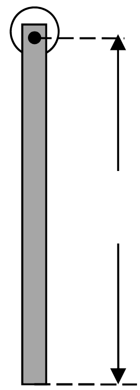
1. $-0,5K_0$ **2.** $+0,75K_0$ **3.** $-0,25K_0$

Β. Η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφικής κίνησης του δίσκου τη στιγμή που η κινητική ενέργεια έχει μεταβληθεί κατά 75% ισούται με

1. $\dfrac{Fu_{0,cm}}{6}$. **2.** $\dfrac{Fu_{0,cm}}{4}$. **3.** $\dfrac{Fu_{0,cm}}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

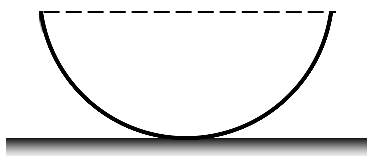
4.166. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια ακίνητη ομογενής ράβδος μήκους ℓ και μάζας Μ, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτήν υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{12}M\ell^2$. Η ελάχιστη αρχική γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να προσδώσουμε στη ράβδο στην κατακόρυφη θέση στην οποία βρίσκεται, ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση, έχει μέτρο ίσο με



α. $\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}}$. **β.** $\sqrt{\dfrac{6g}{\ell}}$. **γ.** $\sqrt{\dfrac{9g}{\ell}}$.

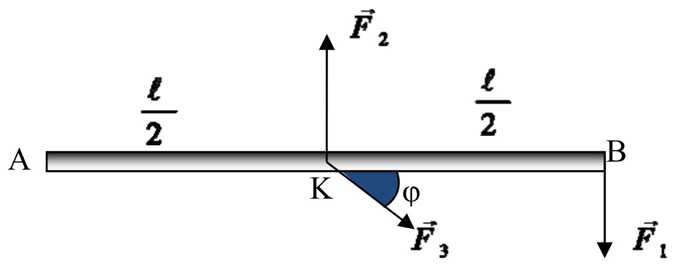
Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.167. Μια σφαίρα βάρους w και ακτίνας r, κυλίεται μέσα σε κατακόρυφο αμετακίνητο ημισφαίριο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από το ένα χείλος του ημισφαιρίου. Να αποδείξετε ότι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το ημισφαίριο στη σφαίρα, όταν αυτή διέρχεται από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της είναι ίσο με $\frac{17}{7}w$. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $\frac{2}{5}mr^2$.



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

4.168. Η ράβδος ΑΒ του σχήματος, μήκους $\ell = 2m$ και αμελητέου βάρους, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος στον κατά μήκος άξονά της. Στη ράβδο ασκούνται οι ομοεπίπεδες δυνάμεις F_1 = 200 N, F_2 = 100 N και F_3 = 100 N, ενώ οι φορείς τους βρίσκονται σε κατακόρυφο επίπεδο. Η δύναμη F_3 σχηματίζει με τον άξονα της ράβδου γωνία φ = 30^0.



α. Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, ως προς τον άξονα περιστροφής της.

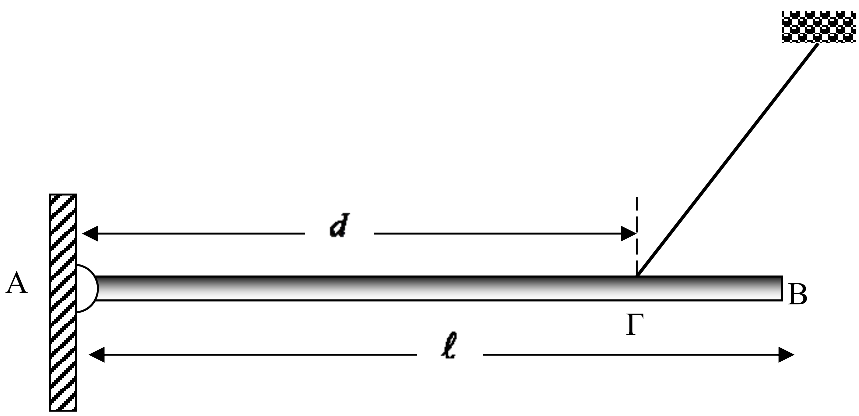
β. Σε κάποιο σημείο της ράβδου και κάθετα σ' αυτήν ασκείται δύναμη F, ομοεπίπεδη προς τις υπόλοιπες δυνάμεις. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης αυτής ώστε η ράβδος να ισορροπεί οριζόντια;

4.169. Μία ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μήκος $\ell = 3m$ και βάρος w = 100 N. Στα άκρα Α και Β της ράβδου κρέμονται με αβαρή σχοινιά δύο σώματα που έχουν βάρη w_1 = 150 N και w_2 = 50 N, αντίστοιχα.

α. Σε ποιο σημείο πρέπει στηρίξουμε τη ράβδο, ώστε να ισορροπεί οριζόντια;

β. Ποιο είναι τότε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το υποστήριγμα;

4.170. Η ράβδος του σχήματος είναι ομογενής έχει μήκος ℓ = 2 m μάζα M = 3 kg και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της Α και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος που σχηματίζει με τη ράβδο γωνία φ (ημφ = 0,8 και συνφ = 0,6). Το ένα άκρο του νήματος είναι δεμένο σε σημείο Γ της ράβδου που απέχει απόσταση d = 1,5 m από το Α ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στην οροφή.



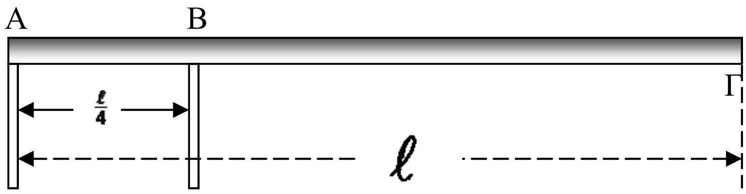
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

β. Να βρείτε την δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής της.

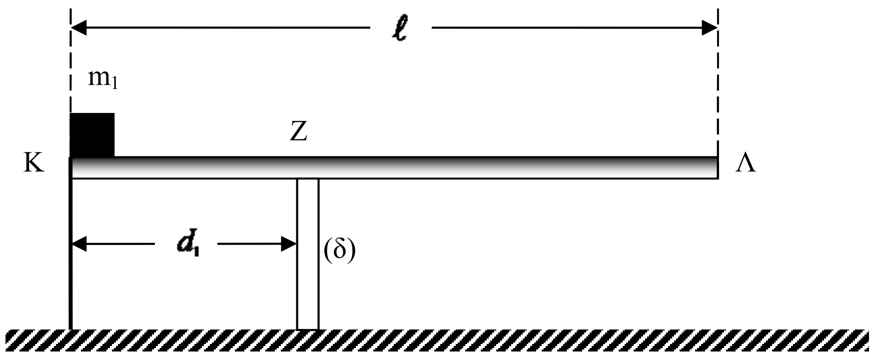
γ. Τοποθετούμε σε σημείο Δ πάνω στη ράβδο ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m = 1 kg οπότε το μέτρο της τάσης του νήματος αποκτά την τιμή T_1 = 30 N. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Δ από το άκρο Α.

δ. Χωρίς να απομακρύνουμε το σημειακό αντικείμενο ασκούμε κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ στο άκρο Β της ράβδου οπότε η τάση του νήματος μηδενίζεται ενώ η ράβδος παραμένει οριζόντια. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$. Δίνεται g = 10 m/s^2.

4.171. Μια αθλήτρια καταδύσεων βάρους w_1 = 500 N στέκεται στο άκρο Γ μιας ομογενούς σανίδας καταδύσεων ΑΓ, η οποία έχει μήκος ℓ = 3 m και βάρος w = 300 N. Η σανίδα είναι στερεωμένη σε δυο κατακόρυφους στύλους Α και Β οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση (ΑΒ) = $\frac{\ell}{4}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από καθένα από τους δύο στύλους.



4.172. Άκαμπτη ομογενής σανίδα μήκους $\ell = 6m$ και βάρους w = 400 N στηρίζεται σε ένα υποστήριγμα (δ) και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος που το ένα άκρο του είναι δεμένο στο άκρο Κ της σανίδας ενώ το άλλο στο δάπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Πάνω στη σανίδα και στο άκρο της Κ έχει στερεωθεί ένα μικρό σώμα βάρους w_1 = 200 N οπότε η τάση του νήματος ισούται με μηδέν.



α. Να υπολογίσετε την απόσταση d_1 του σημείου επαφής της σανίδας με το υποστήριγμα από το άκρο Κ.

β. Στη σανίδα ανεβαίνει και ένα μικρό παιδί μάζας m_2 = 30 kg και στέκεται ακίνητο στο άκρο της Λ. Να υπολογίσετε το μέτρο της αντίδρασης που δέχεται η σανίδα από το υποστήριγμα.

γ. Το μικρό παιδί αρχίζει να κινείται προς το άκρο Κ και φτάνει σε τέτοιο σημείο της σανίδας ώστε μόλις αυτή να μην ανατρέπεται. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της τάσης του νήματος με την απόσταση x του παιδιού από το άκρο Λ για τη μετακίνησή του αυτή.

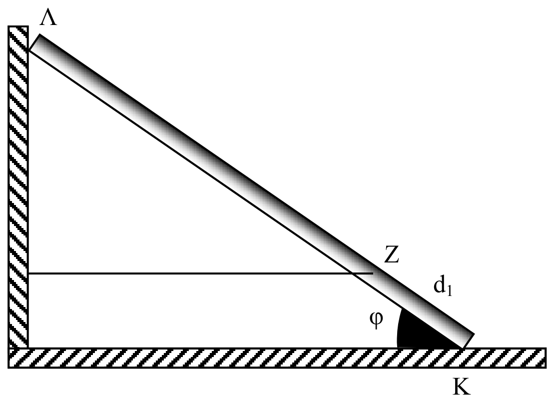
δ. Το παιδί ξαναγυρίζει στο άκρο Λ και εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Αν το όριο θραύσης του νήματος ισούται με $T_{max} = 1000N$ και η χρονική διάρκεια εκτίναξης του παιδιού είναι $\Delta t = 0{,}15s$, να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας με την οποία μπορεί να εκτιναχθεί το παιδί ώστε να μην σπάσει το νήμα. Θεωρείστε ότι κατά τη διάρκεια της εκτίναξης η δύναμη που δέχεται το παιδί από τη σανίδα έχει σταθερό μέτρο. Δίνεται g = 10 m/s^2.

4.173. Μια σκάλα μήκους ℓ = 5 *m* και βάρους w = 100 *N*, ισορροπεί στηριζόμενη σε ένα μη λείο οριζόντιο δάπεδο και σε ένα λείο κατακόρυφο τοίχο. Η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί βρίσκεται η βάση της σκάλας από τον τοίχο, πριν αρχίσει να ολισθαίνει, είναι x_{max} = 4 *m*.

α. Να υπολογίσετε το συντελεστή στατικής τριβής της σκάλας με το δάπεδο.

β. Όταν η βάση της σκάλας βρίσκεται σε απόσταση x = 3 *m* από τον τοίχο, να υπολογίσετε το μέγιστο βάρος που μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε πάνω στη σκάλα χωρίς να προκαλέσει την ολίσθησή της. [Απ. 2/3, 350 *N*]

4.174. Στο σχήμα φαίνεται μια ράβδος μήκους ℓ = 2 m και μάζας M = 4 kg που ισορροπεί με την βοήθεια οριζοντίου αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Τα άκρα Λ και Κ της ράβδου ακουμπούν σε κατακόρυφο τοίχο και σε λείο δάπεδο αντίστοιχα έτσι ώστε η ράβδος να σχηματίζει γωνία φ (ημφ = 0,6 και συνφ = 0,8) με το δάπεδο. Το σημείο Ζ, στο οποίο είναι δεμένο το νήμα, απέχει από το άκρο Κ της ράβδου απόσταση d_1 = 0,8 m.



Α. Αν ο κατακόρυφος τοίχος είναι λείος τότε να υπολογίσετε

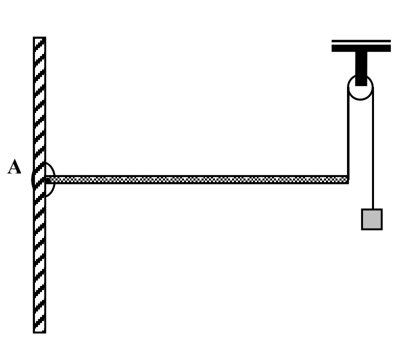
1. το μέτρο της τάσης του νήματος
2. το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον κατακόρυφο τοίχο καθώς και το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το δάπεδο.

Β. Αν ο κατακόρυφος τοίχος είναι τραχύς και κόψουμε το νήμα τότε η ράβδος μόλις που δε γλιστράει εφόσον ασκήσουμε στο άκρο της Κ δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 10 Ν παράλληλη στο δάπεδο. Να υπολογίσετε μετά το κόψιμο του νήματος και αφού έχουμε ασκήσει τη δύναμη $\vec{F}$,

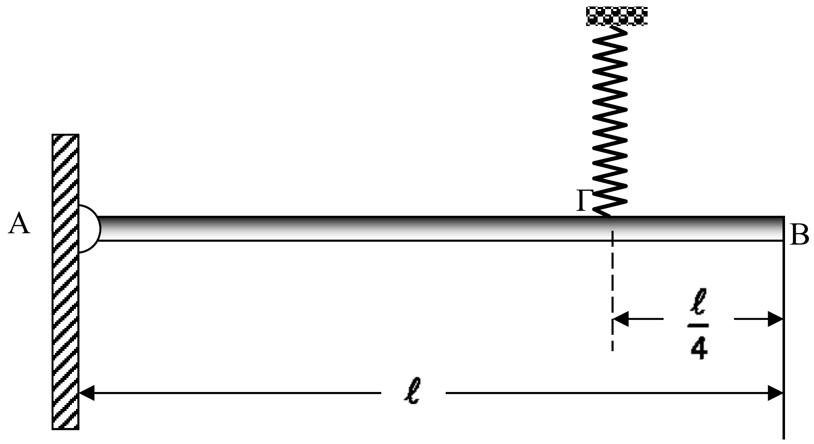
1. τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κατακόρυφο τοίχο καθώς και τη δύναμη που δέχεται από το δάπεδο.
2. το συντελεστή της στατικής τριβής μεταξύ του κατακόρυφου τοίχου και της ράβδου.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

4.175. Η ράβδος του διπλανού σχήματος είναι αβαρής έχει μήκος 0,6 m και είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α. Στο άλλο άκρο δένεται σώμα βάρους 16 Ν με τη βοήθεια νήματος που διέρχεται από αβαρή τροχαλία. Σε ποια απόσταση από το άκρο της Α πρέπει να ασκήσουμε κατακόρυφη δύναμη μέτρου 80 Ν ώστε η ράβδος να ισορροπεί σε οριζόντια θέση;



4.176. Ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ και βάρους w = 120 N ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το σημείο Γ της ράβδου το οποίο απέχει από το άκρο της Β απόσταση $\frac{\ell}{4}$ στερεώνεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι $\Delta\ell$ = 0,1 m.

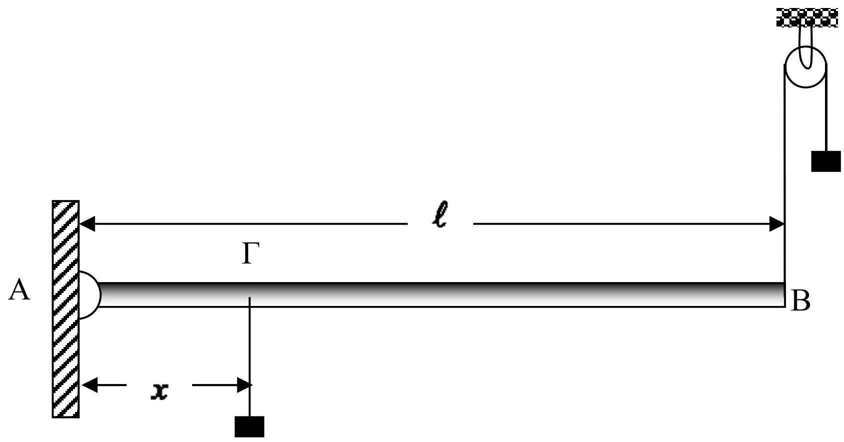


α. Να αποδείξετε ότι η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει κατακόρυφη διεύθυνση.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης.

γ. Να προσδιορίσετε τη σταθερά του ελατηρίου.

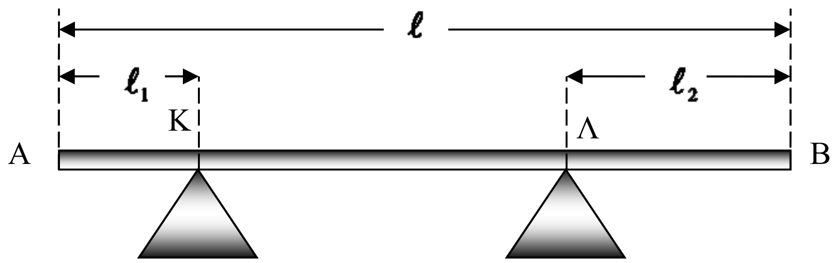
4.177. Ομογενής δοκός ΑΒ έχει μήκος ℓ = 4 m και βάρος w = 50 N. Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο ενώ το άλλο άκρο της Β είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς σχοινιού που περνάει από το αυλάκι ακίνητης τροχαλίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άλλο άκρο του σχοινιού έχει δεθεί σώμα βάρους w_1 = 30 N.



α. Σε ποιο σημείο Γ της δοκού πρέπει να κρεμάσουμε με αβαρές σχοινί ένα δεύτερο σώμα βάρους w_2 = 20 N ώστε η δοκός να ισορροπεί οριζόντια;

β. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση;

4.178. Μια ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 7m$ και βάρους w = 80 N στηρίζεται στα σημεία της Κ και Λ και διατηρείται οριζόντια. Το σημείο Κ απέχει απόσταση $\ell_1 = 1m$ από το άκρο Α ενώ το σημείο Λ απέχει απόσταση $\ell_2 = 2m$ από το άκρο Β.



α. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή F_{min} του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκήσουμε στη ράβδο ώστε αυτή να ανατραπεί;

β. Αν το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $\frac{F_{min}}{2}$ ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα δυο υποστηρίγματα στην ράβδο;

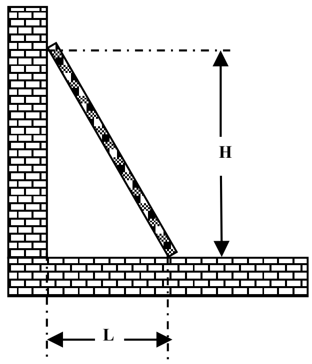
4.179. Ένα όχημα βάρους w_1 = 200 kN διέρχεται από γέφυρα ΑΒ μήκους ℓ = 500 m και βάρους w_2 = 1000 kN. Η γέφυρα είναι κατασκευασμένη από ομογενές υλικό και στηρίζεται σε δύο στύλους που βρίσκονται στα άκρα της. Το όχημα, το οποίο θεωρούμε ως σημειακό αντικείμενο, κατευθύνεται από το άκρο Α προς το σημείο Β της γεφύρας.

α. Να εκφράσετε τα μέτρα των αντιδράσεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ των δυο στηλών στήριξης της γεφύρας σε συνάρτηση με την απόσταση x του οχήματος από το άκρο της Α.

β. Να παραστήσετε σε βαθμολογημένους άξονες στο ίδιο διάγραμμα τις σχέσεις $F_A = f(x)$ και $F_B = f(x)$.

γ. Για ποια τιμή της απόστασης x τα μέτρα των αντιδράσεων των δυο στηλών έχουν λόγο F_A/F_B=7/8;

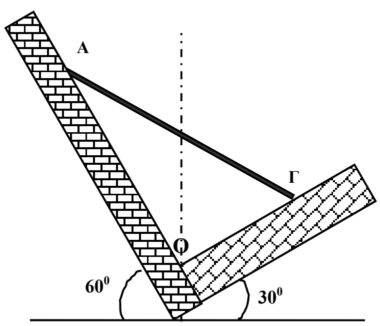
4.180. Ομογενής σκάλα βάρους w στηρίζεται σε οριζόντιο έδαφος και σε λείο κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κατώτερο άκρο της σκάλας απέχει από τον τοίχο απόσταση L = 2 *m*, ενώ το ανώτερο άκρο της βρίσκεται σε ύψος H = 5 *m* από το έδαφος.



α. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής $\mu_{s(min)}$ της σκάλας με το έδαφος ώστε η σκάλα να μην ολισθήσει;

β. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής της σκάλας με το έδαφος είναι $\mu_s = \frac{5}{3}\mu_{s(\min)}$, σε ποια ελάχιστη οριζόντια απόσταση από τον τοίχο, μπορεί ένα παιδί με βάρος διπλάσιο από τη σκάλα, να ανέβει στη σκάλα αργά, χωρίς αυτή να ολισθήσει; [Απ. 0,2, 0 *m*]

4.181. Ομογενής ράβδος ΑΓ βάρους 100 *N* ισορροπεί στηριζόμενη σε δύο λεία επίπεδα. Τα δύο επίπεδα σχηματίζουν γωνίες 60^0 και 30^0 με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

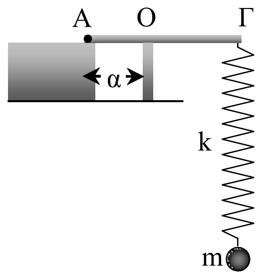


α. Να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το σημείο Ο, στο οποίο συναντώνται τα δύο επίπεδα.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας που σχηματίζει η ράβδος με ένα από τα δύο επίπεδα.

γ. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο από τα δύο επίπεδα. [Απ. Α = 30^0, 50 *N*, $50\sqrt{3}\,N$]

4.182. Αβαρής οριζόντια ράβδος ΑΓ, μήκους ℓ = 90 *cm*, είναι τοποθετημένη ώστε το ένα άκρο της Α να είναι καρφωμένο με κατακόρυφο καρφί σε οριζόντιο τραπέζι, ενώ στο άλλο άκρο της Γ είναι αναρτημένο ένα σώμα μάζας m = 0,5 *kg* μέσω ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 200 *N/m*. Η ράβδος στηρίζεται σ' ένα σημείο της Ο, το οποίο απέχει από το άκρο Α απόσταση ΟΑ = α = 30 *cm*, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το καρφί είναι $F_{A(max)}$ = 50 *N*. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε αυτό εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε



α. τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης.

β. το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ώστε το καρφί να αντέξει.

γ. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο καρφί όταν το πλάτος της ταλάντωσης του m είναι 5 *cm*. Δίνεται g = 10 *m/s²*.

[Απ. 20 *rad/s*, 0,1 *m*, 0 *N*, 30 *N*]

4.183. Ένας ακίνητος ομογενής δίσκος ακτίνας R = 0,1 m και μάζας M = 4 kg, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκείται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του σταθερή δύναμη F, οπότε ο δίσκος μετά από 9 s έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα 36 rad/s. Τη στιγμή αυτή καταργείται η δύναμη F, οπότε ο δίσκος σταματάει μετά από 6 s.

α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού στο χρονικό διάστημα από 9 s μέχρι τη στιγμή που σταματάει να περιστρέφεται, αν τη θεωρήσουμε σταθερή.

β. Να υπολογίσετε τη ροπή της τριβής που ασκείται στο δίσκο.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε τη συνολική γωνιακή μετατόπιση του τροχού.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ. -6 rad/s^2, -0,12 Nm, 2 N, 270 rad]

4.184. Ομογενής ράβδος ΟΑ, μήκους ℓ = 1 *m* και μάζας M = 0,3 *kg*, είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου είναι στερεωμένη σφαίρα αμελητέων διαστάσεων, μάζας m = 0,1 *kg*.

Α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

Β. Το σύστημα τίθεται σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 = 20 *rad/s*, γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο σύστημα, ώστε σε χρόνο Δt = 2 *s* το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του να γίνει ω_2 = 10 *rad/s*.

β. Αν η ροπή δημιουργείται με της επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης σταθερού μέτρου, η οποία είναι κάθετη στον κατά μήκος άξονα της ράβδου, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης αυτής;
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της ράβδου και είναι κάθετος στο μήκος της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

4.185. Ένας ομογενής δίσκος έχει μάζα 4 kg, ακτίνα 0,1 m και περιστρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 20 rad/s γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρειά του σταθερή δύναμη F = 0,5 N έτσι ώστε η γωνιακή του ταχύτητα να μειωθεί στην τιμή 5 rad/s και τότε καταργούμε τη δύναμη.

α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας με το χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά από τη στιγμή t = 0 ως τη στιγμή t = 10 s.

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση της ταχύτητας με το χρόνο λόγω περιστροφής ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που έκανε ο δίσκος στο χρονικό διάστημα εφαρμογής της δύναμης F. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$

4.186. Ομογενής οριζόντιος δίσκος, ακτίνας R = 0,4 *m* και μάζας M = 5 *kg,* μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Πάνω στο δίσκο βρίσκεται μικρό σώμα Σ, μάζας m = 0,5 *kg,* σε απόσταση r = 0,2 *m* από το κέντρο Ο του δίσκου. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και του δίσκου είναι μ_s = 0,2. Κάποια στιγμή ασκείται εφαπτομενικά της περιφέρειας του δίσκου και σε τυχαίο σημείο αυτής δύναμη F σταθερού μέτρου, η οποία του προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων}$ = 0,8 *rad/s²*

Α. Να υπολογίσετε:

α. τη ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου.

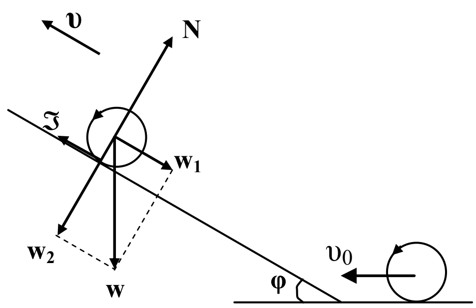
β. το μέτρο της δύναμης F.

Β. Ποιος είναι ο ρόλος της στατικής τριβής στο χρονικό διάστημα που το σώμα Σ δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο;

Γ. Για ποια τιμή του μέτρου της στατικής τριβής το σώμα Σ αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο δίσκο;

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 *m/s²*.

4.187. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μιας σφαίρας μάζας m που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι υ_0. Η σφαίρα στην πορεία της συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ και συνεχίζει πάνω σ' αυτό την κίνησή της. Η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση. Η ροπή αδράνεια της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται



από το κέντρο της είναι I_{cm}.

Να υπολογίσετε

α. τη γωνιακή της επιτάχυνση $\alpha_{γων}$.

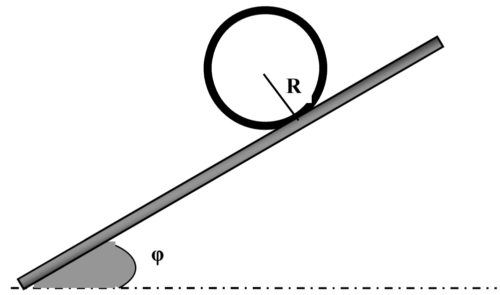
β. την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας της.

γ. τη στατική τριβή $\mathfrak{T}_s$.

δ. την ταχύτητά της υ μετά από διαδρομή ℓ στο πλάγιο επίπεδο.

Θεωρήστε ότι η σφαίρα τη στιγμή που αρχίζει να ανεβαίνει στο πλάγιο επίπεδο έχει ταχύτητα μέτρου υ_0. Δίνεται το g.

4.188. Ομογενής κυκλικός δακτύλιος ακτίνας 0,2 *m* και μάζας m = 0,4 *kg*, αφήνεται τη χρονική στιγμή t = 0 στην κορυφή πλάγιου επιπέδου, γωνίας 30^0 και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του επιπέδου. Ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του επιπέδου τη χρονική στιγμή t = 4 *s*.



Α. Να βρείτε τη σχέση από την οποία υπολογίζεται η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνάει από το κέντρο του.

Β. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δακτυλίου.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δακτυλίου.

γ. το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ δακτυλίου και επιπέδου.

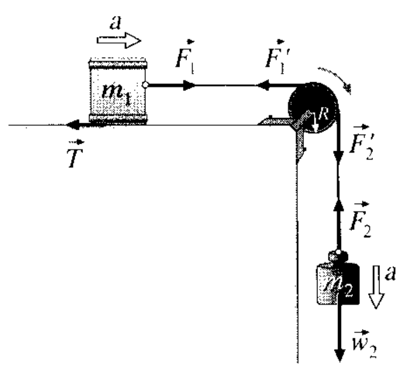
δ. την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής $\mu_{s(min)}$, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.

ε. την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δακτυλίου τη στιγμή που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, καθώς και την ταχύτητα του σημείου του δακτυλίου που απέχει περισσότερο από το πλάγιο επίπεδο, την ίδια χρονική στιγμή.

στ. το μήκος του πλάγιου επιπέδου.

ζ. τον αριθμό των περιστροφών που έκανε ο δακτύλιος μέχρι να φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 *m/s²*.

4.189. Το σώμα μάζας m_1 = 2 *kg* ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Το σώμα αυτό είναι δεμένο με αβαρές νήμα που περνά από μια τροχαλία ακτίνας R = 10 *cm* και μάζας m = 2 *kg*. Στο άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα μάζας m_2 = 3 *kg*. Αν αφήσουμε το σώμα μάζας m_2 ελεύθερο, να βρείτε:



α. την επιτάχυνση κάθε σώματος.

β. τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

γ. τις τάσεις του νήματος.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2} m R^2$ και g = 10 *m/s²*. Το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

[Απ. 10/3 *m/s²*, 100/3 *rad/s²*, 50/3 *N* και 20 *N*]

4.190. Οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ, μάζας Μ και μήκους ℓ, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο Α. Η ράβδος, που αρχικά συγκρατείται σε οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής της, χωρίς τριβές. Τη στιγμή της εκκίνησης το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου είναι $\alpha_{γων,1}$ = 15 *rad/s²*. Να υπολογίσετε:

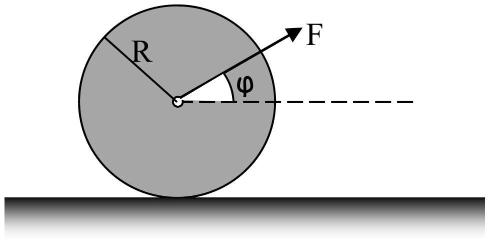
α. Το μήκος ℓ της ράβδου.

β. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου, τη στιγμή που έχει στραφεί κατά γωνία θ = 60° από την αρχική οριζόντια θέση της.

γ. Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης του άκρου Β της ράβδου, τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$ *m/s²*.

4.191. Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής κύλινδρος μάζας Μ = 5 kg και ακτίνας R = 0,4 m που αρχικά είναι ακίνητος σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκείται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου σταθερή δύναμη $\vec{F}$ η οποία έχει μέτρο 25 Ν και σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ (ημφ = 0,8 και συνφ = 0,6). Ο κύλινδρος ξεκινά να κυλίεται σε οριζόντιο δάπεδο και μόλις που δεν ολισθαίνει σε αυτό. Να υπολογίσετε



α. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

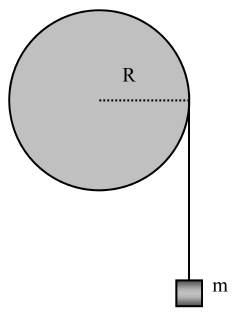
β. το συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του δαπέδου και του κυλίνδρου.

γ. την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του κυλίνδρου την χρονική στιγμή t_1 που ο κύλινδρος έχει εκτελέσει $\frac{20}{\pi}$ περιστροφές.

δ. την ισχύ της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_2 = 5 s.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον οριζόντιο άξονα περιστροφής που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων υπολογίζεται από τον τύπο $I = \frac{1}{2}MR^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g = 10$ m/s².

4.192. Ομογενής κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R = 40 *cm* μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m = 1 *kg*. Όταν το σώμα αφήνεται ελεύθερο, το νήμα ξετυλίγεται, χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας , αναγκάζοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο να περιστρέφεται. Αν το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος είναι 1 *m/s²*, να υπολογίσετε



α. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

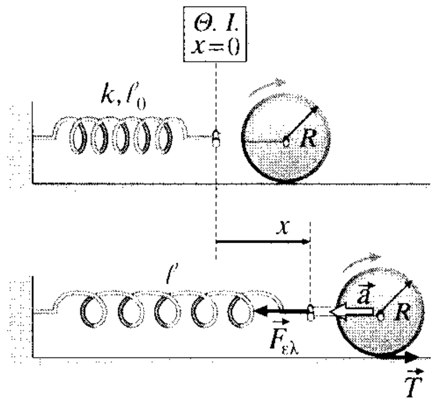
β. τη μάζα του κυλίνδρου.

γ. το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα.

δ. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της επιφάνειας του κυλίνδρου, όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους x = 2 *m*.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 *m/s²*.

4.193. Ο κύλινδρος του σχήματος, μάζας m και ακτίνας R, μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας στη διεύθυνση του ελατηρίου και στη συνέχεια τον αφήνουμε ελεύθερο. Αν στη θέση ισορροπίας του κυλίνδρου το ιδανικό ελατήριο, σταθεράς k, έχει το φυσικό του μήκος, να αποδείξετε ότι ο άξονας του κυλίνδρου θα κάνει αρμονική ταλάντωση. Δίνεται για τον κύλινδρο: $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$.



$[D = \frac{2}{3}k]$

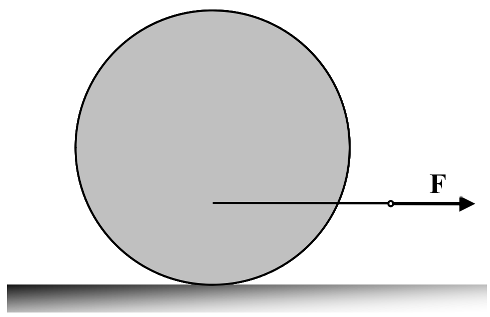
4.194. Ομογενής κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος από την κορυφή πλάγιου επιπέδου γωνίας φ = 30⁰ και ύψους h = 1,8 m.

α. Αν το πλάγιο επίπεδο είναι λείο, τι κίνηση θα κάνει ο κύλινδρος και με πόσο ταχύτητα (μέτρο) θα φτάσει στη βάση του;

β. Αν η τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του επιπέδου και του σώματος είναι $\mu_s = \frac{\sqrt{3}}{6}$, τι κίνηση θα κάνει το σώμα και με πόση κατά μέτρο ταχύτητα θα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$, όπου m η μάζα του και R η ακτίνα της βάσης του.

4.195. Ένα σώμα αποτελείται από δύο ομόκεντρους κυλίνδρους, οι οποίοι έχουν ακτίνες R_1 και R_2 με $R_1 < R_2$ και στηρίζεται στο οριζόντιο έδαφος με την κυλινδρική του επιφάνεια. Με τη βοήθεια νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο στον εσωτερικό κύλινδρο, ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Το σώμα έχει μάζα M, ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφή του I και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε



α. το μέτρο της επιτάχυνσης του άξονα των κυλίνδρων.

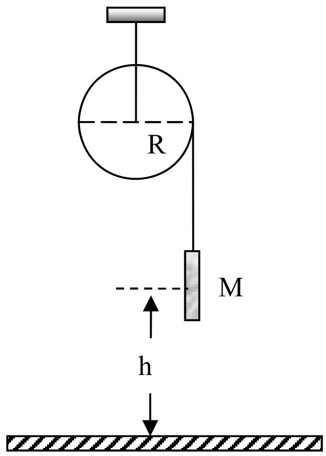
β. το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής.

γ. τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

δ. την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. [Απ. α $\frac{FR_2(R_2-R_1)}{I+MR_2^2}, \beta.\frac{I+MR_1R_2}{I+MR_2^2}F, \gamma.\frac{R_2-R_1}{I+MR_2^2}F, \delta.\frac{F}{Mg}\cdot\frac{I+MR_1R_2}{I+MR_2^2}$]

4.196. Σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R, αφήνεται από την κορυφή πλάγιου επιπέδου και κυλιόμενη, διανύει κατά τη διάρκεια του $3^{ου}$ δευτερολέπτου διάστημα 0,5 *m*. Να υπολογιστεί η κλίση του πλάγιου επιπέδου. Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{2}{5}MR^2$ και $g = 10\ m/s^2$. [Απ. ημφ = 0,028]

4.197. Στην τροχαλία του σχήματος έχουμε τυλίξει αβαρές σχοινί στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται ομογενής ράβδος. Κάποια στιγμή αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να κινηθεί, όταν το μέσο της Μ βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, και διαπιστώνουμε ότι φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα u = 4 m/s. Το μήκος της ράβδου είναι $\ell = 0,2$ *m* ενώ η μάζα της m = 2 *kg* όση είναι και η μάζα της τροχαλίας. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$, όπου R η ακτίνα της τροχαλίας και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ m/s^2$.



α. Βρείτε το ύψος h.

β. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή που η ράβδος έχει κατέβει κατά 0,3 m από το σημείο που αφέθηκε ελεύθερη.

γ. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που η κινητική της ενέργεια ισούται με τη δυναμική της ενέργεια;

(ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρήσετε το έδαφος)

[Απ. α. 1,3 *m* β. 2 *J*, γ. $\sqrt{10,4}\,m/s$]

4.198. Ομογενής δίσκος, μάζας m = 19,2 *kg* και ακτίνας R = 20 *cm*, μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος αρχίζει να στρέφεται με την επίδραση σταθερής ροπής μέτρου τ = 2 *Nm*. Αν τη χρονική στιγμή t ο τροχός έχει περιστραφεί κατά γωνία θ = 60 *rad*, να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t.

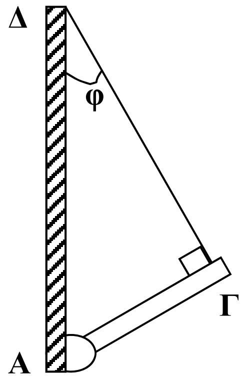
β. τη στιγμιαία ισχύ της ροπής που δρα στο δίσκο τη χρονική στιγμή t.

γ. τη μέση ισχύ της ροπής που δρα στο δίσκο στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0$.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

[Απ. 25 *rad/s*, 50 *W*, 25 *W*]

4.199. Η ομογενής ράβδος ΑΓ ισορροπεί με τη βοήθεια αβαρούς νήματος, που είναι δεμένο στο ένα άκρο Γ και στηριζόμενη σε άρθρωση, στο άλλο άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος και το νήμα βρίσκονται σε κατακόρυφο επίπεδο που είναι κάθετο στον κατακόρυφο τοίχο. Το νήμα σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^0$ με τον τοίχο, ενώ η ράβδος έχει μάζα m = 4 *kg* και μήκος $\ell = 2$ *m*.



Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί η ράβδος στο νήμα και στην άρθρωση.

Β. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα οπότε η ράβδος αρχίζει και περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα της άρθρωσης στο Α που είναι κάθετος στην ράβδο.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή

i. που κόβουμε το νήμα.

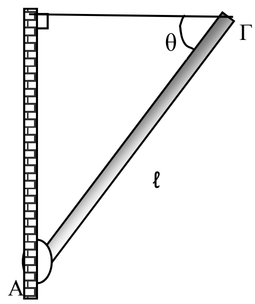
ii. που γίνεται οριζόντια.

iii. που γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά.

β. Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της $I_{cm} = \frac{1}{12} m \ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ *m/s²*.

4.200. Ομογενής ράβδος ΑΓ, με μήκος $\ell = 1{,}5$ *m* και μάζας $m = 2$ *kg* ισορροπεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με τον τοίχο με οριζόντιο σχοινί που σχηματίζει γωνία $\theta = 53^0$ με τη ράβδο.



Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το σχοινί.

Β. Κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή που κόβεται το σχοινί.

β. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της ράβδου τη στιγμή που γίνεται οριζόντια.

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο τη στιγμή

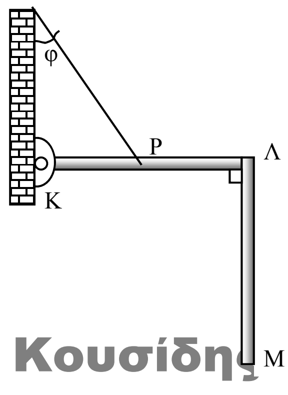
α. που κόβεται το νήμα.

β. που έχει στραφεί κατά 113^0, από τη θέση ισορροπίας της.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} m \ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$ *m/s²*.

Δίνεται ότι: $ημ53^0 = \frac{4}{5}$, $συν53^0 = \frac{3}{5}$. [Απ. **Α.** 7,5 *N*, **Β.** 6 *rad/s²*, 4 *rad/s*, **Γ.**]

4.201. Οι δύο ράβδοι του σχήματος έχουν μήκος $\ell = 0{,}6$ *m*, μάζα $m = 1$ *kg* κάθε μία και είναι συγκολλημένες σταθερά στο Λ ώστε να σχηματίζουν την ορθή γωνία ΚΛΜ. Το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ΛΜ είναι κατακόρυφος ενώ η ΚΛ είναι οριζόντια, συγκρατούμενη στο μέσο της Ρ από σχοινί, το οποίο σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία $\varphi = 60^0$. Κόβουμε το σχοινί οπότε το σύστημα αρχίζει να περι-



στρέφεται γύρω από το Κ χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε:

α. την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί.

β. τη ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς το Κ.

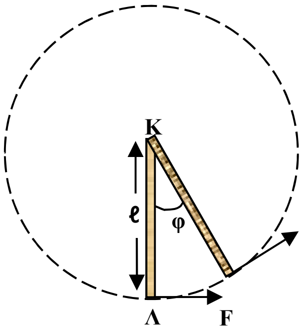
γ. τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη στιγμή που κόβουμε το νήμα.

δ. το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος ΚΛ γίνεται κατακόρυφη.

Δίνεται $I_{cm(ράβδου)} = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g = 10$ *m/s²*.

[Απ. α. Τ = 60 Ν β. 0,6 kgm^2, γ. $|\alpha| = 15\, rad/s^2$, δ. $\frac{d\omega}{dt} = -5\frac{rad}{s^2}$]

4.202. Η ομογενής ράβδος ΚΛ του σχήματος έχει μήκος $\ell = 1$ *m* και μάζα m = 6 *kg*. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο της Κ. Στη ράβδο, που αρχικά ισορροπεί, ασκούμε στο άκρο Λ δύναμη μέτρου F = 30 *N* με τρόπο ώστε η διεύθυνσή της να είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο και η κατεύθυνσή της αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Η δύναμη F καταργείται όταν το Λ βρεθεί στην πάνω κατακόρυφη θέση, όταν η ράβδος θα έχει διαγράψει μισό κύκλο.



α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη συνάρτηση που δείχνει πώς μεταβάλλεται η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο σε συνάρτηση με το ημφ για όσο διάστημα ασκείται η δύναμη F. Η γωνία φ αρχίζει να μετρά από την αρχική κατακόρυφη θέση της ράβδου ($0 \le \phi \le \pi$).

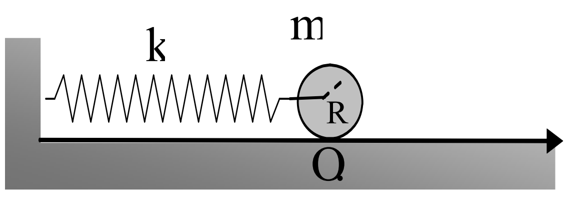
β. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή που αποκτά η γωνιακή επιτάχυνση για όσο διάστημα ασκείται η δύναμη F και τη θέση στην οποία την αποκτά.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F.

δ. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου όταν αυτή ολοκληρώσει τη μισή περιστροφή. Δίνεται $I_{cm(ράβδου)} = \frac{1}{12} m \ell^2$ και $g = 10$ *m/s²*.

[Απ. α. Στ = 30(1-ημφ) (SI) β. α = 0, φ = π/2, γ. $\sqrt{34,2}\,\frac{rad}{s}$, δ.........]

4.203. Συμπαγής κύλινδρος μάζας Μ = 1 *kg* και ακτίνας R ισορροπεί πάνω στην οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού, δεμένος (από τον κεντρικό του άξονα) στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 150 *N/m*, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Μετατοπίζουμε προς τα δεξιά τον κύλινδρο σε απόσταση Α και τον αφήνουμε ελεύθερο. Επειδή υπάρχει αρκετή τριβή μεταξύ του κυλίνδρου και της επιφάνειας του τραπεζιού, ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του



δίνεται από τη σχέση $I_c = \frac{1}{2}MR^2$.

α. Να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της κίνησης.

β. Όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου διέρχεται από τη θέση $+\frac{A}{2}$, να υπολογίσετε το ποσοστό % της ολικής ενέργειας του συστήματος που είναι κινητική ενέργεια περιστροφής του κυλίνδρου. [Απ. α. Τ = 0,628 *s*, β. 25%]

4.204. Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ, μάζας m = 8 *kg* και μήκους L = 1,2 *m*, αρθρώνεται στο σημείο της Ο που απέχει απόσταση d = 0,4 m από το άκρο Β. Το άλλο άκρο Α συμπιέζει ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 10^4 *N/m* κατά 8 *cm* από το φυσικό του μήκος. Τη στιγμή εκείνη η ράβδος συγκρατείται ώστε να είναι οριζόντια. Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να περιστραφεί γύρω από την άρθρωση. Τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη, να υπολογίσετε

α. τη γωνιακή της ταχύτητα.

β. τη δύναμη που δέχεται από την άρθρωση.

Δίνονται: *g* = 10 *m/s²* και $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$. [Απ. 5 *rad/s*, 40 *N*]

4.205. Μια μπίλια μάζας m και ακτίνας R αφήνεται από ένα σημείο Α αμετακίνητης ημισφαιρικής λεκάνης ακτίνας 6R και κυλάει προς τη βάση της λεκάνης χωρίς ολίσθηση. Τη στιγμή που αφήνεται, η ευθεία κέντρο μπίλιας- κέντρο λεκάνης σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 60^0. Να αποδείξετε ότι

α. κατά τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη, η κάθετη δύναμη αντίδρασης που της ασκεί η λεκάνη, είναι ίση με ½ mg.

β. σε μια τυχαία στιγμή της κίνησης η στατική τριβή είναι ίση με 2/7 mgημθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία κέντρο μπίλιας- κέντρο λεκάνης με την κατακόρυφο.

γ. κατά τη στιγμή που φθάνει στη βάση της λεκάνης, για την ταχύτητα του κέντρου μάζας ισχύει $υ^2$ = 25gR/7.

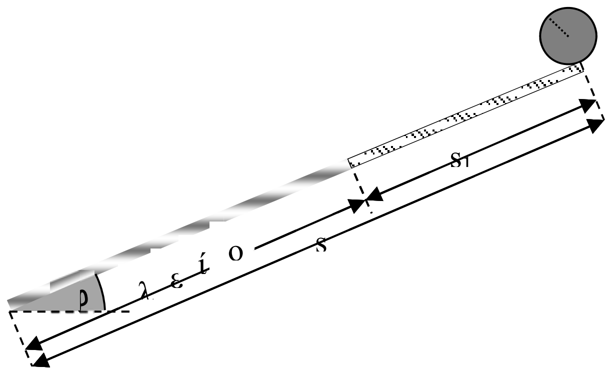
δ. κατά τη στιγμή που φθάνει στη βάση της λεκάνης η κάθετη δύναμη την οποία ασκεί η μπίλια στη λεκάνη είναι 12mg/7.

ε. κατά τη στιγμή που φθάνει στη βάση της λεκάνης η στατική τριβή είναι μηδέν.

στ. για να πραγματοποιηθεί η κύλιση χωρίς ολίσθηση ο συντελεστής στατικής τριβής πρέπει να είναι μεγαλύτερος από $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

Για τη σφαίρα δίνεται $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$.

4.206. Μια κοίλη σφαίρα μάζας M = 5 kg και ακτίνας R = 0,25 m, που το κέντρο μάζας της συμπίπτει με το γεωμετρικό της κέντρο, αφήνεται ελεύθερη από την κορυφή πλάγιου επιπέδου γωνίας φ (ημφ = 0,8, συνφ = 0,6) και μήκους s = 11,5 m. Κοντά στην κορυφή το επίπεδο είναι τραχύ και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Το μήκος του τμήματος του επιπέδου που δεν είναι λείο είναι s_1 = 2,5 m, ενώ το υπόλοιπο, μήκους 9 m, είναι λείο. Ο λόγος των μέτρων των επιταχύνσεων του κέντρου μάζας της σφαίρας στο τραχύ και στο λείο τμήμα του επιπέδου είναι $\frac{5}{8}$, αντίστοιχα. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας υπολογίζεται από τη σχέση $I_{cm} = \lambda M R^2$, όπου λ θετική σταθερά.



Να υπολογίσετε

α. την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

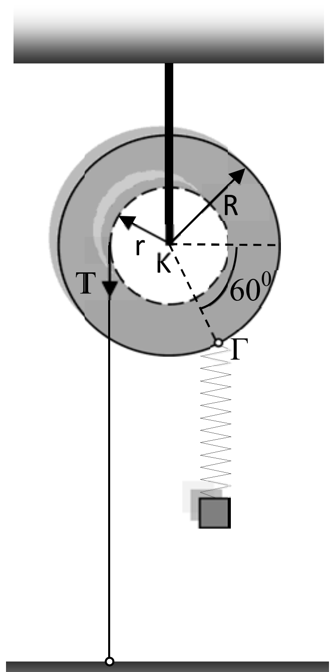
β. τη σταθερά λ.

γ. το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης, όταν φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

δ. τον αριθμό των περιστροφών της σφαίρας από τη στιγμή που την αφήσαμε ελεύθερη ως τη στιγμή που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Δίνεται g = 10 m/s². [Απ: α. 460 J, β. 0,6, γ. 8,15%, δ. 15/π]

4.207. Η τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο κυκλικούς δίσκους με ακτίνες R = 30 cm και r = 20 cm, που είναι κολλημένοι μεταξύ τους και έχουν κοινό κέντρο K. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Στο μικρό δίσκο έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα σταθερού μήκους, του οποίου το ένα άκρο είναι δεμένο στο δάπεδο. Σε σημείο Γ της περιφέρειας του μεγάλου τροχού έχουμε στηρίξει ακλόνητα το ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα μάζας m. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυμένο κατά Δy = 0,1 m και το νήμα να ασκεί στην τροχαλία δύναμη T μέτρου 15 N. Τη χρονική στιγμή t = 0 εκτοξεύουμε το σώμα μάζας m με κατακόρυφη ταχύτητα και με φορά προς τα κάτω, οπότε το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του η τάση του νήματος μηδενίζεται.



α. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς D της αρμονικής ταλάντωσης του σώματος μάζας m.

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση στην οποία μηδενίζεται η τάση του νήματος.

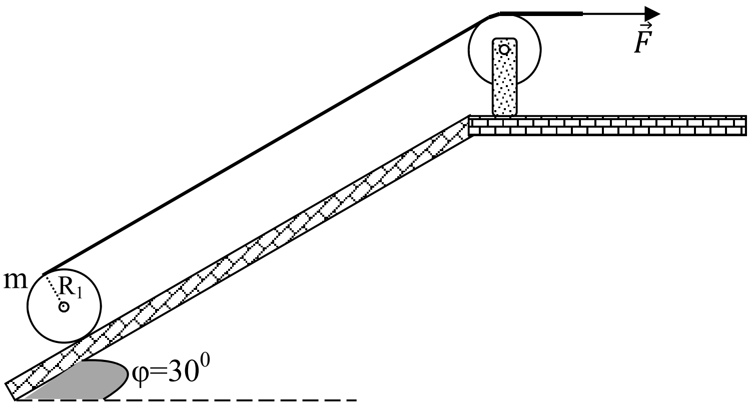
γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύσαμε το σώμα τη χρονική στιγμή t = 0.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που ασκεί το νήμα στην τροχαλία, σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως θετική τη φορά του βάρους του σώματος.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

[Απ: α. 200 N/m, β. 0,15π s, γ. 1 m/s, δ. Τ = 15ημ10t + 15 (S.I.)]

4.208. Στη διάταξη του σχήματος η τροχαλία έχει μάζα Μ = 1 kg, ακτίνα R = 20 cm και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Πάνω στο πλάγιο επίπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi = 30^0$, βρίσκεται ακίνητος ένας ομογενής συμπαγής κύλινδρος μάζας m = 2 kg και ακτίνας R_1 = 50 cm. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε τη χρονική στιγμή t_0 = 0 σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 12 Ν, οπότε η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση και ο κύλινδρος να ανεβαίνει το πλάγιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε



α. τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στον κύλινδρο.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

γ. το μέτρο της δύναμης στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο.

δ. τη μετατόπιση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, όταν το σημείο εφαρμογής της δύναμης έχει μετατοπιστεί κατά x = 2 m.

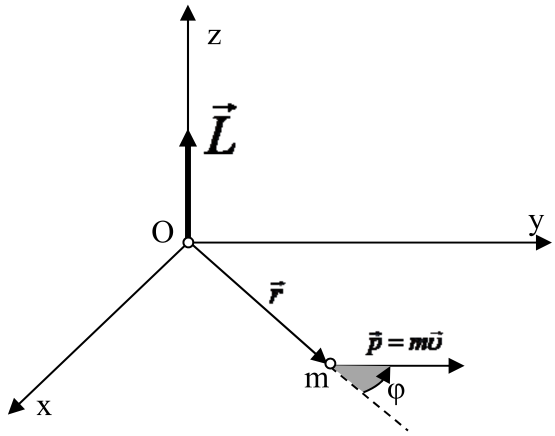
Δίνονται οι ροπές αδράνειας: της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και του κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής του $I_1 = \frac{1}{2}mR_1^2$.

Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας και ότι $g = 10\ m/s^2$.

[Απ. α. 28 rad/s², 9,2 Ν, β. 5,6 rad/s², γ. 6,4 Ν, δ. 1 m, $\sqrt{5,6}\ m/s$]

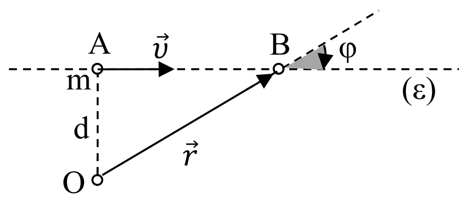
§ 4.8 Στροφορμή.

Α. Στροφορμή σημειακού αντικειμένου.



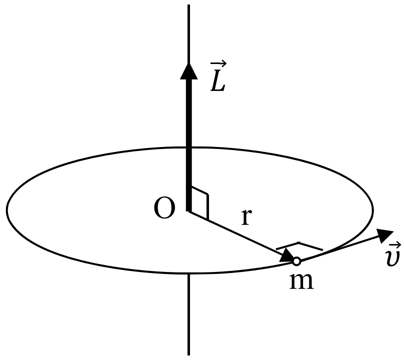
Η στροφορμή L ενός σημειακού αντικειμένου, ορίζεται ως προς την αρχή Ο ενός αυθαίρετου συστήματος αναφοράς, από το γινόμενο $\boxed{L = r\,p\,ημφ}$, (4.53)
όπου p είναι η ορμή του αντικειμένου, r είναι το διάνυσμα θέσης και φ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα διανύσματα p και r. Το διάνυσμα της στροφορμής έχει σημείο εφαρμογής την αρχή Ο του συστήματος αναφοράς, διεύθυνση τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα r και p και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού καθώς το διάνυσμα θέσης r στρέφεται προς το διάνυσμα της ορμής p (ο αντίχειρας δείχνει τη φορά της στροφορμής, αν τα υπόλοιπα δάχτυλα δείχνουν τη φορά περιστροφής).

Το μέγεθος «στροφορμή» δεν ταυτίζεται υποχρεωτικά με κυκλική κίνηση. Ένα σημειακό αντικείμενο μπορεί να έχει στροφορμή ακόμη και αν κινείται ευθύγραμμα.



Έστω ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m που κινείται με <u>σταθερή ταχύτητα υ</u> κατά μήκος της ευθείας (ε) και Ο η αυθαίρετη αρχή του συστήματος αναφοράς.
Το μέτρο της στροφορμής του αντικειμένου σε τυχαίο σημείο Β της ευθύγραμμης τροχιάς του δίνεται από τη σχέση 4.53: L = r p ημφ → L = r m υ ημφ → L = m υ (r ημφ). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι r ημφ = d, άρα $\boxed{L = m\,υ\,d}$. (4.54)
Το διάνυσμα της στροφορμής έχει σημείο εφαρμογής στο Ο, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τη σελίδα.
Από τη σχέση 4.54 προκύπτει ότι το διάνυσμα της στροφορμής είναι ανεξάρτητο από τη θέση του αντικειμένου, εξαρτάται όμως από την επιλογή του σημείου Ο. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, για ορισμένο σύστημα αναφοράς, το διάνυσμα της στροφορμής είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το χρόνο και τη θέση του σημειακού αντικειμένου.
Όπως φάνηκε από το προηγούμενο παράδειγμα, η στροφορμή μπορεί να μη συνδέεται με καμπυλόγραμμη κίνηση, πρέπει όμως κάτι να ¨περιστρέφεται¨. Αυτό το κάτι στο παράδειγμα είναι το διάνυσμα θέσης r, το διάνυσμα δηλαδή που συνδέει το σημείο Ο με το σημειακό αντικείμενο, το οποίο εδώ περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Χωρίς αυτήν την περιστροφή δεν υπάρχει στροφορμή.

Στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, που είναι το απλούστερο παράδειγμα κίνησης με στροφορμή, πρέπει η αρχή Ο του συστήματος αναφοράς να είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Με την επιλογή αυτή, η στροφορμή έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο Ο, διεύθυνση τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς, φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο που δίνεται από τη σχέση $L = m υ r$.



Μονάδα της στροφορμής στο S.I. είναι το **1 kg m²/s**.

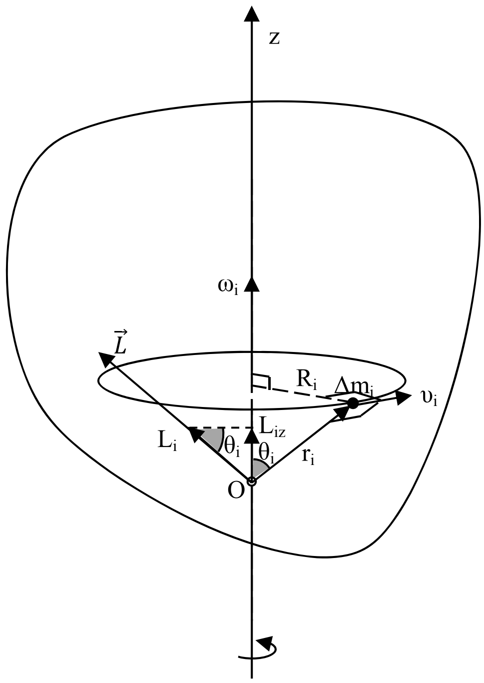
Β. Στροφορμή συστήματος σημειακών αντικειμένων.

Η στροφορμή συστήματος σημειακών μαζών, ως προς το σημείο Ο που είναι η αρχή του τρισορθογώνιου συστήματος αναφοράς xoyz, είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των μαζών ως προς την αρχή Ο.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots \vec{L}_ν \qquad (4.55)$$

Γ. Στροφορμή στερεού σώματος γύρω από τυχαίο σταθερό άξονα.

Ονομάζουμε z τον άξονα περιστροφής του στερεού και Ο την αρχή του συστήματος αναφοράς xoyz. Μπορούμε να θεωρήσουμε το στερεό σαν σύστημα σημειακών μαζών $Δm_1$, $Δm_2$, … $Δm_ν$, τα οποία στρέφονται σε κυκλικές τροχιές γύρω από τον άξονα z, με κέντρα που βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει τη διεύθυνση του άξονα, αλλά το διάνυσμα της στροφορμής των σημειακών μαζών είναι κάθετο στο επίπεδο του διανύσματος θέσης r_i και της ταχύτητας $υ_i$ και γενικά δεν έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Όπως μπορεί να αποδειχθεί(*), το γινόμενο Ιω εκφράζει <u>τη συνιστώσα της στροφορμής κατά τον άξονα z.</u>



$$L_z = I\,ω \qquad (4.56)$$

*Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε στερεό, ανεξάρτητα από το σχήμα του, υπάρχουν τρεις τουλάχιστον άξονες κάθετοι μεταξύ τους, για τους οποίους το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται **κύριοι άξονες αδράνειας**. Αν το στερεό έχει κάποια συμμετρία, τότε οι άξονες αυτοί συμπίπτουν με τους άξονες συμμετρίας.*

Αν ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας του στερεού, τότε και μόνο <u>η στροφορμή L του στερεού</u> έχει τη διεύθυνση του άξονα z και δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L} = I \cdot \vec{ω} \qquad (4.57)$$

(*) Απόδειξη: Από τον ορισμό της στροφορμής (σχέση 4.53) προκύπτει ότι $\Delta L_i = \Delta m_i\, \upsilon_i\, r_i\, ημφ_i$., όπου $φ_i$ η γωνία των διανυσμάτων r_i και υ_i. Σύμφωνα με θεώρημα της Γεωμετρίας (Θεώρημα τριών καθέτων), τα διανύσματα r_i και υ_i είναι κάθετα μεταξύ τους, επομένως $ημφ_i = 1$. Συνεπώς $\Delta L_i = \Delta m_i\, \upsilon_i\, r_i$. Για τη συνιστώσα ΔL_{iz} της στροφορμής προκύπτει (βλέπε σχήμα) ότι $\Delta L_{iz} = L_i\, ημθ_i \Rightarrow \Delta L_{iz} = \Delta m_i\, \upsilon_i\, r_i\, ημθ_i$. Όμως $r_i\, ημθ_i = R_i$, άρα $\Delta L_{iz} = \Delta m_i\, \upsilon_i\, R_i \Rightarrow \Delta L_{iz} = \Delta m_i\, \omega\, R_i^2$. Για την (ολική) συνιστώσα L_z της στροφορμής προκύπτει $L_z = \sum \Delta m_i\, \omega\, R_i^2 \Rightarrow L_z = \omega \sum \Delta\, m_i R_i^2 \Rightarrow L_z = \omega\, I$, όπου I η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

Δ. Στροφορμή συστήματος γύρω από τυχαίο σταθερό άξονα.

Ορίζουμε ως στροφορμή συστήματος σωμάτων, το οποίο στρέφεται γύρω από κάποιον άξονα, το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των μελών του συστήματος κατά τον ίδιο άξονα περιστροφής.

Αν δηλαδή οι συνιστώσες της στροφορμής των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα, κατά τον άξονα περιστροφής είναι L_1, L_2, L_3, …, L_ν, τότε η στροφορμή του συστήματος κατά τον ίδιο άξονα είναι $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots + \vec{L}_\nu$.

4.9 Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης.

Για ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισχύει για τη συνολική ροπή ότι $\Sigma\tau = I\, \alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Αν για το στερεό αυτό ισχύει η σχέση 4.57: $L = I\, \omega$, τότε παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε ότι $\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$ (4.58)

Είναι προφανές από τη διαδικασία της απόδειξης, ότι θεωρήσαμε τη ροπή αδράνειας I σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου, κάτι βέβαια που είναι προϋπόθεση και για τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης. Όμως τότε γιατί αποκαλούμε την εξίσωση 4.58 «γενικότερη διατύπωση»;

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ($\Sigma\tau = I\, \alpha_{\gamma\omega\nu}$), προκύπτει ότι όταν $\tau = 0$ είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$, επομένως χωρίς ροπή δεν μπορεί να προκληθεί μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα του στερεού. Από την άλλη μεριά όμως, η εξίσωση 4.58, ανεξάρτητα του τρόπου με τον οποίο την αποδείξαμε εδώ, ισχύει ακόμη κι αν η ροπή αδράνειας μεταβάλλεται χρονικά: $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dI}{dt} \Rightarrow \Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} + \omega\frac{dI}{dt}$, από την οποία προκύπτει ότι ακόμη κι αν $\Sigma\tau = 0$, δηλαδή χωρίς ροπή, μπορεί να προκληθεί μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, αρκεί να μεταβληθεί η ροπή αδράνειας του στερεού.

ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ Θ.Ν.Σ.Κ. : $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$.

- **Για ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ**

Σε ένα σύστημα σωμάτων οι δυνάμεις μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες,

α. σε ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ, δηλαδή σε δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος. Οι δυνάμεις αυτές, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton, είναι δυνάμεις αντίθετες μιας και ανά δύο είναι δράση – αντίδραση και

β. σε ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ, δηλαδή σε δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα.
Αντίστοιχα, οι ροπές των δυνάμεων αυτών μπορούν να διακριθούν
α. σε ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ, δηλαδή στις ροπές των εσωτερικών δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα ή το ίδιο σημείο και
β. σε ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ, δηλαδή στις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα ή το ίδιο σημείο.
Για τη συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα των σωμάτων μπορούμε να γράψουμε ότι: $\overrightarrow{\Sigma\tau}_{o\lambda} = \overrightarrow{\Sigma\tau}_{\varepsilon\sigma} + \overrightarrow{\Sigma\tau}_{\varepsilon\xi}$. Οι ροπές που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις ως προς οποιοδήποτε άξονα (τον ίδιο) είναι ίση με μηδέν. Επομένως η εξίσωση 4.50 για σύστημα σωμάτων μπορεί να γραφεί στη μορφή $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}$. (4.59)

4.10 Διατήρηση Στροφορμής.

Για ένα σώμα. Αν η συνολική ροπή που ασκείται σε ένα στερεό είναι ίση με το μηδέν, τότε όπως προκύπτει από την εξ. 4.58: $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$ Δηλαδή:

> Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό (ως προς κάποιο άξονα) είναι ίσο με το μηδέν, η στροφορμή του σώματος (κατά τον ΙΔΙΟ άξονα) παραμένει χρονικά σταθερή.

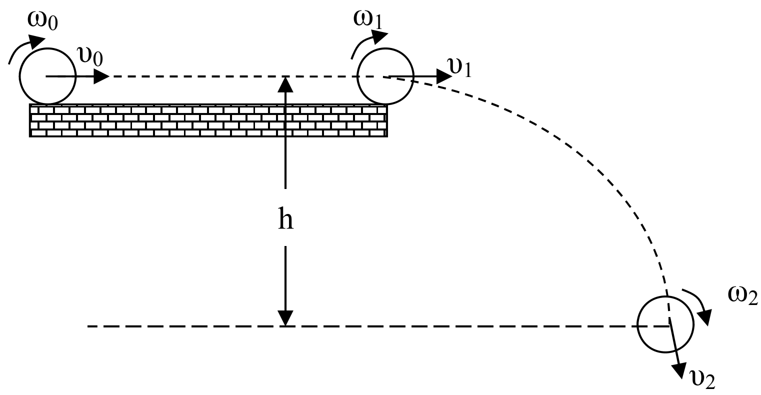
Παράδειγμα διατήρησης της στροφορμής για ένα σώμα είναι Γη, στην οποία οι δυνάμεις που ασκούνται είναι κεντρικές (ασκούνται στο κέντρο της), με αποτέλεσμα οι ροπές τους ως προς τον άξονα περιστροφής της γύρω από τον εαυτό της να είναι ίσες με το μηδέν και έτσι η στροφορμή της (spin) να παραμένει σταθερή, δηλαδή $L_{spin} = I\omega = \sigma\tau\alpha\theta$. Επειδή και η ροπή αδράνειάς της είναι χρονικά σταθερή, προκύπτει ότι και ω = σταθ. επομένως και η περίοδος περιστροφής της είναι σταθερή (T = 24 h).
Επίσης και η στροφορμή της γύρω από τον Ήλιο (τροχιακή στροφορμή) παραμένει σταθερή επειδή η δύναμη που δέχεται λόγω της έλξης από τον Ήλιο διέρχεται από το κέντρο της. Επομένως: $M_\Gamma v_{cm} r = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow M_\Gamma \omega r^2 = \sigma\tau\alpha\theta$, όπου M_Γ η μάζα της Γης και r η απόσταση των κέντρων Γης – Ήλιου.

Μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της διατήρησης της στροφορμής για ένα σώμα είναι η περίπτωση κατά την οποία μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του στερεού λόγω ανακατανομής της μάζας του γύρω από τον άξονα περιστροφής, εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων. Αυτή η μεταβολή της ροπής αδράνειας θα προκαλέσει μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (πάντα ως προς τον ίδιο άξονα). Αν για παράδειγμα συμβολίσουμε με $I_{\alpha\rho\chi}$ και $\omega_{\alpha\rho\chi}$ τη ροπή αδράνειας και το μέτρο της γωνιακή ταχύτητας περιστροφής του στερεού πριν συμβεί η μεταβολή και με $I_{\tau\varepsilon\lambda}$ και $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ τη ροπή αδράνειας και το μέτρο της γωνιακή ταχύτητας περιστροφής του στερεού μετά τη μεταβολή, θα ισχύει $I_{\alpha\rho\chi}\omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\varepsilon\lambda}\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$.
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα (μέτρο) μεταβάλλεται αντίστροφα ανάλογα με τη ροπή αδράνειας και ότι επειδή ακριβώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα έχουμε επιτάχυνση.

Για σύστημα σωμάτων. Από την εξίσωση 4.51 προκύπτει ότι αν η συνολική ροπή που οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις είναι ίση με μηδέν, τότε $\frac{d\vec{L}_{συστ}}{dt} = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{L}_{συστ} = σταθ$. Δηλαδή:

> Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων (ως προς κάποιον άξονα), που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίσο με το μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος (κατά τον ίδιο άξονα) παραμένει χρονικά σταθερή.

Παράδειγμα 4.17 Μια ομογενής σφαίρα ακτίνας R = 0,1 m και μάζας M = 4 kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0 το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα $υ_0$ = 10 m/s ενώ η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της είναι $ω_0$ = 100 rad/s. Τη χρονική στιγμή t_1 η σφαίρα φτάνει στο άκρο του οριζοντίου επιπέδου και το εγκαταλείπει.



Α.

Α1. Να εξετάσετε αν η σφαίρα ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο.

Α2. Να υπολογίσετε τα μέτρα της ταχύτητας $υ_1$ του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας $ω_1$ περιστροφής της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1.

Α3. Να υπολογίσετε τη στροφορμή της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1.

Β. Όταν το κέντρο μάζας της σφαίρας κατέβει κατακόρυφα κατά h = 2,2 m, να υπολογίσετε

Β1. τη μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας.

Β2. τη γωνιακή $\vec{ω}_2$ ταχύτητα της σφαίρας.

Β3. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{υ}_2$ του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Β4. την αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

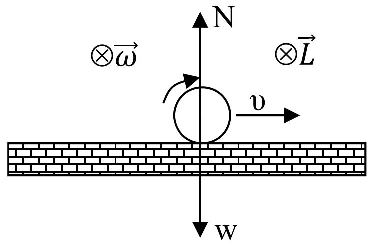
Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ και g = 10 m/s^2.

Λύση

Α.

Α1. Σύμφωνα με τα δεδομένα, θα εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη κύλισης $υ_{cm}$ = ω R. Τη χρονική στιγμή t = 0 είναι $ω_0$ R = 100 rad/s 0,1 m ⇒ ω R = 10 m/s = $υ_0$. Επομένως τη χρονική στιγμή t = 0 η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Α2. Στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος της w και η κάθετη δύναμη στήριξης N. Ανεξάρτητα αν το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο ή τραχύ, στη σφαίρα **δεν** ασκείται δύναμη τριβής. Αυτό γίνεται κατανοητό αν σκεφτούμε ότι η ύπαρξη τριβής, ανάλογα με τη φορά της, ή α. θα επιτάχυνε στροφικά τη σφαίρα ενώ ταυτόχρονα θα την επιβράδυνε μεταφορικά ή αντίστροφα



β. θα την επιβράδυνε στροφικά και ταυτόχρονα θα την επιτάχυνε μεταφορικά. Όπως κι αν ήταν όμως, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t = 0, θα έπαυε να ισχύει η σχέση $\upsilon_{cm} = \omega R$, οπότε η κυλιόμενη σφαίρα θα ολίσθαινε και η δύναμη τριβής θα ήταν τριβή ολίσθησης.

<u>Στην περίπτωση α.</u> Η δύναμη τριβής θα είχε φορά αντίθετη από την ταχύτητα του κέντρου μάζας και μέτρο $\Im_\kappa = \mu N = \mu M g$ (4.17.1)

Για τη στροφική κίνηση ισχύει:

$\Im_\kappa R = I_{cm}\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Im_\kappa R = \frac{2}{5}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Im_\kappa = \frac{2}{5}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \xRightarrow{(4.17.1)} \mu_\kappa Mg = \frac{2}{5}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{5\mu g}{2R}$. (4.17.2)

Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

$-\Im_\kappa = M\,a_{cm} \xRightarrow{(4.17.1)} a_{cm} = -\mu g.$ (4.17.3)

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα μηδενιστεί τη χρονική στιγμή που υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 - |a_{cm}|\,t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{|a_{cm}|} \xRightarrow{(4.17.3)} t = \frac{\upsilon_0}{\mu g}$. (4.17.4)

Την ίδια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής υπολογίζεται από τη σχέση:

$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \xRightarrow{(4.17.3,4)} \omega = \omega_0 + \frac{5\mu g}{2R}\frac{\upsilon_0}{\mu g} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_0}{R} + \frac{5\upsilon_0}{2R} \Rightarrow \omega = \frac{7\upsilon_0}{2R}$. (4.17.5)

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2 \Rightarrow$ $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega_0^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{5}M\upsilon_0^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = \frac{7}{10}M\upsilon_0^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 280\,J.$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που μηδενίζεται η μεταφορική ταχύτητά της είναι: $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega^2 \xRightarrow{(4.17.5)} K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{5}MR^2\left(\frac{7\upsilon_0}{2R}\right)^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{49}{20}M\upsilon_0^2 \Rightarrow$ $K_{\tau\varepsilon\lambda} = 980\,J.$ Παρατηρήστε ότι η τελική κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη από αυτήν που είχε αρχικά $(K_{\tau\varepsilon\lambda} = 3{,}5\cdot K_{\alpha\rho\chi})$, δηλαδή χωρίς να δαπανάμε εμείς ενέργεια, η σφαίρα αύξησε την ενέργειά της και μάλιστα με την επίδραση δύναμης τριβής. Αυτό όμως παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Επομένως δεν μπορεί να ασκείται δύναμη τριβής, τουλάχιστον αντίρροπη με την αρχική της ταχύτητα.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε τη δύναμη τριβής ομόρροπη στην αρχική ταχύτητα. (περίπτωση β.) $(K_{\tau\varepsilon\lambda} = 1{,}4\cdot K_{\alpha\rho\chi})$.

<u>Όταν ένα στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση της δύναμης στήριξης και του βάρους του, η κίνηση είναι ομαλή (και η στροφική και η μεταφορική) και γίνεται χωρίς την επίδραση δύναμης τριβής.</u>

Επειδή η κίνηση είναι ομαλή, για όσο χρόνο η σφαίρα κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, η ταχύτητα του κέντρου μάζας της και η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένουν σταθερές, δηλαδή θα είναι $\upsilon_1 = 10$ m/s και $\omega_1 = 100$ rad/s.

Α3. Για τη στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της ισχύει

$L_0 = L_1 = I_{cm}\,\omega_0 = \frac{2}{5}MR^2\omega_0 = \frac{2}{5}\cdot 4\,kg\cdot(0{,}1m)^2\cdot 100\frac{rad}{s} \Rightarrow L_1 = 1{,}6\,kg\frac{m^2}{s}$.

Β.

Β1. Κατά τη διάρκεια της πτώσης της σφαίρας, η μοναδική δύναμη που ενεργεί σε αυτήν είναι το βάρος της. Η ροπή του βάρους ως προς το κέντρο μάζας της σφαίρας είναι μηδέν, επομένως Στ = 0, άρα σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής, η στροφορμή της σφαίρας παραμένει σταθερή, κατά μέτρο και κατεύθυνση. Επομένως είναι $L_2 = 1{,}6\,kg\frac{m^2}{s}$.
Επομένως θα είναι και ΔL = 0.

Β2. Είναι $L_2 = I\omega_2$. Επειδή η στροφορμή και η ροπή αδράνειας της σφαίρας παραμένουν σταθερές, θα παραμείνει σταθερή και η γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή

$$\omega_2 = \omega_1 = \omega_0 = 100\ rad/s.$$

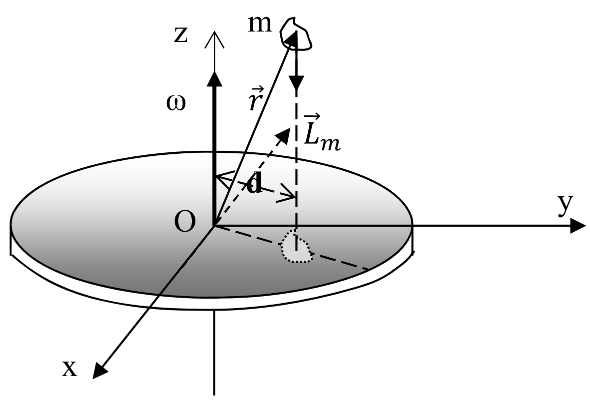
Β3. Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια τη χαμηλότερη θέση του κέντρου μάζας της σφαίρας και εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ.
$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 + 0.$
Επειδή $\omega_2 = \omega_0$, έχουμε $\frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2^2 = \upsilon_0^2 + 2gh \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$. Με αντικατάσταση στο S.I $\upsilon_2 = \sqrt{(10m/s)^2 + 2\cdot 10m/s^2 \cdot 2{,}2m} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{(100+44)m^2/s^2} \Rightarrow$ $\upsilon_2 = 12m/s.$

Β4. Επειδή η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας παραμένει σταθερή, παραμένει σταθερή και η κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης. Επομένως η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας οφείλεται μόνο στη μεταβολή της μεταφορικής κινητικής ενέργειας, η οποία σύμφωνα με το ΘΜΚΕ είναι ίση με το έργο του βάρους, δηλαδή

$$\Delta K = \Delta K_{\mu\varepsilon\tau} = W_{mg} = Mgh = 4kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}2m = 88\,J$$

Παράδειγμα 4.18 *Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας R και μάζας Μ στρέφεται με συχνότητα f γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Από κάποιο ύψος αφήνεται ένα κομμάτι λάσπη μάζας m, που κολλάει στο δίσκο σε απόσταση d = R/2 από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα περιστροφής του δίσκου.*
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$. ΕΦΑΡΜΟΓΗ: M = 1 kg, f = 2 Hz, m = 100 g.

Λύση



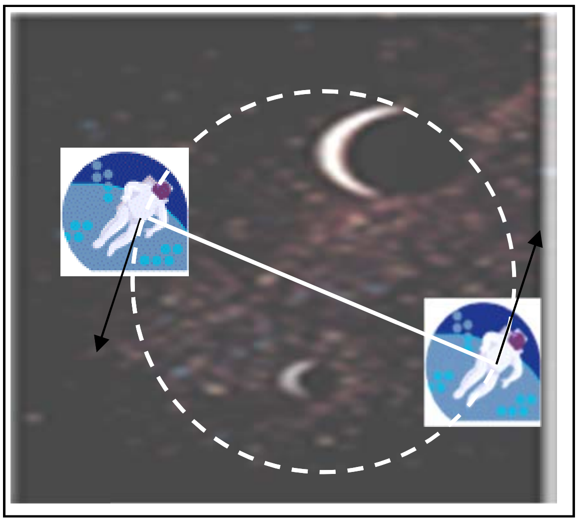
Θεωρούμε το σύστημα αναφοράς xoyz του οποίου η αρχή O ταυτίζεται με το κέντρο O του δίσκου. Η στροφορμή του δίσκου ως προς την αρχή O έχει την κατεύθυνση του άξονα z και μέτρο $L_\delta = I\,\omega$.
Στο δίσκο, οι δυνάμεις (βάρος και δύναμη άξονα) διέρχονται από το σημείο O, επομένως οι ροπές τους ως προς το O είναι μηδενικές.
Η λάσπη καθώς πέφτει, έχει στροφορμή L_m, με διεύθυνση που συμπίπτει με τον άξονα x και φορά κατά την αρνητική του άξονα x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μόνη δύναμη που ενεργεί στη λάσπη είναι το βάρος της, η ροπή του οποίου ως προς το σημείο O έχει τη διεύθυνση του άξονα x. Επομένως, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ z είναι μηδέν. Μπο-

ρούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε για το σύστημα δίσκος - λάσπη την αρχή διατήρησης της στροφορμής μόνο κατά τον άξονα z: $\vec{L}_\delta + \vec{0} = \vec{L}_z \Rightarrow$

$$I\omega = \left(\mathrm{I} + md^2\right)\omega' \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{M}R^2 2\pi f = \left(\frac{1}{2}\mathrm{M}R^2 + m\frac{R^2}{4}\right)2\pi f' \Rightarrow f' = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}R^2}{\frac{1}{2}\mathrm{M}R^2 + m\frac{R^2}{4}} f \Rightarrow f' = \frac{2M}{2M + m} f$$

Εφαρμογή: $f' = \dfrac{2}{2+0,1} 2\,Hz \Rightarrow f' \cong 1,9\,Hz$.

Παράδειγμα 4.19 Δύο αστροναύτες με μάζα 80 kg ο καθένας, είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους με σχοινί αμελητέας μάζας και μήκους 12 m. Οι αστροναύτες βρίσκονται σε περιοχή του διαστήματος όπου το βαρυτικό πεδίο θεωρείται αμελητέο και περιστρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους (που είναι το μέσο του σχοινιού) με γραμμική ταχύτητα 10 m/s ο καθένας. Οι αστροναύτες θεωρούνται σημειακές μάζες και η δύναμη της παγκόσμιας έλξης μεταξύ των μαζών τους αμελητέα.



Α. Να υπολογίσετε

Α1. το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο αστροναυτών.

Α2. την κινητική ενέργεια του συστήματος.

Α3. την τάση του σχοινιού.

Β. Οι δύο αστροναύτες τραβούν το σχοινί προς το μέρος τους και το μαζεύουν ώστε να ελαττώνουν τη μεταξύ τους απόσταση.

Β1. Αν το όριο θραύσης του σχοινιού είναι 2304 N, να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση στην οποία μπορούν να πλησιάσουν μεταξύ τους ώστε να μην κοπεί το σχοινί.

Β2. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων τους όταν βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση.

Β3. Να υπολογίσετε το έργο που παράγουν οι αστροναύτες μέχρι να πλησιάσουν στην ελάχιστη απόσταση.

Λύση

Σε κάθε αστροναύτη η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η δύναμη από το σχοινί με το οποίο είναι συνδεδεμένοι και της οποίας η φορά είναι προς το κέντρο της τροχιάς. Η δύναμη αυτή παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Αν συμβολίσουμε με T τη δύναμη του σχοινιού, τότε $T = F_K = \dfrac{m\upsilon^2}{\ell/2} \Rightarrow T = 2\dfrac{m\upsilon^2}{\ell}$. (4.19.1)

Α1. Η στροφορμή κάθε αστροναύτη ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς (κάθετη στο επίπεδο της σελίδας) και φορά προς τα έξω. Το μέτρο της στροφορμής υπολογίζεται από τη σχέση L = m υ r, αφού οι αστροναύτες θεωρούνται σημειακά αντικείμενα. Η στροφορμή του συστήματος είναι $\vec{L}_\sigma = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ ή αλγεβρικά $L_\sigma = L_1 + L_2 \Rightarrow L_\sigma = 2L_1 \Rightarrow L_\sigma = 2\,m\,\upsilon\,r \Rightarrow$
$L_\sigma = 2\cdot 80\cdot 10\cdot 6$ kgm²/s $\Rightarrow L_\sigma = 9600$ kgm²/s.

Α2. Το σύστημα των δύο αστροναυτών έχει κινητική ενέργεια $K_σ = K_1 + K_2 \Rightarrow$

$$K_σ = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow K_σ = mυ^2 \Rightarrow K_σ = 80{\cdot}10^2 J \Rightarrow K_σ = 8000\,J$$

Α3. Αντικαθιστούμε στη σχέση 4.19.1: $T = 2 \cdot \frac{80\cdot 10^2}{12} N \Rightarrow T = \frac{4000}{3} N$.

Β.

Β1. Στο σύστημα των δύο αστροναυτών δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη, επομένως για το σύστημα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής (και ορμής). (Ακόμη, επειδή σε κάθε αστροναύτη η δύναμη από το σχοινί διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, η ροπή της ως προς το κέντρο είναι μηδενική και επομένως θα διατηρείται η στροφορμή και για κάθε αστροναύτη χωριστά).

Αν ονομάσουμε x την απόσταση των δύο αστροναυτών μια τυχαία χρονική στιγμή, καθώς μαζεύουν το σχοινί και εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα θα έχουμε $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow 2mυ\frac{\ell}{2} = 2mυ_1\frac{x}{2} \Rightarrow υ_1 = υ\frac{\ell}{x}$. (4.19.2)

Για να μη σπάσει το σχοινί πρέπει $T \le T_{θρ} \xRightarrow{(4.19.1)} 2\frac{mυ_1^2}{x} \le T_{θρ} \xRightarrow{(4.19.2)} 2\frac{m\cdot\frac{υ^2\cdot\ell^2}{x^2}}{x} \le T_{θρ} \Rightarrow$

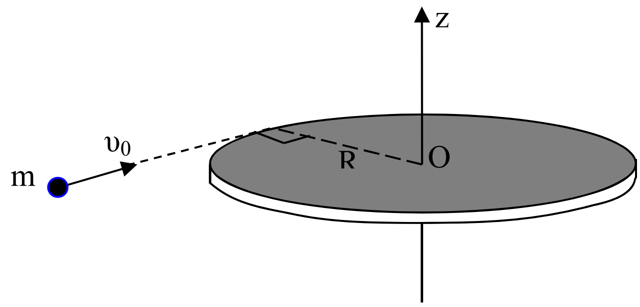
$$2\frac{mυ^2\cdot\ell^2}{x^3} \le T_{θρ} \Rightarrow x^3 \ge 2\frac{mυ^2\cdot\ell^2}{T_{θρ}} \Rightarrow x \ge \sqrt[3]{2\frac{mυ^2\cdot\ell^2}{T_{θρ}}} \Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{2\frac{mυ^2\cdot\ell^2}{T_{θρ}}} \Rightarrow$$

$x_{min} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 80\cdot 10^2\cdot 12^2}{2304}}\,m \Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{1000}\,m \Rightarrow x_{min} = 10\,m.$

Β2. Από τη σχέση 4.19.2 με αντικατάσταση της τυχαίας απόστασης x με την ελάχιστη απόσταση x_{min}, έχουμε: $υ_1 = υ\frac{\ell}{x_{min}} \Rightarrow υ_1 = 10\frac{m}{s}\cdot\frac{12m}{10m} \Rightarrow υ_1 = 12\,m/s.$

Β3. Το έργο που έκαναν οι αστροναύτες για τη μετακίνησή τους μέχρι την ελάχιστη απόσταση υπολογίζεται από το Θ.Μ.Κ.Ε.: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow W = 2\cdot\frac{1}{2}mυ_1^2 - 2\cdot\frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow W = 80\cdot(12^2 - 10^2)\,J \Rightarrow W = 3520\,J$

Παράδειγμα 4.20 Οριζόντια κυκλική πλατφόρμα που αρχικά είναι ακίνητη, έχει μάζα M = 40 kg, ακτίνα R = 2 m και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Ένα παιδί μάζας m = 20 kg τρέχει οριζόντια κατά τη διεύθυνση μιας εφαπτομένης της κυκλικής πλατφόρμας με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 4 m/s και πηδάει ξαφνικά σε ένα σημείο της περιφέρειας της πλατφόρμας στο οποίο και παραμένει. Το παιδί θεωρείται σημειακό αντικείμενο.



α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της πλατφόρμας.

β. Αν θέλουμε να σταματήσουμε την πλατφόρμα σε χρόνο 10 s, να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής, ως προς τον άξονα περιστροφής, που πρέπει να της ασκήσουμε.

γ. Πόσες περιστροφές θα εκτελέσει η πλατφόρμα μέχρι να σταματήσει;

Η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α. Θεωρούμε σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο Ο της πλατφόρμας. Στο σύστημα παιδί – πλατφόρμα, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν είναι το βάρος του παιδιού. Η ροπή αυτής της δύναμης ως προς την αρχή Ο είναι διάφορη του μηδενός, αλλά έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα x, επομένως κατά τον άξονα περιστροφής z ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$.

Η στροφορμή του συστήματος παιδί – πλατφόρμα διατηρείται κατά τον άξονα z.

Είναι $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \overset{4.54}{\Longrightarrow} m\upsilon_0 R + 0 = I\omega_0 + mR^2\omega_0 \Rightarrow m\upsilon_0 R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 \Rightarrow$

$\omega_0 = \frac{2m\upsilon_0}{(M+2m)R} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\cdot 20\cdot 4}{(40+2\cdot 20)\cdot 2} \Rightarrow \omega_0 = 1\, rad/s$, με κατεύθυνση την αρνητική του άξονα z

β. Η κίνηση της πλατφόρμας θα είναι στροφική ομαλά επιβραδυνόμενη, επομένως η γωνιακή του ταχύτητα θα δίνεται από τη σχέση: $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu}\, t$. Για $\omega = 0$ και $t = 10$ s προκύπτει: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = -\frac{\omega_0}{t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -0{,}1 rad/s^2$.

Από το Θ.Ν.Σ.Κ. παίρνουμε $\Sigma\tau = I_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\Sigma\tau = (20 + 20)\cdot 2^2(-0{,}1)Nm \Rightarrow \Sigma\tau = -16Nm$. Για το μέτρο της ροπής ισχύει

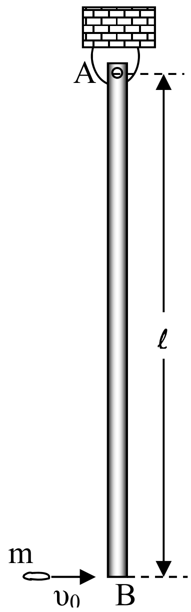
$$|\tau| = 16\, Nm.$$

γ. Εφαρμόζουμε για τη στροφική κίνηση του συστήματος το Θ.Μ.Κ.Ε.

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_\tau \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega_0^2 = \tau\cdot\theta \Rightarrow \theta = -\frac{\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega_0^2}{2\tau} \Rightarrow \theta = -\frac{(20+20)\cdot 2^2}{2\cdot(-16)} \Rightarrow$

$\theta = 5\ (rad)$. Για τον αριθμό των περιστροφών ισχύει $\theta = N\, 2\pi \Rightarrow N = \frac{5}{2\pi}$ στροφές.

Παράδειγμα 4.21 Μία ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ = 1 m και μάζας Μ = 1 kg είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στον κατά μήκος άξονά της που διέρχεται από το πάνω άκρο της Α. Η ράβδος αρχικά ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας m = 50 g, το οποίο θεωρούμε σαν σημειακό αντικείμενο, κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0 = 40 m/s και τη στιγμή t = 0 διαπερνά ακαριαία τη ράβδο στο κάτω άκρο της Β και εξέρχεται από αυτό με ταχύτητα μέτρου υ = 20 m/s. Να υπολογίσετε



α. τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

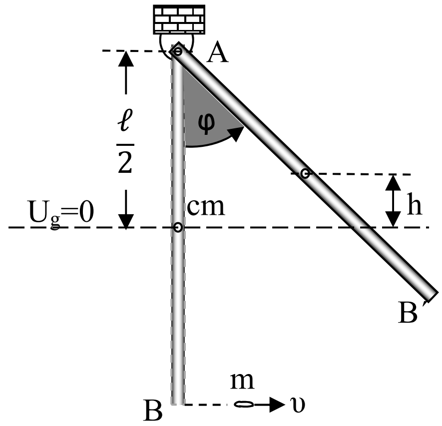
β. το ποσοστό % απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος ράβδος – βλήμα κατά την κρούση.

γ. τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I = \frac{1}{12}M\ell^2$. ($g = 10\ m/s^2$).

Λύση

Επειδή η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, δηλαδή αρχίζει και τελειώνει στη ίδια θέση (Β), τη στιγμή αυτή οι φορείς όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα βλήμα – ράβδος διέρχονται από το σημείο Α. Επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο Α είναι ίσο με μηδέν. Θεωρούμε ως αρχή του συστήματος αναφοράς το σημείο Α και τον άξονα z να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής.



α. Η στροφορμή του συστήματος βλήμα – ράβδος, λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση είναι σταθερή. Είναι $L_{αρχ} = mv_0\ell + 0$ και $L_{τελ} = I_{(A)}\omega + mv\ell$. (4.21.1)

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της με εφαρμογή του Θεωρήματος των παράλληλων αξόνων (Steiner):

$I_{(A)} = I_{cm} + Md^2 \Rightarrow I_{(A)} = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$I_{(A)} = \frac{1}{3}M\ell^2$. (4.21.2)

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της στροφορμής με τη βοήθεια των σχέσεων 4.21.1: $mv_0\ell = I_{(A)}\omega + mv\ell \xRightarrow{(4.21.2)} m\,\ell(v_0 - v) = \frac{1}{3}M\ell^2\omega \Rightarrow$

$\omega = \frac{3m(v_0 - v)}{M\ell} \Rightarrow \omega = \frac{3\cdot 0{,}05\cdot(40-20)}{1\cdot 1} rad/s \Rightarrow \omega = 3\, rad/s.$

β. Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος οφείλεται μόνο στην κινητική ενέργεια του βλήματος. Είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}05\cdot 40^2 J \Rightarrow K_{αρχ} = 40\,J$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος λίγο μετά την κρούση οφείλεται στην κινητική ενέργεια του βλήματος και στη στροφική κινητική ενέργεια της ράβδου. Είναι

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}05\cdot 20^2 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1^2\cdot 3^2 = 10J + 1{,}5J$$

$\Rightarrow K_{τελ} = 11{,}5\,J.$

Το ζητούμενο ποσοστό απώλειας είναι $\frac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}}\right)\cdot 100\% = 71{,}25\%$

γ. Για την κίνηση της ράβδου, μετά το πέρασμα του βλήματος, ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Είναι: $E_{αρχ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} = \frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 + 0 = \frac{1}{6}M\ell^2\omega^2$.

$E_{τελ} = K_{τελ} + U_{τελ} = 0 + Mgh$, όπου h η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας.

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι $h = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}συνφ = \frac{\ell}{2}(1 - συνφ)$

Από Α.Δ.Μ.Ε. παίρνουμε $\frac{1}{6}M\ell^2\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2}(1 - συνφ) \Rightarrow συνφ = 1 - \frac{\ell\omega^2}{3g} = 1 - \frac{1\cdot 3^2}{3\cdot 10}$

$συνφ = \frac{7}{10}$. ($φ \cong 45{,}6^0$).

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ		ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
ΘΕΣΗ	x	Γωνιακή θέση	θ
Μετατόπιση	Δx	Γωνιακή μετατόπιση	Δθ
Ταχύτητα	$\upsilon = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση	$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	Γωνιακή Επιτάχυνση	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη	F	Ροπή Δύναμης	τ = F d ημφ
Μάζα	m	Ροπή αδράνειας	$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$
Ορμή	p = m υ	Στροφορμή	L = I ω
Έργο σταθ. δύναμης	W=F Δx	Έργο σταθ. ροπής	W=τ Δθ
Ισχύς δύναμης	$P = \frac{dW}{dt} = F\,\upsilon$	Ισχύς ροπής	$P = \frac{dW}{dt} = \tau\,\omega$
Κινητική Ενέργεια	$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$	Κινητική Ενέργεια	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΝΟΜΩΝ

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
Ευθύγραμμη Ομαλή κίνηση υ=σταθ. Δx = υ Δt	Ομαλή στροφική κίνηση ω = σταθ. Δθ = ω Δt
Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλ. Κίνηση α = σταθ. υ = υ_0 + α t, $\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	Στροφική Ομαλά Μεταβαλ. κίνηση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$ ω = ω_0 +$\alpha_{\gamma\omega\nu}$ t, $\Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$
Θεμελιώδης νόμος Μηχανικής ΣF = m a	Θεμελιώδης νόμος Στροφικής κίνησης Στ = I $\alpha_{\gamma\omega\nu}$
2ος νόμος Newton $\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	2ος νόμος Newton $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Αρχή Διατήρησης Ορμής $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \sigma\tau\alpha\theta.$	Αρχή Διατήρησης Στροφορμής $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$
Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W_F$	Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W_\tau$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

__Οδηγία:__ Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

4.209. Σπιν (spin) ονομάζουμε

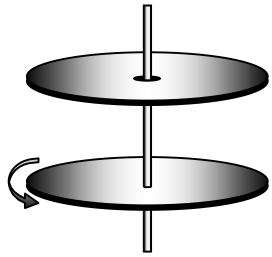
α. τη ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

β. το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα του στερεού.

γ. το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού κατά τον άξονα περιστροφής.

δ. τη στροφορμή που σχετίζεται με τη στροφική κίνηση ενός στερεού γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

4.210. Ο κάτω δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ένας δεύτερος όμοιος δίσκος, ο οποίος αρχικά ήταν ακίνητος, αφήνεται να πέσει πάνω στον πρώτο. Το σύστημα των δύο δίσκων μετά από λίγο περιστρέφεται μαζί ως ένα σώμα. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος θα γίνει:



α. 2ω. **β.** ω/2. **γ.** 4ω. **δ.** ω

4.211. Ένας συμπαγής και ένας κοίλος κύλινδρος, ίδιας μάζας και ακτίνας, έχουν ίδια κινητική ενέργεια στρεφόμενοι γύρω από σταθερό άξονα. Η στροφορμή

α. του συμπαγούς κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη.

β. του κοίλου κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη.

γ. είναι ίδια και στα δύο σώματα.

δ. δε σχετίζεται με την κινητική τους ενέργεια.

4.212. Ένας δίσκος και ένας δακτύλιος, ίδιας μάζας και ακτίνας στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα και έχουν ίσες στροφορμές. Η στροφική κινητική ενέργεια

α. είναι μεγαλύτερη στο δίσκο. **β.** είναι μεγαλύτερη στο δακτύλιο

γ. είναι ίδια και στα δύο σώματα. **δ.** δεν εξαρτάται από τη στροφορμή.

4.213. Η στροφορμή ενός στερεού που περιστρέφεται ομαλά γύρω από σταθερό άξονα έχει μέτρο 10 kg m^2/s και η κινητική του ενέργεια είναι 5 J. Συνεπώς

α. η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι 15 kg m^2.

β. η γωνιακή του ταχύτητα είναι 1 rad/s.

γ. η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του στερεού, που απέχει από τον άξονα περιστροφής 0,3 m, είναι 0,6 m/s.

δ. το στερεό στρέφεται με σταθερή συχνότητα 0,5 π Hz.

4.214. Ένας αθλητής καταδύσεων, ενώ πέφτει, μαζεύει τα χέρια και τα πόδια του κοντά στο στήθος ελαττώνοντας έτσι τη ροπή αδράνειάς του κατά 3 φορές. Η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής

α. τριπλασιάζεται. **β.** υποτριπλασιάζεται.

γ. εννεαπλασιάζεται. **δ.** υποεννεαπλασιάζεται.

4.215. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε οριζόντιο επίπεδο, έχει μηδενική στροφορμή ως προς την αρχή O ενός συστήματος αναφοράς. Συνεπώς το σημειακό αντικείμενο

α. κινείται σε κυκλική τροχιά με κέντρο το σημείο O.

β. κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά που διέρχεται από το σημείο O.

γ. κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

δ. δεν δέχεται την επίδραση δύναμης.

4.216. Μια ομογενής σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου. Κατά τη διάρκεια της κύλισης της σφαίρας, το μέγεθος που παραμένει σταθερό είναι η

α. γωνιακή ταχύτητα. **β.** γωνιακή επιτάχυνση.

γ. ορμή. **δ.** στροφορμή κατά τον άξονα περιστροφής της.

4.217. Όταν η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίση με μηδέν, τότε διατηρείται

α. η ολική ορμή του συστήματος. **β.** η ολική στροφορμή του συστήματος.

γ. η μηχανική ενέργεια του συστήματος. **δ.** όλα τα παραπάνω.

4.218. Ένα στερεό σώμα στρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του

α. είναι ανάλογο προς το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

β. είναι ανάλογο προς τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστρο-φής του.

γ. είναι ανάλογο προς το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού, αν η ροπή αδράνειας του στερεού είναι σταθερή.

δ. είναι μηδέν, αν στο στερεό ασκούνται σταθερές δυνάμεις.

4.219. Ένας αθλητής καταδύσεων, που πηδά από μια εξέδρα, μπορεί κατά τη διάρκεια της πτώσης του να εκτελεί διάφορες κινήσεις πριν πέσει στο νερό. Το φυσικό μέγεθος που παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της πτώσης του είναι η

α. γωνιακή ταχύτητα. **β.** ροπή αδράνειας.

γ. ορμή. **δ.** στροφορμή.

4.220. Αφήνουμε ελεύθερη μια σφαίρα από ύψος h. Τη στιγμή που την αφήνουμε το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει μηδενική ταχύτητα, ενώ η σφαίρα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Συνεπώς

α. επειδή αυξάνεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας της θα αυξάνεται και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

β. η δύναμη του βάρους της είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της, αλλά δε μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

γ. επειδή η σφαίρα επιταχύνεται θα αυξάνεται και η στροφορμή της κατά τον άξονα περιστροφής της.

δ. ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της είναι ίσος με το βάρος της.

4.221. Η στροφορμή του ωροδείκτη ενός ρολογιού, ως προς το σημείο Ο του άξονά του

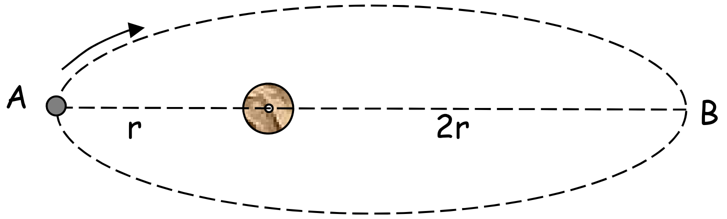
α. είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του ρολογιού που διέρχεται από το ελεύθερο άκρο του δείκτη.

β. είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του ρολογιού, με σημείο εφαρμογής το άκρο Ο του δείκτη και φορά από τα μάτια του παρατηρητή προς την επιφάνεια του ρολογιού.

γ. εξαρτάται από τη ροπή που ασκεί ο άξονας περιστροφής στον ωροδείκτη.

δ. είναι μεγαλύτερη από τη στροφορμή του λεπτοδείκτη, ως προς το ίδιο σημείο, αν θεωρήσουμε ότι οι δύο δείκτες έχουν ίσες ροπές αδράνειας.

4.222. Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης, τον οποίο θεωρούμε σημειακό αντικείμενο, κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη. Η Γη κατέχει τη θέση μιας εκ των δύο εστιών της έλλειψης. Όταν ο δορυφόρος περνάει από τη θέση Α έχει ταχύτητα μέτρου υ, ενώ όταν περνάει από τη θέση Β έχει ταχύτητα μέτρου



α. $\frac{\upsilon}{4}$. **β.** $\frac{\upsilon}{2}$. **γ.** υ.
δ. 2υ. **ε.** 4υ. **στ.** 0.

4.223. Μια ομογενής σφαίρα κυλίεται σε πλάγιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι <u>λανθασμένη</u>;

α. Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας είναι σταθερή.
β. Ασκείται δύναμη τριβής στη σφαίρα.
γ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας αυξάνεται.
δ. Η στροφορμή της σφαίρας παραμένει σταθερή.

4.224. Δύο σφαίρες Α και Β, που περιστρέφονται γύρω από διαφορετικούς άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους, έχουν ίσες στροφορμές. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας Α ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι διπλάσια από τη ροπή αδράνειας της σφαίρας Β, ως προς τον δικό της άξονα περιστροφής. Αν K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες των σφαιρών Α και Β, αντίστοιχα, τότε ισχύει

α. $K_2 = 2\ K_1$. **β.** $K_2 = 4\ K_1$. **γ.** $K_2 = 0,5\ K_1$. **δ.** $K_2 = 0,25\ K_1$.

4.225. Ένας ομογενής δακτύλιος, του οποίου θεωρούμε τη μάζα συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, έχει μάζα Μ και ακτίνα R. Ο δακτύλιος περιστρέφεται γύρω από σταθερό νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο δακτύλιος στρέφεται με στροφορμή σταθερού μέτρου L_0. Για να μειωθεί η στροφορμή στο μισό της αρχικής της τιμής πρέπει να ασκήσουμε στο δακτύλιο ροπή της οποίας το έργο υπολογίζεται από τη σχέση

α. $-\frac{L_0^2}{MR^2}$. **β.** $-\frac{L_0^2}{2MR^2}$. **γ.** $-\frac{3L_0^2}{8MR^2}$. **δ.** $-\frac{5L_0^2}{4MR^2}$.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

4.226. Αν ένα στερεό στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση τότε η ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του είναι ίσος με μηδέν.

4.227. Δύο στερεά, που αποτελούν σύστημα, στρέφονται και τα μέτρα των στροφορμών τους είναι μη μηδενικά. Συνεπώς η στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο μη μηδενικό.

4.228. Η στροφορμή σημειακού αντικειμένου υπολογίζεται από τη σχέση L = mωr.

4.229. Η κινητική ενέργεια ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, υπολογίζεται από τη σχέση $K = \frac{L^2}{2I}$.

4.230. Όταν σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα ασκηθεί ζεύγος δυνάμεων, τότε θα μεταβληθεί και η ορμή του και η στροφορμή του.

4.231. Η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της παραμένει σταθερή επειδή οι φορείς των δυνάμεων που δέχεται, λόγω παγκόσμιας έλξης από άλλα ουράνια σώματα, διέρχονται από το κέντρο της.

4.232. Αν, για κάποιο λόγο, αυξηθεί ο όγκος της γης, χωρίς να μεταβληθεί η μάζα της, τότε η διάρκεια της ημέρας θα αυξηθεί.

4.233. Η διάρκεια της ημέρας θα ελαττωθεί αν, λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας της Γης, λιώσουν οι πάγοι στους πόλους της.

4.234. Στροφορμή συστήματος στερεών σωμάτων ονομάζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

4.235. Για να μεταβληθεί η στροφορμή ενός

α. σημειακού αντικειμένου πρέπει να του ασκηθεί δύναμη.

β. στερεού σώματος πρέπει να του ασκηθεί ροπή.

γ. συστήματος σωμάτων πρέπει να του ασκηθεί εξωτερική ροπή που είναι διάφορη μηδενός.

δ. συστήματος σωμάτων πρέπει να του ασκηθούν εξωτερικές δυνάμεις που έχουν συνισταμένη διάφορη του μηδενός.

4.236. Στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός σημειακού αντικειμένου, τα μεγέθη τα οποία παραμένουν σταθερά είναι

α. η γωνιακή ταχύτητα.

β. η γραμμική ταχύτητα.

γ. η ορμή.

δ. η στροφορμή.

4.237. Ένας δίσκος και ένας δακτύλιος ίσης μάζας και ίσης ακτίνας κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας ίσες σταθερές γωνιακές ταχύτητες. Συνεπώς

α. τα δύο σώματα έχουν ίσες στροφορμές.
β. τα δύο σώματα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες λόγω μεταφορικής κίνησης.
γ. Ο δίσκος έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης.
δ. Ο δακτύλιος έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από το δίσκο.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

4.238. Να αντιστοιχίσετε τα φυσικά μεγέθη της στήλης Α με τις μονάδες μέτρησής τους στο S.I

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. στροφορμή	*1. joule*
β. έργο δύναμης με όρους ροπής	*2. joule meter*
γ. κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	*3. joule*
δ. ισχύς δύναμης με όρους ροπής	*4. watt*
ε. ρυθμός μεταβολής στροφορμής	*5.* $kg\,m^2/s$
	6. newton meter

4.239. Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη της στήλης Α που αναφέρονται στη μεταφορική κίνηση ενός στερεού με τα μεγέθη που αναφέρονται στη στροφική κίνηση του στερεού.

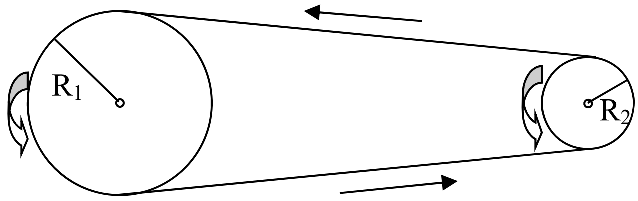
ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. μετατόπιση	**1.** στροφορμή
β. ταχύτητα	**2.** ροπή δύναμης
γ. επιτάχυνση	**3.** κινητική ενέργεια
δ. μάζα	**4.** γωνία
ε. δύναμη	**5.** ροπή αδράνειας
στ. ορμή	**6.** γωνιακή επιτάχυνση
	7. γωνιακή ταχύτητα

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

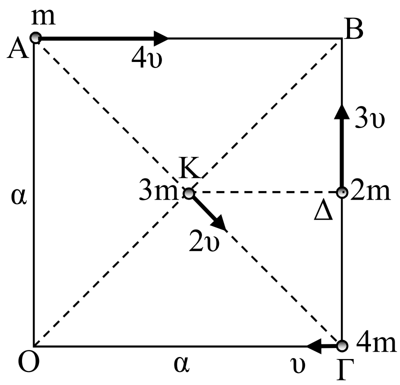
4.240. Να αποδείξετε τη μαθηματική σχέση που συνδέει τη στροφορμή ενός στερεού, το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό κύριο άξονα, με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

4.241. Ένας κύλινδρος και μια σφαίρα, που κυλίονται, έχουν ίσες μάζες, ίσες ακτίνες και ίσες κινητικές ενέργειες. Είναι δυνατόν τα μέτρα των στροφορμών τους να είναι ίσα; Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής τους $I_1 = \frac{1}{2}MR_1^2$ και $I_2 = \frac{2}{5}MR_2^2$, αντίστοιχα.

4.242. Οι δύο τροχοί του σχήματος συνδέονται με ιμάντα και στρέφονται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Για τις ακτίνες των δύο τροχών ισχύει η σχέση $\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{1}$. Αν τα μέτρα των στροφορμών των δύο τροχών, υπολογισμένων ως προς τα κέντρα τους, είναι ίσα, να υπολογίσετε το λόγο των ροπών αδράνειας των δύο τροχών ως προς τους άξονες περιστροφής τους.



4.243. Τέσσερα σημειακά αντικείμενα με μάζες m, 2m, 3m και 4m κινούνται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες 4υ, 3υ, 2υ και υ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε ως αρχή Ο του συστήματος αναφοράς την κορυφή Ο του τετραγώνου ΟΑΒΓ και τον άξονα z να είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των τεσσάρων σημειακών μαζών κατά τον άξονα z.



4.244. Μια λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος στον άξονά της. Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη να περιστραφεί. Η ράβδος έχει μήκος ℓ και βάρος w. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της τη χρονική στιγμή που γίνεται κατακόρυφη, είναι

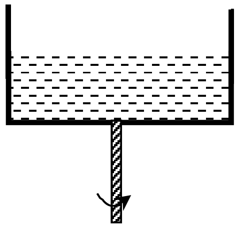
α. $w\ell$. **β.** $w\frac{\ell}{2}$. **γ.** 0.

Να επιλέξετε την σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.245.α. Παίρνουμε λίγο νερό από μια λεκάνη και το μετατρέπουμε σε πάγο. Ρίχνουμε το παγάκι στη λεκάνη με το νερό και βλέπουμε ότι αυτό επιπλέει. Γιατί συμβαίνει αυτό;

β. Σφαιρικός κόκκος από χαλάζι πέφτει από αρκετό ύψος ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται. Κατά την κάθοδό του λιώνει και μετατρέπεται σε σφαιρική σταγόνα νερού. Αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις από τον αέρα και τις τριβές, τι μεταβολή θα παρατηρήσουμε στη γωνιακή του ταχύτητα και στην κινητική του ενέργεια λόγω της στροφικής του κίνησης;

4.246. Το δοχείο του διπλανού σχήματος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του και περιέχει πάγο. Τι θα συμβεί όταν λιώσει ο πάγος;



4.247. Ένας τροχός (στεφάνι) και ένας δίσκος, ίδιας μάζας και ακτίνας, μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες κάθετους στην επιφάνειά τους που περνούν από το κέντρο τους και είναι ακίνητοι. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρειά τους δύναμη σταθερού μέτρου F.

α. Ασκείται η ίδια ροπή και στους δύο.

β. Αποκτούν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση και οι δύο.

γ. Ο δίσκος έχει μικρότερη ροπή αδράνειας από τον τροχό.

δ. Κάθε χρονική στιγμή έχουν και οι δύο την ίδια στροφορμή.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.248. Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του που περνάει από το κέντρο τους. Με την άσκηση σταθερής ροπής επιβραδύνουμε τον τροχό μέχρι να υποδιπλασιαστεί η γωνιακή του ταχύτητα.

α. Η στροφορμή του τροχού διατηρείται σταθερή.

β. Η στροφορμή του τροχού υποδιπλασιάζεται.

γ. Η κινητική ενέργεια του τροχού υποδιπλασιάζεται.

δ. Η κινητική ενέργεια του τροχού υποτετραπλασιάζεται.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

4.249. Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται με τα χέρια της στην έκταση, με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Κάποια στιγμή φέρνει τα χέρια της στην στάση προσοχής.

α. Η ροπή αδράνειας της αθλήτριας αυξάνεται.

β. Η στροφορμή της αθλήτριας παραμένει σταθερή.

γ. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της αθλήτριας αυξάνεται.

δ. Η κινητική ενέργεια της αθλήτριας παραμένει σταθερή.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.250. Ομογενής σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = 2/5\ M\ R^2$.

α. Η στροφορμή της σφαίρας έχει μέτρο $2/5\ M\ R^2\ \omega$.

β. Η στροφορμή της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $L = 2/5\ M\ \upsilon_{cm}\ R$

γ. Η κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $K_\sigma = \frac{1}{2}\ L\ \omega$.

δ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K = 0{,}7\ M\ \upsilon^2_{cm}$.

ε. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K = \dfrac{35L^2}{8MR^2}$.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

4.251. Ένας άνθρωπος στέκεται πάνω σε περιστρεφόμενο κάθισμα που περιστρέφεται χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Ο άνθρωπος κρατάει σε κάθε χέρι του ένα σώμα μάζας m και έχει τα χέρια του σε έκταση. Κάποια στιγμή φέρνει τα χέρια του προς το σώμα του οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος υποτριπλασιάζεται.

α. Η στροφορμή του συστήματος θα παραμείνει σταθερή.

β. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος θα τριπλασιαστεί.

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα τριπλασιαστεί.

δ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με το έργο που κατανάλωσε ο άνθρωπος, για να φέρει τα χέρια του στη στάση προσοχής.

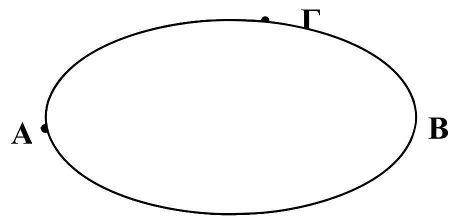
Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

4.252. Τη χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε ελεύθερη μια ομογενή σφαίρα ακτίνας R από την κορυφή ενός πλάγιου επιπέδου. Η σφαίρα κατεβαίνει χωρίς να ολισθαίνει. Συνεπώς

α. ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας αυξάνεται.
β. η στροφορμή της σφαίρας τη χρονική στιγμή t έχει μέτρο $\mathfrak{I}_s \cdot R \cdot t$, όπου $\mathfrak{I}_s$ είναι το μέτρο της στατικής τριβής.
γ. η σφαίρα κατεβαίνει με σταθερή στροφορμή γιατί ο ρυθμός μεταβολής της ισούται με μηδέν.
δ. με την πάροδο του χρόνου η στροφορμή της σφαίρας ελαττώνεται.

Με ποιο από τα παραπάνω συμφωνείτε. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

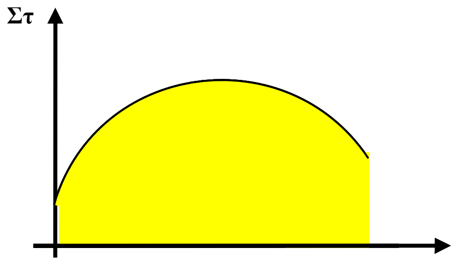
4.253. Ένας τεχνητός δορυφόρος κινείται στην ελλειπτική τροχιά που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, της οποίας η μία εστία είναι η Γη. Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου είναι



α. μεγαλύτερη στο σημείο A της τροχιάς.
β. μεγαλύτερη στο σημείο B της τροχιάς.
γ. μεγαλύτερη στο σημείο Γ της τροχιάς.
δ. σταθερή.

Να επιλέξετε το σωστό συμπλήρωμα και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

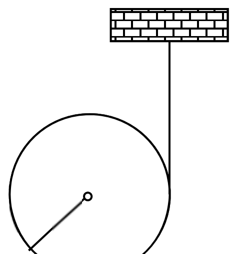
4.254. Ένας οριζόντιος ομογενής τροχός μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά ο τροχός είναι ακίνητος και τη χρονική στιγμή t = 0 του ασκείται συνισταμένη ροπή, παράλληλη στον άξονα, της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων εκφράζει (αριθμητικά)



α. τη γωνία στροφής του τροχού.
β. τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας λόγω περιστροφής.
γ. τη μεταβολή της στροφορμής του.
δ. την ισχύ της ροπής.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

4.255. Ο δίσκος του διπλανού σχήματος αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί από την ηρεμία και εκτελεί σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μια περιστροφική γύρω από το κέντρο της μάζας του και από μια μεταφορική με φορά προς τα κάτω. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και δε γλιστρά στο αυλάκι του δίσκου όπου το έχουμε τυλίξει. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$ όπου M η μάζα του δίσκου και R η ακτίνα του. Θεωρούμε ότι το νήμα παραμένει συνεχώς κατακόρυφο.



α. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου ισούται με

1. $\frac{MgR}{4}$ **2.** MgR **3.** $\frac{MgR}{3}$

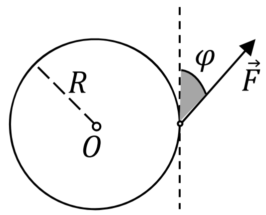
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

β. Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του δίσκου τη στιγμή που έχει ολοκληρωθεί η τρίτη περιστροφή του γύρω από το κέντρο μάζας ισούται με

1. $2\pi MgR$. **2.** $6\pi MgR$. **3.** $3\pi MgR$.

Να επιλέξετε την σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4.256. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος που έχει μάζα M, ακτίνα R και είναι αρχικά ακίνητος, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκείται συνεχώς στο ίδιο σημείο του δίσκου οριζόντια σταθερή δύναμη, η οποία σχηματίζει με την εφαπτομένη του δίσκου, στο σημείο εφαρμογής της δύναμης, γωνία φ = 60^0.



Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, υπολογισμένης ως προς το κέντρο του O, έχει μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση $\frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}F \cdot R$.

β. Το έργο της δύναμης από τη χρονική στιγμή t = 0 μέχρι τη στιγμή που ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά 90^0, ισούται με $\frac{\pi FR}{4}$.

γ. Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη στιγμή που έχει ολοκληρωθεί μία περιστροφή υπολογίζεται από τη σχέση $K = \pi FR$.

δ. Η ισχύς της δύναμης, τη στιγμή που ο δίσκος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω, υπολογίζεται από τη σχέση $P = \frac{FR\omega}{2}$.

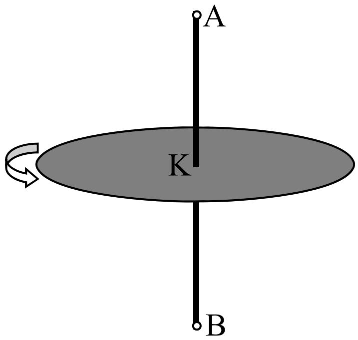
Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

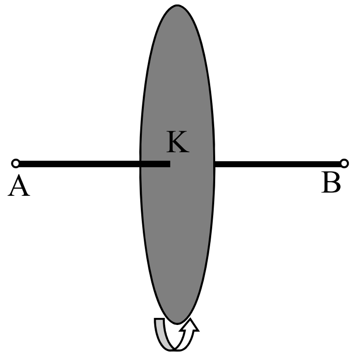
4.257. Να υπολογίσετε τη στροφορμή και την κινητική ενέργεια μιας συμπαγούς και ομογενούς σφαίρας μάζας m = 20 kg και ακτίνας R = 10 cm, η οποία περιστρέφεται γύρω από μια διάμετρό της με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω = 10 rad/s. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{2}{5}mR^2$.

4.258. Να βρείτε το μέτρο του spin της Γης, με τα εξής δεδομένα: Θεωρούμε τη Γη σφαίρα ακτίνας R με μέση (σταθερή) πυκνότητα ρ, περίοδο περιστροφής γύρω από τον άξονά της T και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$.

[Απ. $\frac{16\pi^2}{15}\frac{\rho R^5}{T}$]

4.259. Ο δίσκος του σχήματος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 rad/s γύρω από κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του K. Η φορά περιστροφής του είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Ασκούμε στα άκρα A και B του άξονα δύο κατάλληλες αντίρροπες δυνάμεις ίσων μέτρων, τον μετακινούμε ώστε να γίνει οριζόντιος, χωρίς να αλλάξει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου.





α. Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της ροπής του ζεύγους των δυνάμεων που προκάλεσε τη μεταβολή στη στροφορμή του δίσκου, αν αυτή διήρκησε 0,5 s.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο των δυνάμεων που αποτελούσαν το ζεύγος, αν ο άξονας του δίσκου αποτελεί τον βραχίονα του ζεύγους και είναι (AB) = 40 cm.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του: I = 0,2 kgm^2.

[Απ. α. $4\sqrt{2}kgm^2/s, \theta = 45^0$, β. $8\sqrt{2}\, Nm$, γ. $20\sqrt{2}\, N$]

4.260. Ένας οριζόντιος δίσκος που έχει μάζα M = 4 kg και ακτίνα R = 0,5 m, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούμε στο δίσκο εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου F_1 = 10 N, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αρχίζει να περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της στροφορμής του δίσκου κατά τον άξονα περιστροφής του είναι L_1 = 10 kgm^2/s.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

β. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F_1 από τη χρονική στιγμή t = 0 ως τη χρονική στιγμή t_1.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ασκούμε στο δίσκο μια ακόμη δύναμη F_2, σταθερού μέτρου εφαπτομενικά στο δίσκο, η οποία είναι ομοεπίπεδη με τη δύναμη F_1. Ο δίσκος επιβραδύνεται και τελικά σταματάει αφού εκτελέσει $N_2 = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές, από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται. Να υπολογίσετε

i. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

ii. την ισχύ της δύναμης F_2 τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του δίσκου ισούται με το $\frac{1}{4}$ της τιμής που είχε τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2} MR^2$.

[Απ. 20 rad/s, 100 J, 2,5 kgm^2/s^2, - 75 W]

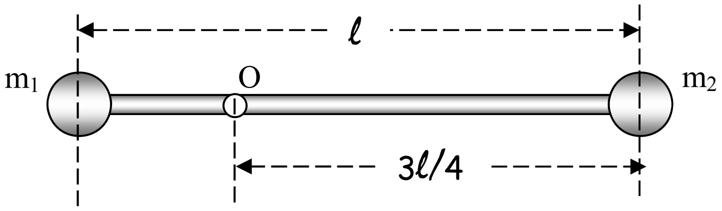
4.261. Στα άκρα μιας αβαρούς οριζόντιας ράβδου μήκους ℓ = 2 m βρίσκονται δύο σημειακές μάζες $m_1 = m_2$ = 1 kg. Το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 = 10 rad/s γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το μέσο O της ράβδου.

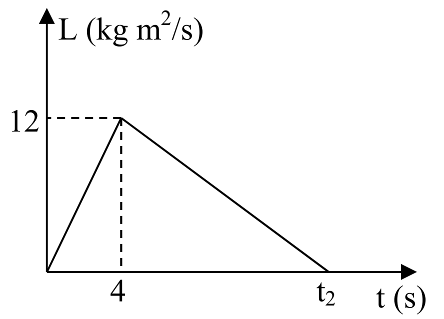
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των μαζών.

β. Με κάποιον εξωτερικό μηχανισμό, ο οποίος δε δημιουργεί ροπές, μετακινούμε ταυτόχρονα τις δύο σημειακές μάζες σε απόσταση d = 0,2 m από το μέσον της ράβδου. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.

4.262. Οριζόντιος ομογενής δίσκος στρέφεται με συχνότητα f_1 = 120 στρ/min γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ένα πουλί, μάζας m = 100 g, στέκεται σε απόσταση r = 20 cm από τον άξονα περιστροφής. Κάποια στιγμή το πουλί πετάει κατακόρυφα, οπότε η συχνότητα περιστροφής του δίσκου γίνεται f_2 = 150 στρ/min Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

4.263. Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μάζα M = 1,2 kg, μήκος ℓ = 1 m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος σε αυτή. Στα άκρα της ράβδου είναι κολλημένες δύο σημειακές μάζες m_1 = 2,8 kg και m_2 = 0,8 kg, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα





αρχικά είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή t = 0 αρχίζουν να ασκούνται στο σύστημα δύο δυνάμεις F_1 και F_2, των οποίων οι ροπές ως προς το O είναι σταθερές.
Τα μέτρα των ροπών τους ως προς το O είναι αντίστοιχα, τ_1 και τ_2 και συνδέονται με τη σχέση $\tau_1 = 4\ \tau_2$. Τη χρονική στιγμή t_1 = 4 s καταργείται η μία δύναμη. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

α. Ποια από τις δύο δυνάμεις καταργήθηκε τη χρονική στιγμή t_1 = 4 s;

β. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος ράβδος – μάζες τη χρονική στιγμή t_1 = 4 s.

γ. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που ακινητοποιήθηκε το σύστημα για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

δ. Να υπολογίσετε το έργο της ροπής της δύναμης που δεν καταργήθηκε, από τη χρονική στιγμή t = 0 ως τη χρονική στιγμή t_2.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο, δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

[Απ. F_1, 90 J, 16 s, - 120 J]

4.264. Υποθέτουμε ότι για κάποιο λόγο ο όγκος της γης αυξάνεται κατά 33,1%, χωρίς να μεταβληθεί η μάζα της. Πόσο % θα μεταβληθεί η διάρκεια της ημέρας; Δίνεται ότι η γη θεωρείται συμπαγής ομογενής σφαίρα με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά της $I = 2/5\ MR^2$, ο όγκος σφαίρας $V = 4/3\ \pi\ R^3$ και ότι $1{,}1^2 = 1{,}21$, $1{,}1^3 = 1{,}331$. [Απ. +21%]

4.265. Ένας ομογενής δίσκος μάζας M = 2 kg και ακτίνας R είναι με το επίπεδό του κατακόρυφο και στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ένα μικρό κομματάκι, το οποίο θεωρούμε σημειακό, αποσπάται από την περιφέρεια του δίσκου, όταν ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε αμέσως μετά να κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω στην κατακόρυφο του σημείου από το οποίο αποσπάστηκε. Το κομματάκι αυτό έχει μάζα m = 10 g και φτάνει μέχρι ύψος h = 20 cm και στη συνέχεια πέφτει. Η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, πριν την απόσπαση είναι $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$, ενώ μετά είναι $I_2 = \frac{1}{2}MR^2 - mR^2$. Να υπολογίσετε

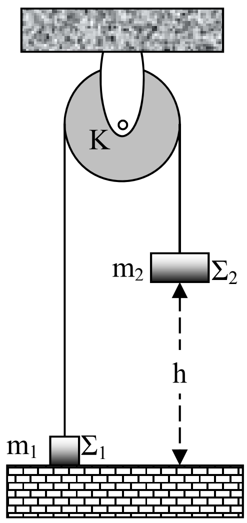
α. το % ποσοστό μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

β. την κινητική ενέργεια του δίσκου πριν την απόσπαση του κομματιού.

γ. την κινητική ενέργεια του δίσκου μετά την απόσπαση του κομματιού.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. [Απ. α. 0%, β. 2 J, γ. 1,98 J]

4.266. Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα R = 0,2 m και ροπή αδράνειας $I = 0{,}4\ kg{\cdot}m^2$ ως προς τον άξονα περιστροφής της. Στα άκρα του νήματος είναι προσδεμένα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1 = 2$ kg και $m_2 = 4$ kg αντίστοιχα. Το σύστημα διατηρείται αρχικά σε ισορροπία με το νήμα τεντωμένο, το σώμα $Σ_1$ στο δάπεδο και το σώμα $Σ_2$ σε ύψος h = 1,6 m από αυτό. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Να βρείτε λίγο πριν προσκρούσει το σώμα $Σ_2$ στο έδαφος:



α. την επιτάχυνση των σωμάτων.

β. την ταχύτητα των σωμάτων.

γ. τη στροφορμή της τροχαλίας και του συστήματος ως προς το κέντρο K της τροχαλίας.

δ. το ρυθμό με τον οποίο απορροφά ενέργεια (ισχύς) η τροχαλία και το σύστημα.

ε. το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

[Απ. α. $1{,}25\ m/s^2$, β. 2m/s, γ. $4\ kg{\cdot}m^2/s$, $6{,}4 kg{\cdot}m^2/s$, δ. 25J/s, 40J/s, ε. $2{,}5\ kg{\cdot}m^2/s^2$]

4.267. Ένας ομογενής δακτύλιος μάζας M και ακτίνας R = 0,5 m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ένα μικρό σώμα, αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m = \frac{M}{4}$, κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_0$ στη διεύθυνση της εφαπτομένης του δακτυλίου στο χαμηλότερο σημείο του και σφηνώνεται σε αυτόν.

Α. Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του δακτυλίου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, υπολογίζεται από τη σχέση $I = M R^2$.

Β. Να υπολογίσετε

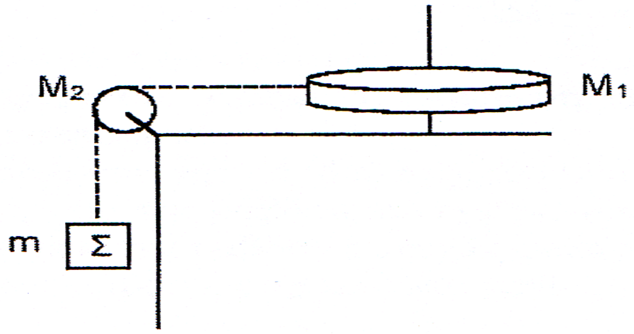
i. την ελάχιστη ταχύτητα $υ_{0,min}$ που πρέπει να έχει το μικρό σώμα, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελεί πλήρεις περιστροφές.

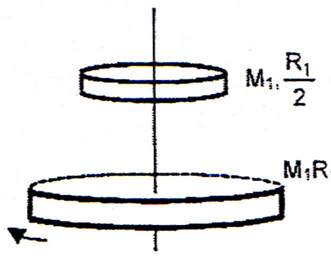
ii. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, αν το σώμα πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα $υ_0 = υ_{0,min}$.

iii. το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του μικρού σώματος που μετατράπηκε σε θερμότητα (θερμική και θερμότητα στο περιβάλλον), κατά τη διάρκεια της κρούσης. Η απάντηση εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα $υ_0$ του σώματος;
Θεωρούμε ότι η κρούση διαρκεί ελάχιστα και ότι $g = 10\ m/s^2$.

[Απ. Β. i. 10 m/s, ii. 4 rad/s, iii. 80%, Όχι]

4.268. Ένας ομογενής δίσκος μάζας $M_1 = 4\ kg$ και ακτίνας $R_1 = 25\ cm$ και μια τροχαλία μάζας $M_2 = 2kg$ και ακτίνας R_2 συνδέονται με αβαρές μη έκτακτο νήμα μεγάλου μήκους το οποίο εφάπτεται στην περιφέρεια του δίσκου M_1. Στο άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα Σ μάζας $m = 2\ kg$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





Το σώμα Σ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ο δίσκος και η τροχαλία περιστρέφονται χωρίς τριβές. Όταν το σώμα Σ έχει μετατοπιστεί κατά $h = 4{,}5\ m$, ένας δεύτερος ομογενής δίσκος μάζας M_1 και ακτίνας $R_1/2$ αφήνεται χωρίς κινητική ενέργεια πάνω στον πρώτο δίσκο, ενώ το νήμα κόβεται. Λίγο μετά οι δύο δίσκοι περιστρέφονται μαζί γύρω από τον ίδιο άξονα. Να υπολογίσετε

α. την επιτάχυνση α με την οποία μετατοπίζεται το σώμα Σ πριν την ένωση των δύο δίσκων.

β. τις τάσεις των νημάτων σε κάθε πλευρά της τροχαλίας πριν την ένωση των δύο δίσκων.

γ. την κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή (λίγο πριν) που πέφτει ο δεύτερος δίσκος.

δ. το έργο της ροπής της τάσης του νήματος στον πρώτο δίσκο στη διάρκεια της μετατόπισης του σώματος Σ κατά h.

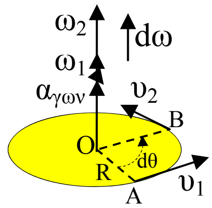
ε. τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος των δύο δίσκων αμέσως μετά την πτώση του δεύτερου δίσκου.

στ. τη θερμότητα που εκλύεται λόγω της ένωσης των δύο δίσκων.

Να θεωρήσετε ότι η διάρκεια της ένωσης των δύο δίσκων είναι αμελητέα. Η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ή μιας τροχαλίας μάζας Μ και ακτίνας R ως προς τον άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο τους που περνά από το κέντρο της μάζας τους είναι
$I_{cm} = 1/2\ MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ m/s^2$.

Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ



(υ2 > υ1)

- Γραμμική ταχύτητα (υ) • $\upsilon = \frac{ds}{dt}$ ▪ m/s
- Γωνιακή ταχύτητα (ω) • $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ▪ rad/s
- Ορισμός Γωνίας (θ) σε rad • $d\theta = \frac{ds}{R}$ ▪ (rad)
- Σχέση Γραμμικής - Γωνιακής ταχύτητας • $\upsilon = \omega R$
- Γωνιακή επιτάχυνση ($\alpha_{\gamma\omega\nu}$) • $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ▪ rad/s^2
- Γραμμική (επιτρόχια) επιτάχυνση (α_ε) • $a_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt}$ ▪ m/s^2
- Σχέση Γραμμικής - Γωνιακής επιτάχυνσης • $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- Κεντρομόλος επιτάχυνση • $a_k = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$ ▪ m/s^2

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

- $\vec{\omega} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\quad |\vec{\upsilon}| = \sigma\tau\alpha\theta.$
- $\Delta\theta = \omega t$ $\quad \Delta s = \upsilon t$

ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

- $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\quad |\vec{\alpha}_\varepsilon| = \sigma\tau\alpha\theta.$
- $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ $\quad \upsilon = \upsilon_0 + \alpha_\varepsilon t$
- $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ $\quad \Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\varepsilon t^2$

ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΩΝ

Α. Μεταφορική κίνηση

- ταχύτητα (υ) • $\upsilon = \frac{dx}{dt}$
- επιτάχυνση (α) • $a = \frac{d\upsilon}{dt}$
- Εξισώσεις κίνησης • Δx=υ t (α=0) ή $\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ▪ $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$

Β. ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

- Γωνία στροφής
  - $\theta = \frac{s}{R}$
- Αριθμός στροφών
  - $N = \frac{\theta}{2\pi}$
- Γωνιακή ταχύτητα
  - $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
  - $\upsilon = \omega R$
- Γωνιακή επιτάχυνση
  - $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
  - $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- Εξισώσεις κίνησης
  - $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
  - $\Delta\theta = \omega \Delta t$ ($\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$) ή $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$

Γ. ΚΥΛΙΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

(Σύνθετη κίνηση = Μεταφορική του cm και στροφική γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το cm)

Γ1. Με σταθερή ταχύτητα. ($\vec{\omega} = \sigma\tau\alpha\theta.$ και $\vec{\upsilon}_{cm} = \sigma\tau\alpha\theta.$)

- Ταχύτητα μεταφορικής κίνησης
  - $\vec{\upsilon}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} \equiv \vec{\upsilon}_{cm}$
- Ταχύτητα στροφικής κίνησης
  - $\vec{\upsilon}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} \equiv \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$
- Μετατόπιση (μεταφορική κίνηση)
  - $x = \upsilon_{cm} \cdot t = R \cdot \theta = \overset{\frown}{s}$
- Γωνία περιστροφής (περιστροφική κίνηση)
  - $\theta = \omega \cdot t$
- Ταχύτητα μεταφορικής και ταχύτητα περιστροφής
  - $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R$
- Ταχύτητα σύνθετης κίνησης *για τα σημεία της περιφέρειας...*
  - $\vec{\upsilon}_{\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta} = \vec{\upsilon}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + \vec{\upsilon}_{\sigma\tau\rho o\varphi}$
  - $\vec{\upsilon}_{\pi} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}$

Γ2. Με σταθερή επιτάχυνση ($\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$ και $\vec{\alpha}_{cm} = \sigma\tau\alpha\theta.$)

- Επιτάχυνση μεταφορικής κίνησης
  - $\vec{\alpha}_{\mu\varepsilon\tau} = \vec{\alpha}_{cm}$
- Επιτάχυνση στροφικής κίνησης
  - $\vec{\alpha}_{\sigma\tau\rho o\varphi} \equiv \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} = \vec{\alpha}_{\gamma\rho}$
- Γωνιακή Επιτάχυνση στροφικής κίνησης
  - $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$
- Σχέση επιτάχυνση μεταφορικής και στροφικής κίνησης
  - $\alpha_{\varepsilon} = \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- Επιτάχυνση σύνθετης κίνησης *για κάθε σημείο της περιφέρειας*
  - $\vec{\alpha}_{\sigma\upsilon\nu\theta} = \vec{\alpha}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} + \vec{\alpha}_{\sigma\tau\rho o\varphi} + \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}$
    $\Rightarrow \vec{\alpha}_{\pi} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} + \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}$

❖ ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ (τ_F)	$\tau_F = F\, d\, \eta\mu\varphi$	**N m**
❖ ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ	$\tau_\zeta = F\,\ell$ (ℓ = βραχίονας του ζεύγους).	
❖ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ	$\Sigma\tau = 0$ και $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.	
❖ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΜΑΖΑΣ	$I = mr^2$.	
❖ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ	$I = \sum \Delta m_i r_i^2$ ή $I = \int r^2 dm$	**kg m^2**.

- ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $I_{ολ}^z = I_1^z + I_2^z + I_3^z + \cdots$.
- ΘΕΜ. ΝΟΜΟΣ της ΣΤΡ. ΚΙΝΗΣΗΣ (Θ.Ν.Σ.Κ.) $Στ = I\, α_{γων}$.
- ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (L) σημειακού αντικειμένου ως προς την αρχή Ο συστ. αναφοράς $L = m\, υ\, r\, ημθ$ **kg m²/s.**
- ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (L) στερεού $L_z = I_z\, ω$.
- ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_ν$.
- ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ του ΘΝΣΚ $Στ = \frac{dL}{dt}$. **kg m²/s² = N m**
- ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ του ΘΝΣΚ (για σύστημα στερεών) $Στ_{εξ} = \frac{dL_{συστ}}{dt}$.
- ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ της ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ (για ΕΝΑ στερεό ή για σύστημα) ΑΝ $\boldsymbol{Στ_{εξ} = 0}$ τότε $\vec{L} = σταθ \Rightarrow \vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$.
- ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ σημειακού αντικειμένου $K = \frac{1}{2} m υ^2$. **J (joule)**
- ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα $K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot ω^2$
- ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ στερεού λόγω μεταφορικής κίνησης $K = \frac{1}{2} \cdot M \cdot υ_{cm}^2$.
- ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ στερεού λόγω σύνθετης κίνησης $K_{ολ} = K_{στρ} + K_{μετ} \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot ω^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot υ_{cm}^2$.
- ΕΡΓΟ ΡΟΠΗΣ $dW_τ = τ\, dθ$ (αν τ = σταθ. τότε $W_τ = τ\, θ$)
- ΙΣΧΥΣ ΡΟΠΗΣ $P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = τ \cdot ω$ **W (watt)**
- ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ $ΣW = K_{τελ,ολ} - K_{αρχ,ολ}$.
- ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ $E = K_{ολ} + U_{βαρ} + U_{ελ}$.
- ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ της ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ $E_{αρχ} = E_{τελ}$.
  ισχύει όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, π.χ Βάρος, Δύναμη ελατηρίου και όταν η τριβή που ασκείται είναι ΣΤΑΤΙΚΗ
- ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ ($\mathfrak{T}_s$) $\mathfrak{T}_s \le \mathfrak{T}_{s,max} = μ_s N$
  $W_{\mathfrak{T}s} = 0$

ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

- Γωνίας στροφής • $\frac{dθ}{dt} = ω$
- Γωνιακής ταχύτητας • $\frac{dω}{dt} = α_{γων}$
- Ταχύτητας κέντρου μάζας • $\frac{dυ_{cm}}{dt} = a_{cm}$
- Ορμής • $\frac{dP}{dt} = ΣF = m a_{cm}$
- Στροφορμής • $\frac{dL}{dt} = Στ = I α_{γων}$
- Έργου • $\frac{dW}{dt} = P = F\, υ\, συνθ$ [θ=γων(F, υ)]
- Δυναμικής ενέργειας βαρύτητας • $\frac{dU_g}{dt} = P_w = mgυσυνθ$ [θ=γων(g, υ)]
- Κινητικής ενέργειας • $\frac{dK}{dt} = ΣF \cdot υ \cdot συνθ$ [θ=γων(ΣF, υ)]
- Δυναμικής ενέργειας • $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$