2 ΚΥΜΑΤΑ

§2.1. Βασικές έννοιες

➢ **Η έννοια «ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΕΣΟ»:** Είναι κάθε υλικό μέσο, το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από σημειακά αντικείμενα (χωρίς διαστάσεις - γεωμετρικά σημεία, με μάζα), τα οποία καλύπτουν όλο το ελαστικό μέσο και καθένα από τα οποία συνδέεται με τα γειτονικά του με ελαστικές δυνάμεις. Το ελαστικό μέσο έχει ελαστικότητα σχήματος, δηλαδή μικρές παραμορφώσεις δεν αλλοιώνουν το σχήμα του.

Όταν το ελαστικό μέσο βρίσκεται σε ισορροπία, οι δυνάμεις που ασκούνται σε καθένα από τα σημειακά αντικείμενα έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν. Όταν για κάποιο λόγο διαταραχθεί η ισορροπία ενός σημειακού αντικειμένου, τότε σε αυτό ασκείται από τα γειτονικά του σημεία, συνισταμένη δύναμη της μορφής $\Sigma F = - Dx$, η οποία τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας του.

Ταυτόχρονα το σημειακό αντικείμενο ασκεί και αυτό ελαστικές δυνάμεις στα γειτονικά του σημεία και αυτά με τη σειρά τους στα γειτονικά τους, με αποτέλεσμα η διαταραχή που υπέστη το ένα σημείο να διαδοθεί με την πάροδο του χρόνου σε όλο το ελαστικό μέσο.

Ένα ελαστικό μέσο χαρακτηρίζεται ΟΜΟΓΕΝΕΣ όταν έχει σταθερή πυκνότητα σε όλη την έκτασή του και ΙΣΟΤΡΟΠΟ όταν η διαταραχή διαδίδεται με την ίδια σταθερή ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Το ελαστικό μέσο ανάλογα με το σχήμα του χαρακτηρίζεται ως ΓΡΑΜΜΙΚΟ (π.χ. τεντωμένο νήμα) ή ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ (π.χ. επιφάνεια ενός υγρού) ή ΧΩΡΟΥ (π.χ. ο αέρας)

§2.2 Η έννοια « ΚΥΜΑ».

Στην καθημερινή ζωή η έννοια κύμα χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο από ότι στη Φυσική (π.χ. θαλάσσιο κύμα ή κύμα καύσωνα).

Στη φυσική με την έννοια ΚΥΜΑ εννοούμε τη διάδοση μιας διαταραχής, έτσι ώστε να μεταφέρεται ενέργεια και ορμή με ορισμένη ταχύτητα, αλλά όχι ύλη.

Για να δημιουργηθεί ένα κύμα χρειάζεται η ΠΗΓΗ του, ένα σημείο δηλαδή το οποίο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, ώστε η ενέργεια που του προσφέρεται από το διεγέρτη να μεταβιβάζεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Επομένως τα σημεία στα οποία φτάνει το κύμα θα εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση ορισμένης ενέργειας.

Αν η πηγή του κύματος εκτελεί (εξαναγκασμένη) αρμονική ταλάντωση, σε ορισμένη διεύθυνση, τότε το κύμα χαρακτηρίζεται ως ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ. Στην περίπτωση αυτή, το πλάτος, η συχνότητα - περίοδος – γωνιακή συχνότητα της πηγής καθορίζουν το πλάτος, τη συχνότητα - περίοδο – γωνιακή συχνότητα του κύματος. Η διεύθυνση προς την οποία διαδίδεται η διαταραχή που δημιουργεί η πηγή είναι η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.

Αν η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι ΚΑΘΕΤΗ στη διεύθυνση ταλάντωσης της πηγής του, άρα και όλων των σημείων του ελαστικού μέσου, τότε το κύμα χαρακτηρίζεται ως ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΚΥΜΑ, ενώ αν διαδίδεται παράλληλα προς τη διεύθυνση ταλάντωσης της πηγής του, χαρακτηρίζεται ως ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΚΥΜΑ (διάμηκες).

Αν το κύμα για να διαδοθεί απαιτεί την ύπαρξη ελαστικού μέσου, τότε χαρακτηρίζεται ως ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΚΥΜΑ (π.χ. υδατηρά, σεισμικά, ηχητικά κλπ).

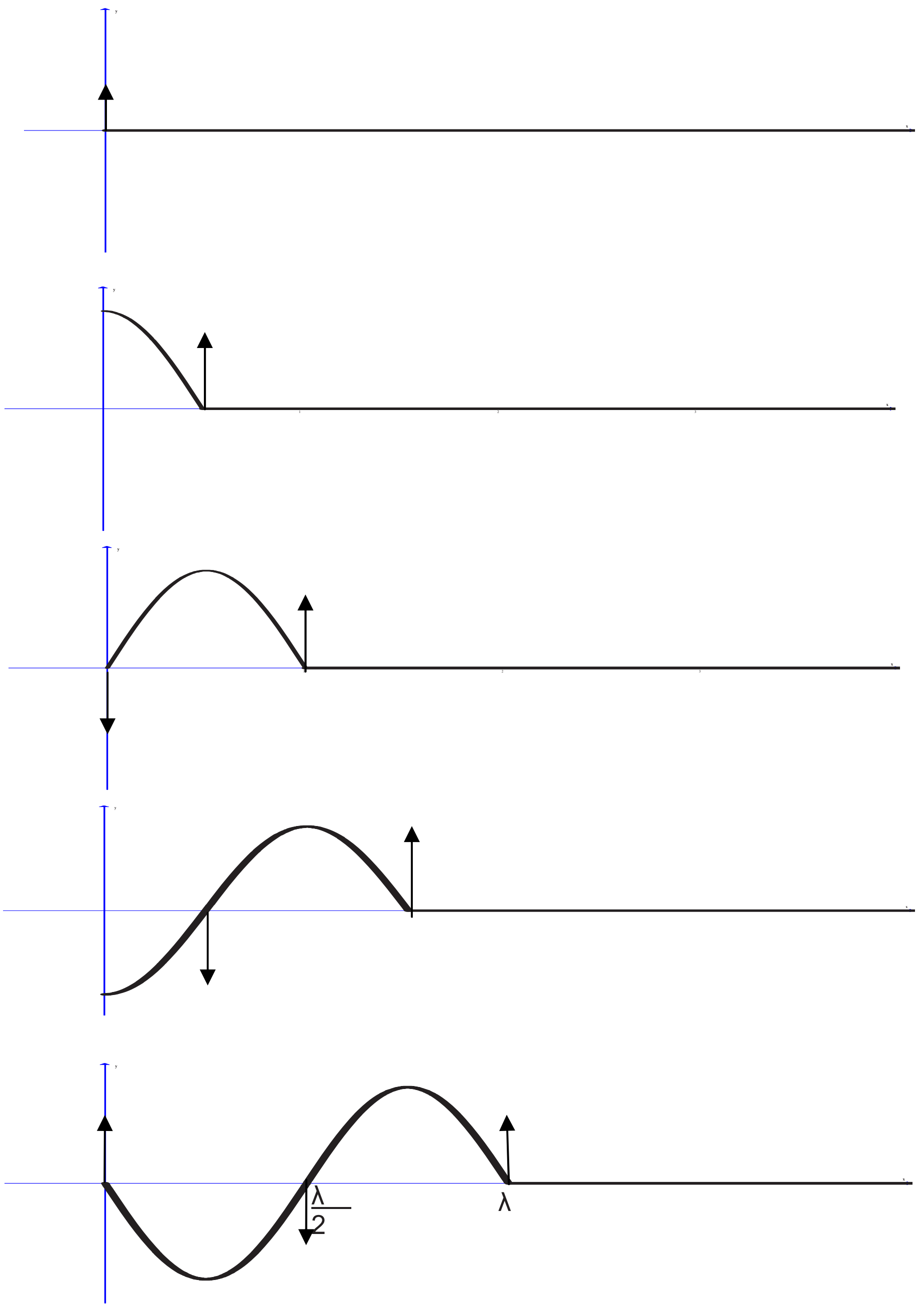
Τα κύματα που παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα ή επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία ή από αποδιεγέρσεις ατόμων, ονομάζονται ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα για τη διάδοσή τους ΔΕΝ απαιτούν την ύπαρξη ελαστικού μέσου, αλλά διαδίδονται ΚΑΙ στο ΚΕΝΟ.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΤΑΧΥΤΗΤΑ (υ) του κύματος: Ορίζεται από τη σχέση $\upsilon = \frac{x}{t}$, και είναι σταθερή σε ισότροπο ελαστικό μέσο. Εκφράζει την ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής προς ορισμένη κατεύθυνση. **Εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου και όχι από την πηγή του κύματος** (π.χ. το πόσο γρήγορα ταλαντώνεται). Επομένως η ταχύτητα του κύματος μεταβάλλεται μόνο αν αλλάξει το ελαστικό μέσο. (Το φαινόμενο της αλλαγής της ταχύτητας του κύματος, όταν αλλάζει το μέσο διάδοσης, ονομάζεται ΔΙΑΘΛΑΣΗ). Η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να υπάρξει, σύμφωνα με το αίτημα της θεωρίας της σχετικότητας, και ισούται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3 \cdot 10^8 \, m/s$.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (f) του κύματος: Είναι η κοινή συχνότητα ταλάντωσης της πηγής και των σημείων του ελαστικού μέσου. **Εξαρτάται αποκλειστικά από το πόσο γρήγορα ταλαντώνεται η πηγή και όχι από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου.** Αυτό σημαίνει ότι αν κατά την πορεία του το κύμα αλλάξει μέσο διάδοσης, θα αλλάξει η ταχύτητά του αλλά όχι η συχνότητά του. Με άλλα λόγια κατά το φαινόμενο της διάθλασης ΔΕΝ μεταβάλλεται η συχνότητα του κύματος. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για την περίοδο Τ και τη γωνιακή συχνότητα ω.

ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ (λ) του κύματος: Είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο ίσο με την περίοδο Τ του κύματος (δηλαδή το χρόνο για μία πλήρη ταλάντωση της πηγής του). Το μήκος κύματος εξαρτάται ΚΑΙ από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου αλλά ΚΑΙ από την πηγή του κύματος.



Αν στον ορισμό της ταχύτητας του κύματος αντικαταστήσουμε το χρόνο t με την περίοδο, τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε τη μετατόπιση x με το μήκος κύματος. Δηλαδή για t = T είναι x = λ. Άρα

$\upsilon = \frac{x}{t} \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow$

$\boxed{\lambda = \upsilon \cdot T}$. (2.1)

Επειδή $T = \frac{1}{f}$, με αντικατάσταση προκύπτει τελικά ότι

$\boxed{\upsilon = \lambda \cdot f}$ (2.2)

Τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η ταλάντωση της πηγής το κύμα έχει προχωρήσει κατά λ.

➢ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Θα αναφερθούμε σε αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου. Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση, η οποία να περιγράφει την κατάσταση κάθε σημείου του ελαστικού μέσου, κάθε χρονική στιγμή. Είναι προφανές ότι για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να αναφερθούμε σε ένα σύστημα αναφοράς και να ορίσουμε την αρχή μέτρησης των χρόνων (t = 0), η οποία θα είναι κοινή για όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου.

Θεωρούμε ότι το γραμμικό ελαστικό μέσο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα x΄x, ότι η διεύθυνση ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι ο άξονας y΄y που είναι κάθετος στον x΄x και ως αρχή Ο (x = 0) ένα σημείο του ελαστικού μέσου το οποίο τη στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του (y = 0) κινούμενο με θετική ταχύτητα. Η εξίσωση που θα περιγράφει την ταλάντωση της αρχής Ο, σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες που θεωρήσαμε, είναι y = A ημωt. Κάθε σημείο του ελαστικού μέσου θα εκτελεί, επομένως, αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y = A ημωt΄. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ελαστικού μέσου, στη θέση με συντεταγμένη x, αυτό θα έχει την ίδια απομάκρυνση y με αυτήν που είχε η αρχή Ο, πριν από χρόνο ίσο με το χρόνο τ που χρειάστηκε το κύμα για να φτάσει στο Μ, δηλαδή πριν από χρόνο $\tau = \frac{x}{\upsilon}$. Επομένως για $t' = t - \tau \Leftrightarrow t' = t - \frac{x}{\upsilon}$ η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ γράφεται $y = A\eta\mu\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right]$ (2.3)

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση για την ταλάντωση του τυχαίου σημείου Μ είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, της θέσης x και της χρονικής στιγμής t. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί την εξίσωση του αρμονικού κύματος. Μπορούμε να τη γράψουμε και με άλλες μορφές, αντικαθιστώντας τα ω και υ. Π.χ. αρχικά με αντικατάσταση του $\omega = \frac{2\pi}{T}$, έχουμε $y = A\eta\mu\left[\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right] \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon \cdot T}\right)$ και με τη βοήθεια της 2.1, παίρνουμε:

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \qquad (2.4)$$

Σχόλιο: Όταν θέλουμε η εξίσωση αυτή να αναφέρεται

α. σε συγκεκριμένο σημείο του ελαστικού μέσου (π.χ. στο σημείο στη θέση x_1 = 10 m) ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ t ή

β. ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ του ελαστικού μέσου, μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή (π.χ. τη στιγμή t_1 = 1 s), πρέπει να προσέξουμε

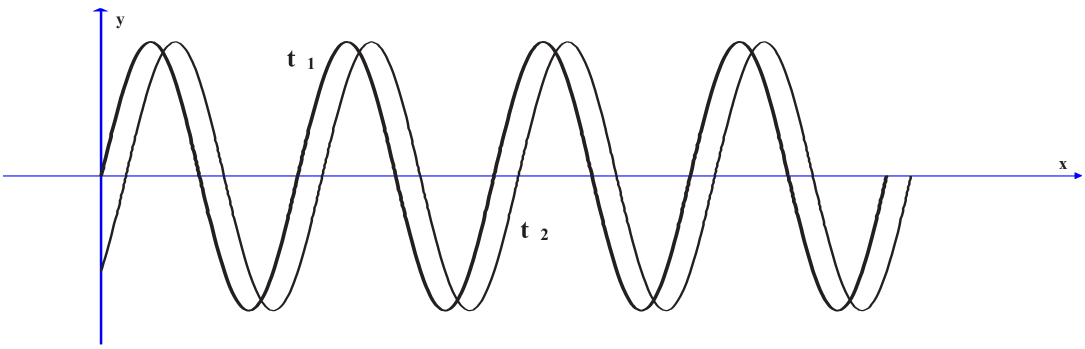
1. αν το κύμα φτάνει στην αρχή Ο τη χρονική στιγμή t = 0 ή
2. αν το κύμα έχει διαδοθεί σε όλο το ελαστικό μέσο.

Στην περίπτωση α1 πρέπει να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στη δοσμένη θέση x_1 = 10 m, με τη βοήθεια της σχέσης $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \tau = \frac{x_1}{\upsilon}$. Συνεπώς μέχρι τη στιγμή αυτή το σημείο είναι ακίνητο.

Στην περίπτωση β1 πρέπει να υπολογίσουμε σε πόση απόσταση από την αρχή Ο έχει διαδοθεί το κύμα τη δοσμένη χρονική στιγμή, με τη βοήθεια της ίδιας σχέσης $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \upsilon \cdot t_1$. Συνεπώς μετά τη θέση αυτή, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου θα είναι ακίνητα.

Για την περίπτωση 2 δε χρειάζεται να εξετάσουμε κάτι.

Στην περίπτωση **α.** η εξίσωση του κύματος δίνει την απομάκρυνση του συγκεκριμένου σημείου από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο, ενώ στην περίπτωση **β.** δίνει την απομάκρυνση ΟΛΩΝ των σημείων του ελαστικού μέσου, στα οποία έχει φτάσει το κύμα, από τη θέση ισορροπίας του, τη δοσμένη χρονική στιγμή. Η απεικόνιση αυτή είναι το λεγόμενο ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ του κύματος (δηλαδή μια φωτογραφία του).



Δύο κοντινά στιγμιότυπα κύματος ($t_2 > t_1$)

<u>ΦΑΣΗ Φ</u> του κύματος ονομάζεται το τόξο του ημιτόνου της απομάκρυνσης, δηλαδή η φάση είναι $\Phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, και είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών. (2.5)

Αν το κύμα διαδίδεται κατά την ΑΡΝΗΤΙΚΗ φορά του άξονα x΄x, τότε η φάση ταλάντωσης του σημείου Μ προηγείται χρονικά από τη φάση ταλάντωσης της αρχής Ο, κατά χρόνο x/υ, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ θα γράφεται στη μορφή

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.6)$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ (V)

Δεν πρέπει να συγχέεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος (υ).

Υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης 2.3: $V = \omega A\sigma\upsilon\nu\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right]$ ή

$$V = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.7)$$

Παράδειγμα 2.1. Για ένα αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x΄x, να υπολογίσετε

Α. τη διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, απόσταση ίση με d, την ίδια χρονική στιγμή.

Β. τη διαφορά φάσης της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, μεταξύ δύο διαφορετικών χρονικών στιγμών t_1 και t_2. ($t_2 > t_1$).

Λύση

Α. Έστω Μ και Ν δύο σημεία του ελαστικού μέσου, στις θέσεις x_1 και x_2,με $x_2 > x_1$, αντίστοιχα. Για τη φάση του σημείου Μ ισχύει $\Phi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)$ και για τη φάση του Ν ισχύει $\Phi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)$. Επειδή $x_1 < x_2$, είναι $\Phi_1 > \Phi_2$.

Το σημείο Μ ως κοντινότερο στην αρχή Ο ταλαντώθηκε περισσότερο χρόνο από ότι το Ν, επομένως έχει μεγαλύτερη φάση. Με τη βοήθεια της παρατήρησης αυτής καταλαβαίνουμε ότι **ένα κύμα διαδίδεται πάντα με κατεύθυνση από σημεία με μεγάλη φάση προς σημεία με μικρότερη φάση**.

Είναι $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda} \Rightarrow \left|\Delta\Phi\right| = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d$

(2.1.1)

Β. Για ένα σημείο του ελαστικού μέσου στη θέση x, δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές ισχύει $\Phi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ και $\Phi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Επειδή $t_2 > t_1$, είναι και $\Phi_2 > \Phi_1$.

$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{t_1}{T}\right) = 2\pi\frac{t_2-t_1}{T} \Rightarrow \Delta\Phi = \omega\cdot\Delta t$. (2.1.2)

****Παράδειγμα 2.2.** ΣΥΜΦΩΝΙΑ και ΑΝΤΙΘΕΣΗ φάσης.

Α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση Δx μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία την ίδια χρονική στιγμή βρίσκονται σε ίσες απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται με ίσες ταχύτητες (κατά μέτρο και κατεύθυνση), δίνεται από τη σχέση

$\Delta x = k\cdot\lambda, \quad k\in\mathbb{Z}$ (συμφωνία φάσης) (2.2.1)

Β. Να αποδείξετε ότι η απόσταση Δx μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία την ίδια χρονική στιγμή βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται με αντίθετες ταχύτητες , δίνεται από τη σχέση

$\Delta x = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}$ (αντίθεση φάσης) (2.2.2)

Λύση

Α. Έστω Μ και Ν δύο σημεία του ελαστικού μέσου, στις θέσεις x_1 και x_2, με $x_2 > x_1$, αντίστοιχα. Για το σημείο Μ με τη βοήθεια των σχέσεων 2.4 και 2.7, έχουμε:

$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)$ και $V_1 = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)$. Όμοια για το σημείο Ν έχουμε:

$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)$ και $V_2 = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)$. Είναι $y_1 = y_2$ και $V_1 = V_2$.

$$\left.\begin{array}{l} A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right) \\ \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)= \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right) \\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)= \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\end{array}\right\rangle \stackrel{1^o}{\Rightarrow}$$

$$\cancel{2\pi}\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=\cancel{2}k\cancel{\pi}+\cancel{2\pi}\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\Rightarrow \frac{x_2}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda}=k\Rightarrow \Delta x=k\lambda,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Β. Είναι $y_1 = -y_2$ και $V_1 = -V_2$.

$$\left.\begin{array}{l} A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=-A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right) \\ \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=-\omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)= -\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right) \\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)= -\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\end{array}\right\rangle \stackrel{3^o}{\Rightarrow}$$

$$2\cancel{\pi}\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=(2k+1)\cancel{\pi}+2\cancel{\pi}\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x_2}{\lambda}\right)\Rightarrow 2\left(\frac{x_2}{\lambda}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=2k+1\Rightarrow \Delta x=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Αν στη σχέση 2.1.1 αντικαταστήσουμε τη 2.2.1 έχουμε $\Delta\Phi=\frac{2\pi}{\lambda}k\cdot\lambda\Rightarrow\Delta\Phi=2k\pi$. Δηλαδή η διαφορά φάσης μεταξύ 2 σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π.

Αν στη σχέση 2.1.1 αντικαταστήσουμε τη 2.2.2 έχουμε $\Delta\Phi=\frac{2\pi}{\lambda}(2k+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\Delta\Phi=(2k+1)\pi$. Δηλαδή η διαφορά φάσης μεταξύ 2 σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης είναι περιττό πολλαπλάσιο του π.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Από τη σχέση 2.2.1 για k = 1, προκύπτει ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης είναι ίση με ένα μήκος κύματος. **Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το μήκος κύματος και σαν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης.**

Παράδειγμα 2.3. Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα x΄x, διαδίδεται κύμα με ταχύτητα 50 m/s. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα ένα σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή t = 0 και το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y = 0,04 ημ4πt (S.I.).

α. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να ταλαντώνεται ένα σημείο Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται σε απόσταση 500 m από το σημείο Ο;

β. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης του σημείου Μ και της αρχής Ο την ίδια χρονική στιγμή.

γ. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t = 20 s.

δ. Ποια είναι η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t = 20 s;

ε. Ποια είναι η μεταβολή φάσης του σημείου Μ μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 = 20 s και t_2 = 30 s;

<u>Λύση</u>

α. Για να φτάσει το κύμα από τη θέση x = 0 στη θέση x = 500 m, απαιτείται χρόνος

$$\tau = \frac{x}{\upsilon} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \tau = \frac{500m}{50m/s} \Rightarrow \tau = 10\,s\,.$$

β. Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημείων Ο και Μ θα υπολογιστεί από τη σχέση 2.1.1 του παραδείγματος 2.1: $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d$. Το μήκος κύματος λ θα υπολογιστεί από τη σχέση 2.1: λ = υ T.

Είναι ω = 4π rad/s και $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,5\,s$. Άρα λ = 50•0,5 m➔λ = 25 m.

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{25}\cdot 500 \Rightarrow \Delta\Phi = 40\pi\ (rad).$$

γ. Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα είναι: $y = 0,04\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{25}\right)\ (S.I.)$

(2.3.1)

Για x = 500 m και t = 20 s, παίρνουμε:

$$y = 0,04\eta\mu 2\pi\left(2\cdot 20 - \frac{500}{25}\right) = 0,04\eta\mu 2\pi(40-20) \Rightarrow\ y = 0,04\eta\mu 40\pi \Rightarrow y = 0\,.$$

δ. Για x = 500 m η εξίσωση 2.3.1 γράφεται:

$$y = 0,04\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{500}{25}\right) \Rightarrow y = 0,04\eta\mu(4\pi t - 40\pi)(S.I.)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας της αρμονικής ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

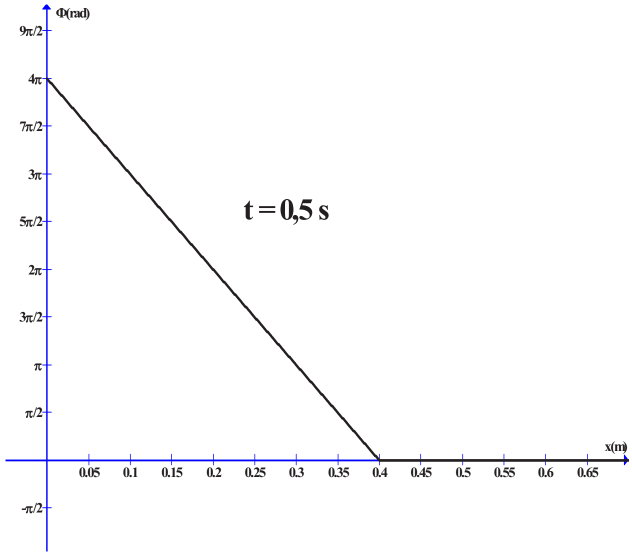
$V = 0,04\cdot 4\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(4\pi t - 40\pi) \Rightarrow V = 0,16\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(4\pi t - 40\pi)\ (S.I)$, η οποία για t = 20 s δίνει $V = 0,16\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(4\pi\cdot 20 - 40\pi) \Rightarrow V = 0,16\pi\cdot\sigma\upsilon\nu 40\pi \Rightarrow V = 0,16\pi\,m/s$

Η επιτάχυνση της αρμονικής ταλάντωσης του Μ συνδέεται με την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας με τη σχέση α = - ω^2•y. Επειδή όμως τη χρονική στιγμή t = 20 s είναι y = 0, θα είναι και α = 0.

ε. Η διαφορά φάσης θα υπολογιστεί από τη σχέση 2.1.2 του παραδείγματος 2.1. Είναι

$$\Delta\Phi = \omega\cdot\Delta t \overset{(S.I)}{\Rightarrow} \Delta\Phi = 4\pi(30-20) \Rightarrow \Delta\Phi = 40\pi\ (rad)$$

Παράδειγμα 2.4. Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα x΄x, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα ένα σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή t = 0 και το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y = 0,02 ημωt (S.I.). Στο διάγραμμα του σχήματος δίνεται η μεταβολή της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x, τη χρονική στιγμή t = 0,5 s.



α. Να υπολογίσετε την περίοδο και το μήκος κύματος του κύματος.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0,625 s.
δ. Να σχεδιάσετε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ενός σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση 0,25 m, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α. Η εξίσωση ταλάντωσης της αρχής O έχει φάση Φ = ωt, επομένως το κύμα που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση θα έχει φάση $\Phi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Σύμφωνα με τη δοσμένη γραφική παράσταση τη χρονική στιγμή t = 0,5 s, για x = 0 είναι Φ = 4π (rad), ενώ για x = 0,4 m είναι Φ = 0. Επομένως:

$\Gamma\iota\alpha\ x = 0\ \kappa\alpha\iota\ t = 0,5s : 4\pi = 2\pi\frac{0,5}{T} \Rightarrow T = 0,25s$, άρα ω=8π rad/s και

$\gamma\iota\alpha\ x = 0,4\ \kappa\alpha\iota\ t = 0,5s : 0 = 2\pi\left(\frac{0,5}{0,25}-\frac{0,4}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 0,2m$.

β. Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος: $y = 0,02\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,25}-\frac{x}{0,2}\right) \Rightarrow$

$$y = 0,02\cdot\eta\mu 2\pi(4t-5x)\ (S.I) \qquad (2.4.1)$$

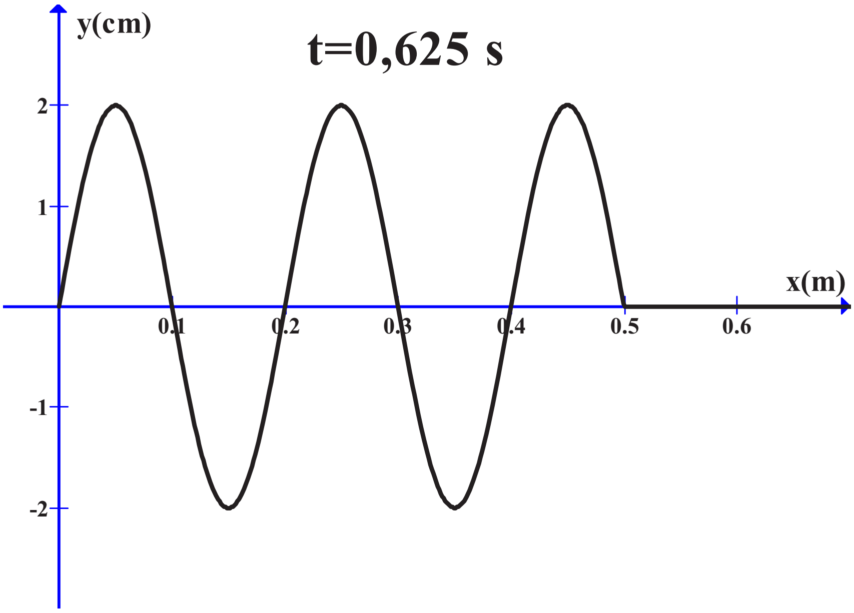
γ. Το στιγμιότυπο είναι η γραφική παράσταση y = f(x) για t = σταθερό.
Για t = 0,625 s η εξίσωση του κύματος 2.4.1 γίνεται: $y = 0,02\cdot\eta\mu 2\pi(4\cdot 0,625-5x) \Rightarrow$

$y = 0,02\cdot\eta\mu 2\pi(2,5-5x) \Rightarrow y = 0,02\cdot\eta\mu(5\pi-10\pi x) \Rightarrow y = 0,02\cdot\eta\mu(\cancel{4\pi}+\pi-10\pi x) \Rightarrow$

$y = 0,02\cdot\eta\mu(\pi-10\pi x) \Rightarrow \boxed{y = 0,02\cdot\eta\mu 10\pi x\ (S.I.)}$ (2.4.2)

Επειδή το κύμα φτάνει στην αρχή O τη χρονική στιγμή t = 0, πρέπει να βρούμε μέχρι ποια θέση πρόλαβε να φτάσει τη δοσμένη χρονική στιγμή t = 0,625 s. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του κύματος από τη σχέση $\lambda = \upsilon T \Rightarrow \upsilon = \frac{0,2m}{0,25s} \Rightarrow \upsilon = 0,8m/s$

Από τη σχέση $\Delta x = \upsilon\cdot\Delta t \Rightarrow x = 0,8\cdot 0,625 \Rightarrow x = 0,5m$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε σε άξονες y – x τη συνάρτηση 2.4.2



ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην περίπτωση αυτή πρέπει οπωσδήποτε το **τελευταίο** σημείο να έχει απομάκρυνση y = 0.

δ. Εδώ ζητείται η γραφική παράσταση y = f(t) για x = σταθερό.
Για x = 0,25 m η εξίσωση του κύματος 2.4.1 γίνεται: $y=0,02\cdot\eta\mu 2\pi\left(4\cdot t-5\cdot 0,25\right)\Rightarrow$

$$y=0,02\cdot\eta\mu\left(8\pi\cdot t-10\pi\cdot 0,25\right)\Rightarrow y=0,02\cdot\eta\mu\left(8\pi\cdot t-2,5\pi\right)\Rightarrow y=0,02\cdot\eta\mu\left(8\pi t-\cancel{2\pi}-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

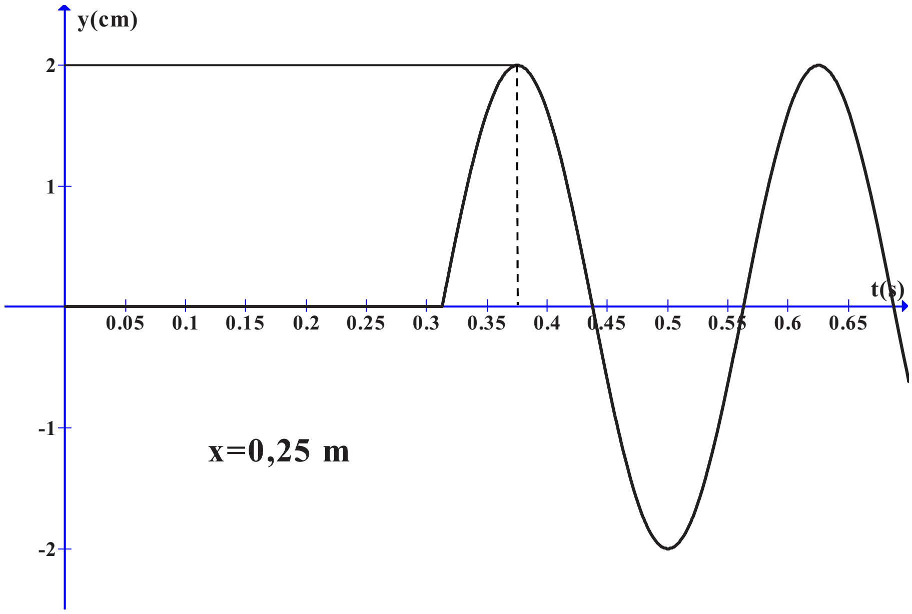
$$y=0,02\cdot\eta\mu\left(8\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-0,02\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-8\pi t\right)\Rightarrow\boxed{y=-0,02\cdot\sigma\upsilon\nu 8\pi t\ (S.I.)} \qquad (2.4.3)$$

Επειδή το κύμα φτάνει στην αρχή Ο τη χρονική στιγμή t = 0, πρέπει να βρούμε ποια χρονική στιγμή φτάνει το κύμα στη δοσμένη θέση x = 0,25 m. Από τη σχέση $\Delta x=\upsilon\cdot\Delta t\Rightarrow\tau=\dfrac{0,25m}{0,8m/s}\Rightarrow\tau=0,3125s$.

Η εξίσωση 2.4.3 ισχύει για $t\geq 0,3125s$. Πριν τη χρονική στιγμή τ το σημείο ήταν ακίνητο. Πρέπει για t = 0,3125 s να είναι y = 0. Δηλαδή, πρέπει τη χρονική στιγμή t = 0,3125 s, το σημείο του ελαστικού μέσου στη θέση x = 0,25 m να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Επομένως τη χρονική στιγμή τ + T/4 πρέπει να βρίσκεται σε κάποια ακραία θέση. Για να βρούμε σε ποια, αρκεί να αντικαταστήσουμε στην 2.4.3 το t με τ + T/4 = 0,3125 + 0,25/4 = 0,375 s. Είναι

$$y=-0,02\cdot\sigma\upsilon\nu\left(8\pi\cdot 0,375\right)=-0,02\cdot\sigma\upsilon\nu 3\pi\Rightarrow y=+0,02m$$

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε σε άξονες y – t τη συνάρτηση 2.4.3



ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην περίπτωση αυτή πρέπει οπωσδήποτε το **πρώτο** σημείο να έχει απομάκρυνση y = 0.

✓ **ΚΥΜΑ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ

Αν η επιλογή της αρχής Ο του άξονα x΄x και η αρχή των χρόνων γίνουν έτσι, ώστε η ταλάντωση της αρχής Ο του άξονα να έχει αρχική φάση, τότε αυτή η αρχική φάση θα συνοδεύει όλο το κύμα. Αν, επομένως, η ταλάντωση της αρχής Ο περιγράφεται από την εξίσωση $y = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \varphi_0\right)$, με $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, τότε η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x΄x θα είναι

$$y = A \cdot \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \text{ ή } y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \quad (2.8)$$

Αν το κύμα έχει διαδοθεί σε όλο το ελαστικό μέσο και απλώς η δική μας επιλογή των αρχικών συνθηκών ήταν αυτή που «δημιούργησε» την αρχική φάση, τότε η μελέτη του κύματος δεν παρουσιάζει κάτι το ιδιαίτερο.

Αν όμως το κύμα φτάνει στην αρχή Ο κάποια στιγμή κοντά στη χρονική στιγμή t = 0, τότε (κανονικά) πρέπει να δοθεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t = 0. (Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που το κύμα φτάνει στην αρχή Ο ώστε να έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \pi$). Στην περίπτωση αυτή το κύμα τη στιγμή t = 0 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x_0 και επομένως για τη μετατόπιση του κύματος τη χρονική στιγμή t, θα ισχύει $\Delta x = \upsilon\,\Delta t$ ή $x - x_0 = \upsilon\, t$ ή $x = x_0 + \upsilon\, t$, όπου x η θέση στην οποία έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t.

Αν Σ είναι το τελευταίο σημείο στο οποίο έχει διαδοθεί το κύμα τη στιγμή t = 0 και βρίσκεται στη θέση $x_Σ$, τότε η φάση του σημείου Σ εκείνη τη στιγμή θα είναι 0 ή π. Θα είναι μηδέν όταν τις αμέσως επόμενες χρονικές στιγμές θα βρεθεί σε θετικές απομακρύνσεις (V > 0), διαφορετικά θα είναι π.
Αν μεταξύ της αρχής Ο και του Σ υπάρχουν και άλλα σημεία που τη χρονική στιγμή t = 0 έχουν y = 0, τότε ονομάζουμε Κ το πλησιέστερο στην αρχή Ο από τα σημεία αυτά, το οποίο βρίσκεται στη θέση, έστω, x_K. Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Ο και Κ είναι $φ_0$, αν τις αμέσως επόμενες χρονικές στιγμές το Κ βρεθεί σε θετικές απομακρύνσεις (V > 0), διαφορετικά θα είναι $φ_0$ - π. Η σχέση 2.1.1 γράφεται

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x \Rightarrow \Phi_{(O)} - \Phi_{(K)} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_K - \cancel{x_O}\right) \Rightarrow \Phi_{(O)} - \Phi_{(K)} = \frac{2\pi}{\lambda}x_K \quad (2.9)$$

Με δεδομένο το $x_Σ$, το x_K εκφράζεται σε συνάρτηση με το μήκος κύματος από το στιγμιότυπο. (π.χ. $x_K = x_\Sigma - \frac{\lambda}{2}$). Αντικαθιστούμε στη 2.9 το x_K και το $\Phi_{(O)} - \Phi_{(K)}$ με $φ_0$ ή $φ_0$ – π και λύνουμε ως προς το άγνωστο μέγεθος (συνήθως το λ).

Παράδειγμα 2.5. Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα x΄x, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με πλάτος 10 cm, μήκος κύματος 20 cm και ταχύτητα 2 m/s. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του και τη χρονική στιγμή t = 0 φτάνει στο Ο, αρχή του άξονα x΄x. Για το σημείο Ο δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την αρνητική φορά.
α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
γ. Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, τη χρονική στιγμή t = 0,25 s.

Λύση

Δίνονται: Α = 0,1 m, λ = 0,2 m και υ = 2 m/s.
Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι $T = \frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{0,2m}{2m/s} \Rightarrow T = 0,1s$ και η γωνιακή συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,1s} \Rightarrow \omega = 20\pi\, rad/s$.

α. Για το Ο δίνεται ότι για t = 0 είναι y = 0 και V < 0. Υπολογίζουμε την αρχική φάση της ταλάντωσής του

$$\left.\begin{aligned} y &= A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ V &= \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{aligned} A\eta\mu(\cancel{\omega t} + \varphi_0) &= 0 \\ \omega A\sigma\upsilon\nu(\cancel{\omega t} + \varphi_0) &< 0 \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{aligned} \eta\mu\varphi_0 &= 0 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 &< 0 \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \varphi_0 = \pi .$$

Άρα για το Ο: $\boxed{y = 0,1\cdot\eta\mu(20\pi t + \pi)\ (S.I.)}$

β. Για το κύμα, με αντικατάσταση στην εξίσωσή του (σχέση 2.8), παίρνουμε:

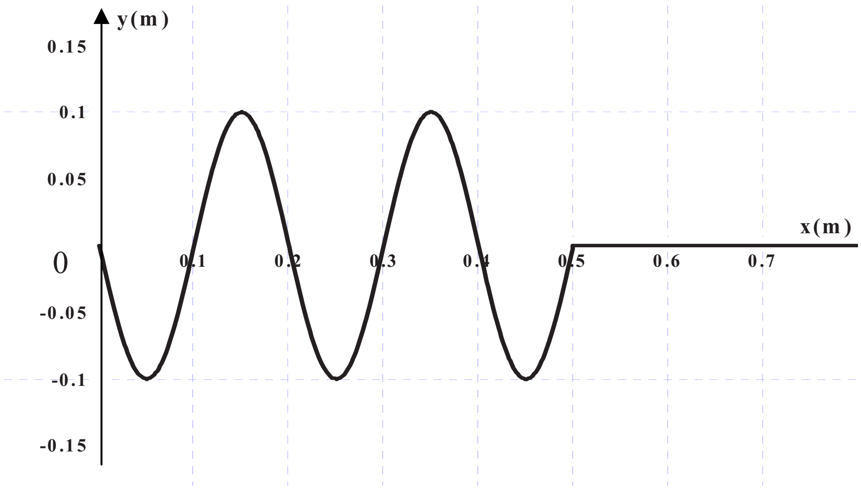
$$y = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0{,}1} - \frac{x}{0{,}2} + \frac{\pi}{2\pi} \right) \Rightarrow \boxed{y = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(10t - 5x + 0{,}5 \right) \ (S.I.)} \quad (2.5.1)$$

γ. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το κύμα φτάνει στην αρχή Ο τη χρονική στιγμή t = 0, επομένως δεν έχει διαδοθεί καθόλου προς το θετικό ημιάξονα.

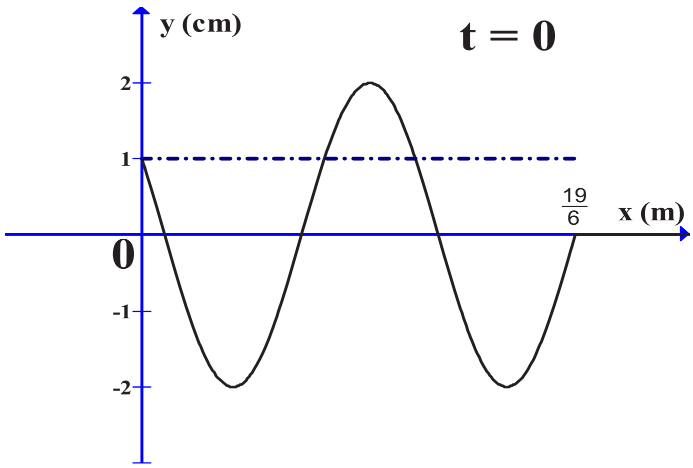
Αρκεί να υπολογίσουμε την απόσταση στην οποία θα έχει διαδοθεί μέχρι τη στιγμή t = 0,25 s. Από τη σχέση $x = \upsilon t \Rightarrow x = 2 \cdot 0{,}25\,m \Rightarrow x = 0{,}5\,m$. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τη συνάρτηση y = f(x), αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος 2.5.1 το χρόνο t.

$$y = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(10 \cdot 0{,}25 - 5x + 0{,}5 \right) \Rightarrow y = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(3 - 5x \right) y = 0{,}1 \cdot \eta\mu \left(\cancel{6\pi} - 10\pi x \right) \Rightarrow$$

$\boxed{y = -0{,}1 \cdot \eta\mu 10\pi x \ (S.I.)}$ με $0 \le x \le 0{,}5\,m$. Το στιγμιότυπο του κύματος απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα 2.6. Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα Οx, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 2 cm και συχνότητας 10 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 η αρχή Ο διέρχεται από τη θέση $y = \frac{A}{2}$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0, κατά την οποία το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση από την αρχή Ο ίση με $\frac{19}{6}m$.



α. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο.

β. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την ταχύτητα του κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να υπολογίσετε την φάση της ταλάντωσης της αρχής Ο κατά τη χρονική στιγμή t = 0.

ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{60}\,s$.

<u>Λύση</u>

Δίνονται: Α = 0,02 m ,f = 10 Hz και $x_\Sigma = \frac{19}{6}m$.

α. Από το σχήμα φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 η αρχή Ο έχει V > 0. Υπολογίζουμε την αρχική φάση φ_0 του Ο κατά τα γνωστά.

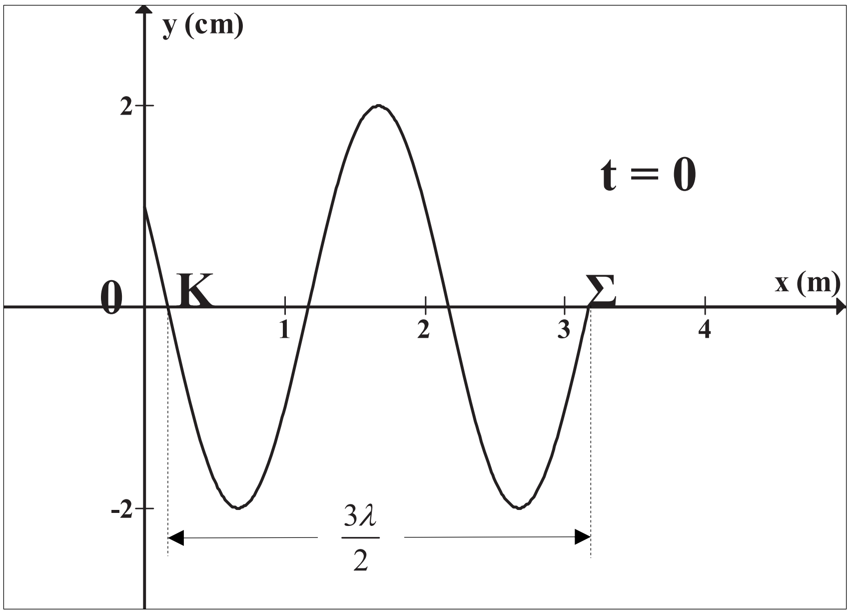
$$\left.\begin{array}{l} y = A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \\ V = \omega A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)\end{array}\right\rangle \overset{t=0}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} A\cdot\eta\mu\varphi_0 = \frac{A}{2} \\ \omega A\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0\end{array}\right\rangle \overset{1^0}{\Rightarrow} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

ω = 2πf = 20π rad/s. Επομένως η εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο είναι

$$\boxed{y = 0,02\cdot\eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(SI)}.$$

β. Επειδή μεταξύ της αρχής Ο και του τελευταίου σημείου Σ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα, τη στιγμή t = 0, υπάρχουν 3 σημεία που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, ονομάζουμε Κ το πλησιέστερο στην αρχή Ο. Επειδή $V_K > 0$, η διαφορά φάσης είναι

$$\Phi_{(O)} - \Phi_{(K)} = \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$



Από το σχήμα φαίνεται ότι $x_\Sigma - x_K = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow x_K = x_\Sigma - \frac{3\lambda}{2}$. Αντικαθιστούμε στη 2.9:

$$\frac{\cancel{\pi}}{6} = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}\left(x_\Sigma - \frac{3\lambda}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{2x_\Sigma}{\lambda} - 3 \Rightarrow \frac{2x_\Sigma}{\lambda} = \frac{19}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{12}{19}x_\Sigma \Rightarrow \lambda = \frac{12}{\cancel{19}}\cdot\frac{\cancel{19}}{6}m \Rightarrow \boxed{\lambda = 2m}.$$

Η ταχύτητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση υ = λ f άρα $\boxed{υ = 20\ m/s}$.

γ. Για το κύμα ισχύει

$$y = 0,02 \cdot ημ2π\left(\frac{t}{0,1} - \frac{x}{2} + \frac{\frac{π}{6}}{2π}\right) \Rightarrow y = 0,02 \cdot ημ2π\left(10t - 0,5x + \frac{1}{12}\right)\ (S.I.)$$

δ. Η φάση του σημείου Σ, τη χρονική στιγμή t = 0 είναι π (V < 0).

$$Φ_{(O)} - Φ_{(Σ)} = \frac{2π}{λ} \cdot x_Σ \Rightarrow Φ_{(O)} = π + \frac{\cancel{2}π}{\cancel{2}} \cdot \frac{19}{6} \Rightarrow Φ_{(O)} = \frac{25π}{6} \Rightarrow\ Φ_{(O)} = 4π + \frac{π}{6}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Είναι $Φ_{(0)} > φ_0$. Αυτό συμβαίνει επειδή από τη στιγμή που το κύμα έφτασε στο Ο, μέχρι και τη χρονική στιγμή t = 0, το Ο πέρασε από τη θέση y = A/2 με V >0, δύο φορές.

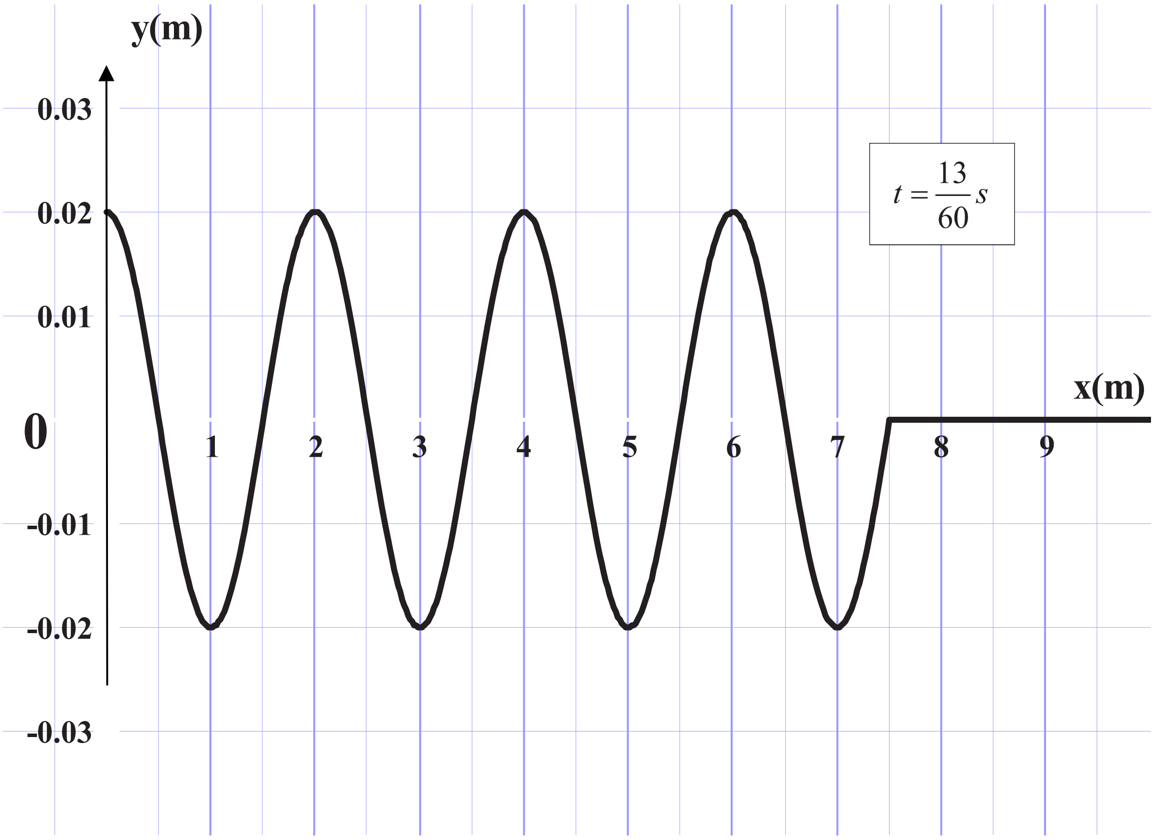
ε. Τη χρονική στιγμή t = 13/60 s το κύμα θα έχει μετατοπιστεί, από τη θέση που ήταν τη χρονική στιγμή t = 0, κατά Δx = υ Δt = 20 · 13/60 m = 26/6 m. Επομένως το κύμα θα έχει φτάσει στη θέση x = 19/6 + 26/6 = 7,5 m.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύματος το t = 13/60 s:

$$y = 0,02 \cdot ημ2π\left(10 \cdot \frac{13}{60} - 0,5x + \frac{1}{12}\right) \Rightarrow y = 0,02 \cdot ημ2π\left(\frac{27}{12} - 0,5x\right) \Rightarrow y = 0,02 \cdot ημ\left(\frac{27π}{6} - πx\right)$$

$$\Rightarrow y = 0,02 \cdot ημ(4,5π - πx) \Rightarrow y = 0,02 \cdot ημ\left(\cancel{4π} + \frac{π}{2} - πx\right) \Rightarrow y = 0,02 \cdot συνπx\ (SI)$$ με

$[0 \le x \le 7,5m]$



Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*
Παρατήρηση: *Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα υ για την ταχύτητα του κύματος και V για την ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου.*

2.1. Κατά τη διάδοση ενός κύματος σ' ένα ελαστικό μέσο
α. μεταφέρεται ύλη.
β. μεταφέρεται ενέργεια και ύλη.
γ. όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου έχουν την ίδια φάση την ίδια χρονική στιγμή.
δ. μεταφέρεται ενέργεια και ορμή με ορισμένη ταχύτητα.

2.2. Όταν ένα περιοδικό κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης
α. η ταχύτητά του μένει σταθερή.
β. η συχνότητά του μένει σταθερή.
γ. το μήκος κύματος δε μεταβάλλεται.
δ. μεταβάλλονται το μήκος κύματος και η συχνότητά του.

2.3. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα χωρίς απώλειες ενέργειας.
α. Τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
β. Σχηματίζονται "όρη" και "κοιλάδες".
γ. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου καθορίζεται από τη σχέση $V = \lambda f$.
δ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθορίζεται από την εξίσωση $\upsilon = \omega A$.

2.4. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδονται διαμήκη αρμονικά κύματα χωρίς απώλειες ενέργειας.
α. Τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής.
β. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου καθορίζεται από την εξίσωση $V = \frac{\lambda}{T}$.
γ. Σχηματίζονται "πυκνώματα" και "αραιώματα".
δ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθορίζεται από την εξίσωση $\upsilon = \omega A$.

2.5. Το μήκος κύματος ενός αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου

α. είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία έχουν διαφορά φάσης π (rad).

β. είναι ίσο με τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί ένα μόριο του ελαστικού μέσου σε χρόνο 1 s.

γ. είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο $\frac{T}{2}$, όπου T η περίοδος του κύματος.

δ. είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

2.6. Σημείο Ο γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα, με αρχή το σημείο Ο, είναι

α. $y = A\eta\mu\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

β. $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

γ. $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

δ. $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon}\right)$

2.7. Αν η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος είναι y = 0,5 ημ2π(10t – 20x), (S.I) τότε

α. η συχνότητα του κύματος είναι 10 *Hz* και η ταχύτητα διάδοσής του είναι 10 *m/s*.

β. η αρχή (x = 0) του κύματος ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση με περίοδο 10 *s*.

γ. όλα τα σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου έχουν, την ίδια χρονική στιγμή, πλάτος ταλάντωσης ίσο με 0,5 *m*.

δ. το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα 1,8 *km/h*.

2.8. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Το στιγμιότυπο του κύματος παριστάνει

α. την απομάκρυνση y των διαφόρων σημείων του μέσου, ως συνάρτηση της θέσης τους x, για t = σταθερό.

β. την απομάκρυνση y ενός σημείου του ελαστικού μέσου ως συνάρτηση του χρόνου.

γ. την ταχύτητα της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου ως συνάρτηση του χρόνου.

δ. την ταχύτητα της ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου ως συνάρτηση της θέσης τους x, την ίδια χρονική στιγμή.

2.9. Η φάση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος πλάτους Α, το οποίο αρχίζει να διαδίδεται τη χρονική στιγμή t = 0, δίνεται από τη συνάρτηση $\Phi(t, x) = 0{,}2\pi t - 4\pi x$ (S.I). Συνεπώς

α. το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ = 10 *m/s*.
β. τη χρονική στιγμή t = 5 *s* το κύμα έχει μετατοπιστεί κατά 2 *m*.
γ. το σημείο του μέσου στη θέση x = 10 *m* αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 200 *s*.
δ. τη χρονική στιγμή t = 20 *s* το σημείο του μέσου στη θέση x = 0,75 *m* έχει απομάκρυνση y = Α.

2.10. Κατά μήκος της ευθείας διάδοσης ενός αρμονικού κύματος, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου, την ίδια χρονική στιγμή , δεν εξαρτάται

α. από το πλάτος του κύματος.
β. από το μήκος κύματος του κύματος.
γ. από τη συχνότητα του κύματος.
δ. από την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων.

2.11. Το κύμα που δημιουργείται κατά το κτύπημα του κουδουνιού είναι

α. γραμμικό. **β.** επιφανειακό.
γ. ηλεκτρομαγνητικό. **δ.** χώρου.

2.12. Η ταχύτητα υ διάδοσης του κύματος, η περίοδός του Τ και το μήκος κύματος λ, συνδέονται με τη σχέση

α. $\lambda = \frac{T}{\upsilon}$ **β.** $T = \frac{\upsilon}{\lambda}$
γ. $\upsilon = \sqrt{\lambda T}$ **δ.** $\upsilon = \frac{\lambda}{T}$

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν την κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

2.13. Κύμα ονομάζεται κάθε διαταραχή κατά την οποία μεταφέρεται ενέργεια και ορμή με ορισμένη ταχύτητα.

2.14. Τα μηχανικά κύματα διαδίδονται σε υλικά μέσα.

2.15. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δε διαδίδονται στο κενό.

2.16. Όταν διαδίδεται εγκάρσιο κύμα σ' ένα ελαστικό μέσον, τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

2.17. Όταν διαδίδονται διαμήκη κύματα σ' ένα ελαστικό μέσον, σχηματίζονται "όρη" και "κοιλάδες".

2.18. Όταν διαδίδονται διαμήκη κύματα σ' ένα ελαστικό μέσον, τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

2.19. Η συχνότητα ενός κύματος δεν εξαρτάται από το μέσον στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

2.20. Αν ένα κύμα αλλάζει μέσον διάδοσης, το μήκος κύματός του δε μεταβάλλεται.

2.21. Το κύμα που δημιουργείται από το κτύπημα του κουδουνιού είναι επιφανειακό.

2.22. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται αρμονικό κύμα, μήκους κύματος λ. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου, την ίδια χρονική στιγμή, είναι $\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda}$, όπου d η απόσταση μεταξύ των σημείων.

2.23. Η εξίσωση $y = A\eta\mu\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x)$ περιγράφει αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

2.24. Η εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t + kx)$, όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, περιγράφει αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

2.25. Το στιγμιότυπο αρμονικού κύματος παριστάνει την απομάκρυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται το κύμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

2.26. Το στιγμιότυπο γραμμικού αρμονικού κύματος παριστάνει την απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου, ως συνάρτηση της θέσης x .

2.27. Αρμονικό κύμα που διαδίδεται σε γραμμικό μέσο περιγράφεται από την εξίσωση $y=0{,}03ημ2π\left(\frac{t}{5}-\frac{x}{15}\right)$ (S.I). Το κύμα φτάνει στην αρχή Ο (x = 0) τη χρονική στιγμή t = 0. Για το σημείο που βρίσκεται στη θέση x = 6 m και για τις χρονικές στιγμές $0 \le t \le 2$ s είναι y = 0.

2.28. Η κλίση στη γραφική παράσταση της φάσης ενός γραμμικού αρμονικού κύματος σε συνάρτηση με το χρόνο εκφράζει τη γωνιακή (κυκλική) συχνότητα.

2.29. Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση εγκάρσιο αρμονικό κύμα.

α. Η φάση της αρχής Ο αυξάνεται γραμμικά σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Η φάση ενός σημείου Μ, που βρίσκεται αριστερά από το Ο είναι μεγαλύτερη από τη φάση του Ο.

γ. Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται έχουν την ίδια μέγιστη ταχύτητα.

δ. Όσα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται, διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους.

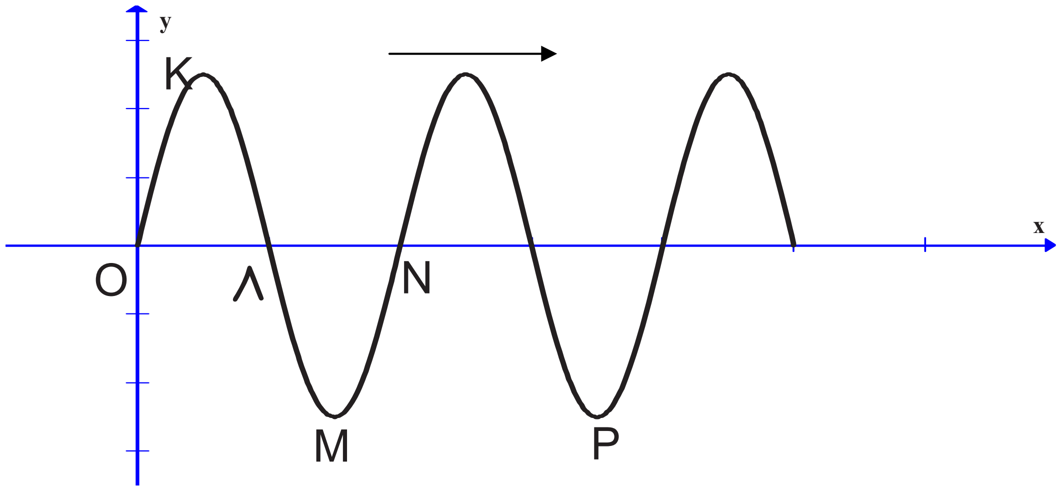
ε. Αν δεν έχουμε απώλεια ενέργειας το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι σταθερό.

στ. Ακόμη κι αν το ελαστικό μέσο δεν είναι ομογενές, τα διάφορα σημεία του ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

2.30. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα στιγμιότυπο εγκάρσιου αρμονικού κύματος, που διαδίδεται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία του ελαστικού μέσου της στήλης Ι με τα στοιχεία της στήλης ΙΙ.



ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Σημείο Κ	1. Είναι σε συμφωνία φάσης με το Ο.
Β. Σημείο Λ	2.Παρουσιάζει διαφορά φάσης $\frac{3\pi}{2}$ με το Ο.
Γ. Σημείο Μ	3.Βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.
Δ. Σημείο Ν	4.Παραμένει διαρκώς ακίνητο.
Ε. Σημείο Ρ	5. Διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.
	6. Έχει μηδενική ταχύτητα.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

2.31. Τι ονομάζουμε κύμα;

2.32. Ποιο κύμα ονομάζεται αρμονικό;

2.33. Ποια κύματα ονομάζονται

α. μηχανικά. **β.** ηλεκτρομαγνητικά.

2.34. Ποια είναι η φύση της διαταραχής για τα υδατικά, ηχητικά, σεισμικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα; Να αναφέρετε ένα πιθανό αποτέλεσμά τους.

2.35. Από τι εξαρτάται η συχνότητα ενός περιοδικού κύματος;

2.36. Τι μεταβάλλεται όταν ένα περιοδικό κύμα αλλάζει μέσον διάδοσης;

2.37. Ποια κύματα ονομάζονται:
α. εγκάρσια **β.** διαμήκη **γ.** γραμμικά **δ.** επιφανειακά **ε.** χώρου.
στ. περιοδικά. Να αναφέρετε από ένα παράδειγμα.

2.38. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Θεωρούμε αρχή του άξονα ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου το οποίο αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση τη χρονική στιγμή t = 0 με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα, όταν αυτό διαδίδεται
α. προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα.
β. προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα.

2.39. **α.** Τι ονομάζουμε στιγμιότυπο κύματος;
β. Να αποδώσετε γραφικά το στιγμιότυπο αρμονικού κύματος.

2.40. Ένα αρμονικό κύμα με περίοδο 0,5 s, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x΄x. Το κύμα φτάνει στην αρχή Ο τη χρονική στιγμή t = 0. Τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s φτάνει σε ένα σημείο Μ και τη χρονική στιγμή t_2 = 12 s σε ένα σημείο Λ. Η διαφορά φάσης, κάποια χρονική στιγμή t (t > 12 s), των σημείων Μ και Λ είναι
α. 2π. **β.** 8π. **γ.** 10π. **δ.** 12π
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2.41. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση $x'x$, διαδίδεται με ταχύτητα μέτρου υ εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Θεωρούμε αρχή του άξονα ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου το οποίο αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση τη χρονική στιγμή t = 0, με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$.
Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε και γιατί;
α. Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα όταν αυτό διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα είναι $y = A\eta\mu\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - x)$.
β. Η εξίσωση που περιγράφει το αρμονικό κύμα όταν αυτό διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα είναι $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.
γ. Δύο σημεία του ελαστικού μέσου τα οποία ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.
δ. Στο ελαστικό μέσον δημιουργούνται "πυκνώματα" και "αραιώματα".

2.42. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα, μήκους κύματος λ, κατά τη θετική κατεύθυνση. Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο Ο του ελαστικού μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή t = 0 αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Οι φάσεις της ταλάντωσης δύο σημείων Μ και Ν του ελαστικού μέσου, την ίδια χρονική στιγμή, είναι $\phi_M = \frac{20\pi}{3}$ και $\phi_N = \frac{2\pi}{3}$, αντίστοιχα.

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Η εξίσωση που περιγράφει το κύμα είναι $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.

β. Το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Μ προς το σημείο Ν.

γ. Τα σημεία Μ, Ν απέχουν μεταξύ τους απόσταση η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ.

δ. Το στιγμιότυπο του κύματος δείχνει τη χωρική περιοδικότητα που παρουσιάζει το ελαστικό μέσον.

2.43. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα, μήκους κύματος λ, κατά την αρνητική κατεύθυνση. Θεωρούμε αρχή του άξονα ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου, το οποίο τη χρονική στιγμή t = 0 αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$.

Οι φάσεις της ταλάντωσης δύο σημείων Κ, Ν του ελαστικού μέσου, την ίδια χρονική στιγμή, είναι $\phi_K = \frac{15\pi}{2}$ και $\phi_N = \frac{5\pi}{2}$, αντίστοιχα.

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Η εξίσωση που περιγράφει το κύμα είναι $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.

β. Το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Ν προς το σημείο Κ.

γ. Τα σημεία Κ και Ν απέχουν μεταξύ τους απόσταση η οποία είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\frac{\lambda}{2}$.

δ. Στη γραφική παράσταση της εξίσωσης του κύματος $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \Lambda\right)$, όπου $\Lambda = \frac{x}{\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta.$, διαπιστώνουμε τη χρονική περιοδικότητα που παρουσιάζει η κίνηση ενός σημείου του ελαστικού μέσου.

2.44. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα, μήκους κύματος λ = 20 *cm*, προς τη αρνητική κατεύθυνση του άξονα. Η απομάκρυνση ενός σημείου Ο, το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα, δίνεται από την εξίσωση $y = 2\eta\mu 20\pi t$ (y σε *cm*, t σε *s*).

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

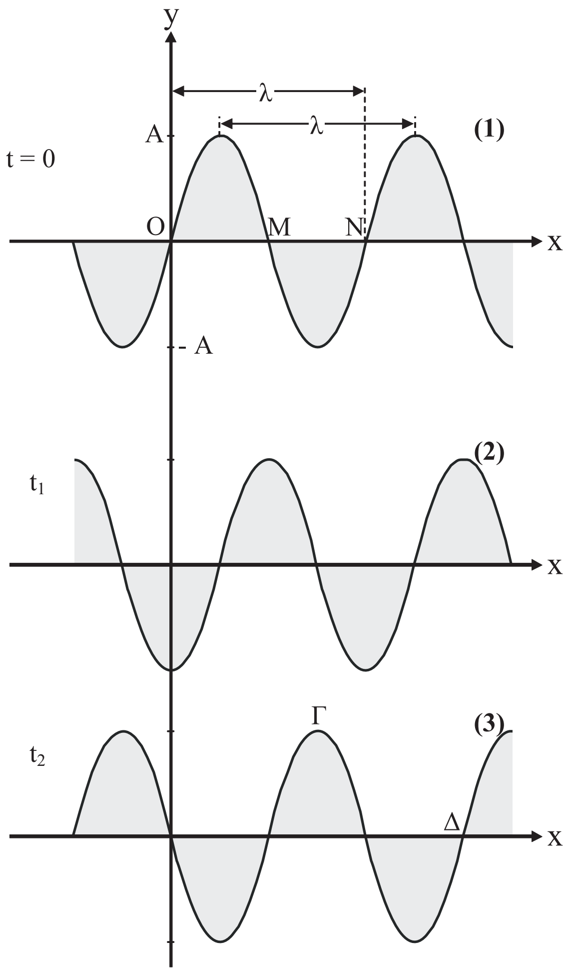
α. Η εξίσωση του κύματος είναι $y = 2\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x}{20}\right)$ (x, y σε cm, t σε s).

β. Η διαφορά φάσης $\Phi_A - \Phi_B$ μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων Α (40 *cm*) και Β (– 40 *cm*), την ίδια χρονική στιγμή, είναι 8π.

γ. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t = 3 *s* είναι $V = -40\pi\ \frac{cm}{s}$.

δ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = 2\ \frac{m}{s}$.

2.45. Στα παραπλεύρως σχήματα δίνονται τρία διαδοχικά στιγμιότυπα ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος, περιόδου Τ και μήκους κύματος λ, το οποίο διαδίδεται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.



Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4}$.

β. Το στιγμιότυπο (3) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_2 = T$.

γ. Στο στιγμιότυπο (1) οι ταχύτητες της ταλάντωσης των σημείων Μ και Ν είναι αντίστοιχα $V_1 = \omega A$ και $V_2 = -\omega A$.

δ. Στο στιγμιότυπο (3) οι επιταχύνσεις των σημείων Γ και Δ είναι αντίστοιχα $a_1 = -\omega^2 A$ και $a_2 = 0$.

2.46. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $y = 4ημπ\left(10t - \frac{x}{10}\right)$ (x, y σε cm, t σε s).

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

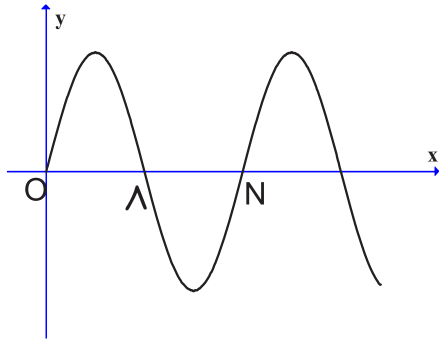
α. Το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

β. Το πλάτος του κύματος είναι 4 cm και η περίοδός του 0,2 s.

γ. Το μήκος κύματος είναι 20 cm και η ταχύτητα διάδοσης 1 m/s.

δ. Η ταχύτητα της ταλάντωσης του σημείου του ελαστικού μέσου με συντεταγμένη x = 20 cm τη χρονική στιγμή t = 2,5 s, είναι V = 40π cm/s.

2.47. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο εγκάρσιου αρμονικού κύματος. Αν η συχνότητα της πηγής που το παράγει ήταν μεγαλύτερη, η απόσταση ΛΝ θα ήταν



α. μεγαλύτερη.
β. ίδια.
γ. μικρότερη.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

2.48. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση, εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου βρίσκονται στο θετικό ημιάξονα Ox και οι φάσεις της ταλάντωσής τους, την ίδια χρονική στιγμή είναι $\frac{15\pi}{2}$ και $\frac{5\pi}{2}$, αντίστοιχα. Ποιο από τα δύο σημεία αυτά βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή Ο;

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

2.49. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται, κατά τη θετική κατεύθυνση, ημιτονοειδές κύμα συχνότητας f = 500 *Hz*, με ταχύτητα $\upsilon = 1000\frac{m}{s}$ και πλάτος $A = 5$ cm.

α. Να υπολογίσετε
i) το μήκος κύματος.
ii) την περίοδο και την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης ενός μορίου του ελαστικού μέσου.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα $x'x$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ για την πηγή δίνεται ότι $y = 0$, $V > 0$.

[Απ. (α) i) 2 *m* ii) $2\cdot 10^{-3}s$, $1000\pi\,\frac{rad}{s}$ (β) y = 0,05ημ2π(500t – 0,5x) (SI)]

2.50. Μια πηγή Ο που βρίσκεται στη θέση x = 0 του άξονα $x'x$ αρχίζει τη στιγμή t = 0 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με εξίσωση $y = 0{,}04$ημ4πt (SI). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα με ταχύτητα $\upsilon = 50\,\frac{m}{s}$.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
γ. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να κινείται ένα σημείο Μ του άξονα $x'x$ που βρίσκεται στη θέση x = 500 *m*;

δ. Τη χρονική στιγμή t = 20 *s*, να βρείτε για το σημείο Μ

i) την απομάκρυνσή του y από τη θέση ισορροπίας του.

ii) την ταχύτητά του.

iii) την επιτάχυνσή του.

[Απ. (α) 25 *m* (β) $y = 0{,}04ημ2π\left(2t - \frac{x}{25}\right)$ (SI) (γ) 10 *s* (δ) i) 0 ii) $0{,}16\pi \frac{m}{s}$ iii) 0]

2.51. Η εξίσωση γραμμικού αρμονικού κύματος είναι $y = 0{,}1 \cdot ημ2π(2t - 0{,}1x)$ (SI).
Να βρείτε

α. την ταχύτητα του κύματος.

β. την απόσταση δύο σημείων τα οποία κάποια χρονική στιγμή έχουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\frac{3π}{2}$.

γ. Τη διαφορά φάσης ενός σημείου μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 20\,s$ και $t_2 = 25$ s. [Απ. (α) $20\frac{m}{s}$ (β) 7,5 *m* (γ) 20 π *rad*]

2.52. Μια πηγή Ο αρχίζει να εκτελεί, τη στιγμή t = 0, απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0{,}08ημπt$ (SI). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ με ταχύτητα $υ = 2\,\frac{m}{s}$.

α. Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το μήκος κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν την ταχύτητα ταλάντωσης και την επιτάχυνση σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημείο Μ που βρίσκεται στη θέση $x = 2$ m.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση Φ της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ημιάξονα Οx, σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x, τη χρονική στιγμή t = 5 s.

[Απ. (α) 2 s, 0,5 *Hz*, 4 m (β) $y = 0{,}08ημ2π(0{,}5t - 0{,}25x)$ (γ)
$V = 0{,}08πσυν2π(0{,}5t - 0{,}5)$, (δ) Φ = 5π - 0,5πx (όλα στο S.I.)]

2.53. Ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον και έχει μήκος κύματος λ = 24 *m*. Η εξίσωση δονήσεως της πηγής η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα είναι $y = Αημ\frac{2π}{T}t$. Κάποια χρονική στιγμή t δύο υλικά σημεία Μ, Ν τα οποία βρίσκονται πάνω στον άξονα έχουν αντίστοιχα φάσεις $φ_1 = \frac{5π}{6}$ και $\phi_2 = \frac{20\pi}{3}$.

α. Να αποδείξετε ότι το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Ν προς το Μ.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση ΜΝ. [Απ. (β) 70 *m*]

2.54. Ένα ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ και έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $A = 0,05\ m,\ \lambda = 0,8\ m,\ f = 4\ Hz$. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Στη θέση x = 0, για t = 0 είναι y = 0 και V > 0.

β. Στη θέση x = 0,1 m για t = 0 είναι y = 0 και V > 0.

[Απ. (α) $y = 0,05\eta\mu 2\pi(4t + 1,25x)$ (SI) (β) $y = 0,05\eta\mu 2\pi\left(4t + 1,25x + \frac{7}{8}\right)$ (SI)]

2.55. Πηγή κύματος Ο, η οποία βρίσκεται στην αρχή του άξονα x΄x, τη χρονική στιγμή t = 0 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση: $y = 0,04\eta\mu\omega t$ (S.I.). Πάνω στον θετικό ημιάξονα Ox βρίσκονται δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν από την αρχή Ο αποστάσεις x_K = *24 cm* και x_Λ= 36 *cm*, αντίστοιχα. Κατά τη χρονική στιγμή *t = 0,15 s* το κύμα φτάνει στο σημείο Κ και την ίδια στιγμή η φάση της ταλάντωσης της πηγής Ο είναι *φ = 6π*.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος, την περίοδο και το μήκος κύματος του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Ποια σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ βρίσκονται σε αντίθεση φάσης με την πηγή Ο των κυμάτων;

δ. Να σχεδιάσετε, σε συνάρτηση με το χρόνο, την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, της ταλάντωσης του σημείου Λ.

ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0,15 s.

2.56. Δίνεται το αρμονικό κύμα με εξίσωση $y = 0,08\eta\mu(30t - 0,24x + \pi)$ (SI).

α. Να υπολογίσετε

i) την ταχύτητα του κύματος.

ii) τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ταλάντωσης, τη στιγμή t = 0, ενός σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x = 25π/3 m.

γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ταλάντωσης, τη στιγμή t = 0,1π s, ενός σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x = 50π m.

[Απ. (α) i) $125\ \frac{m}{s}$ ii) $V_{max} = 2,4\ \frac{m}{s}$ (β) $V = -2,4\ \frac{m}{s}$ (γ) $V = 2,4\ \frac{m}{s}$]

2.57. Ένα ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ και έχει πλάτος $A = 0,1\ m$, μήκος κύματος λ = 0,4 *m* και συχνότητα f = 4 *Hz*. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα. Για t = 0, στη θέση x = 0 η απομάκρυνση είναι y = 0,1 *m*.

α. Να υπολογίσετε

i) τον κυματικό αριθμό $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

ii) την περίοδο και την κυκλική συχνότητα του κύματος.

iii) την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β. Να προσδιορίσετε την αρχική φάση του κύματος και να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

[Απ. (α) i) 5π m^{-1} ii) $\frac{1}{4}s$, $8\pi\frac{rad}{s}$ iii) $1{,}6\frac{m}{s}$ (β) $\frac{\pi}{2}$, $y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(4t - 2{,}5x + \frac{1}{4}\right)$ (SI)]

2.58. Πηγή παραγωγής ημιτονοειδών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή O ομογενούς χορδής μεγάλου μήκους. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου O είναι $y = 4\cdot 10^{-2}\eta\mu 10\pi t$ (SI) και το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση. Το μήκος κύματος είναι 0,8 *m*.

α. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Πόση είναι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή $t = 1{,}25\ s$ ενός σημείου της χορδής το οποίο απέχει από την πηγή O απόσταση $x = 4\ m$.

[Απ. (α) $4\frac{m}{s}$ (β) $y = 4\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi(5t - 1{,}25x)$ (SI) (γ) $4\cdot 10^{-2} m$]

2.59. Κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής Ox διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση, με ταχύτητα 1 *m/s*. Στις θέσεις 1 *m*, 1,5 *m* και 2 *m* είναι τα σημεία K, Λ και M αντίστοιχα. Η εξίσωση κίνησης του σημείου Λ είναι $y = 0{,}02\eta\mu(10\pi t)\ (S.I.)$. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για τα σημεία K και M.

[Απ $y_K = 0{,}02\eta\mu(10\pi t + 5\pi)$, $y_M = 0{,}02\eta\mu(10\pi t - 5\pi)\ (S.I)$]

2.60. Διάμηκες αρμονικό κύμα διατρέχει ένα ελατήριο μήκους 5 *m* σε χρόνο 2 *s*. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι 2 *mm* και η απόσταση ενός πυκνώματος και του επόμενου αραιώματος είναι 10 *cm*, να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης που αντιστοιχεί σε κάθε σπείρα του ελατηρίου. Δίνονται: ο αριθμός των σπειρών του ελατηρίου N = 1000 και η γραμμική πυκνότητα $\mu = \frac{m}{\ell} = 4\,g/m$. [Απ. $2{,}5\cdot 10^{-7}$ J]

2.61. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα με πλάτος $A = 4\ cm$, μήκος κύματος λ = 20 *cm* και ταχύτητα $\upsilon = 2\frac{m}{s}$. Τη χρονική στιγμή t = 0 το κύμα φθάνει στο σημείο O, αρχή του άξονα x'x. Για το σημείο O δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την αρνητική φορά.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σημείο A του ελαστικού μέσου το οποίο έχει συντεταγμένη x = 15 cm, σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, δεξιά του σημείου O, τις χρονικές στιγμές: $0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, 2T, \frac{5T}{2}$.

[Απ. (α) $y = 4\eta\mu(20\pi t + \pi)$ (β) $y = 4\eta\mu\left(20\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (y σε cm, t σε s)]

2.62. Το άκρο Ο γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου αρχίζει, τη στιγμή t = 0, να εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 10ημ20πt$ (t σε s, y σε cm), οπότε διαδίδεται, κατά μήκος του ημιάξονα Οx, κύμα με ταχύτητα $υ = 1\,\frac{m}{s}$.

α. Πόσο είναι το μήκος κύματος;

β. Πότε αρχίζει να ταλαντώνεται ένα σημείο Μ του ελαστικού μέσου το οποίο απέχει από την πηγή Ο απόσταση x = 2 *m*;

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ και να υπολογίσετε την τιμή της τη χρονική στιγμή t_1 = 5,625 *s*. Ποια είναι η τιμή της φάσης του σημείου Μ την παραπάνω χρονική στιγμή;

δ. Πόσο απέχει από το σημείο Μ, ένα σημείο Ν το οποίο την ίδια χρονική στιγμή (t_1 = 5,625 *s*) έχει φάση $φ_N = 72π + \frac{2π}{3}$; Κατά ποια φορά διαδίδεται το κύμα;

ε. Να παραστήσετε γραφικά τη μεταβολή της φάσης του σημείου Μ σε συνάρτηση με το χρόνο. [Απ. (α) 0,1 *m* (β) 2 *s* (γ) $y_M = 10ημ2π(10t - 20)$ (t σε s, y σε cm), 10 *cm*, $φ_M = 72π + \frac{π}{2}$, (δ) $\frac{1}{120}$ m από το Ν προς το Μ]

2.63. Θεωρούμε σημειακή πηγή Ο παραγωγής κυμάτων της οποίας η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας δίνεται από την εξίσωση $y = 2ημ(2π \cdot t + φ)$ (t σε *s*, y σε *cm*). Η πηγή Ο βρίσκεται στη θέση x = 0 και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = -\frac{T}{4}$, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσής της. Τη χρονική στιγμή t = 0 η πηγή βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της. Όταν η πηγή περνάει από τη θέση ισορροπίας της για τρίτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0, το κύμα που παράγεται από αυτήν έχει μετατοπιστεί κατά d = 25 *cm*.

α. Να βρείτε τη γωνία ϕ.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα $x'x$ του ελαστικού μέσου, με αρχή Ο τη θέση της πηγής και προς τη θετική φορά.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν την ταχύτητα της ταλάντωσης και την επιτάχυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα μόριο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x = 10 *cm*.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση φ της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ημιάξονα Οx, σε συνάρτηση με την απόστασή τους x από την πηγή Ο τη χρονική στιγμή t = 5 *s*.

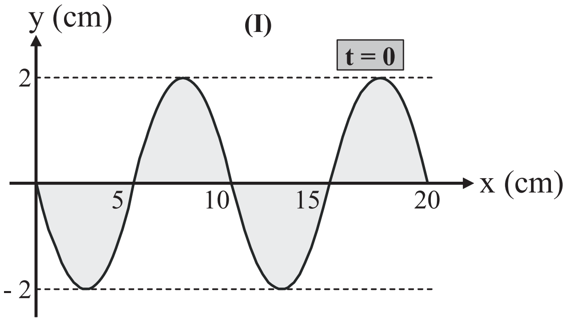
ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 4,5 *s*.

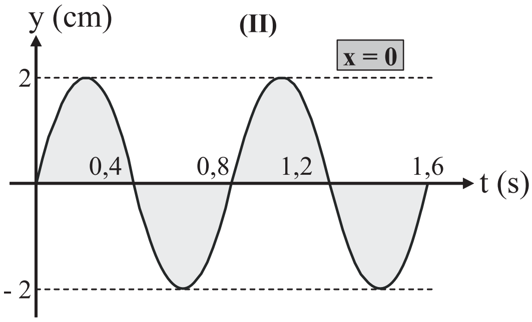
[Απ. (α) $\frac{π}{2}$ (β) $y = 2ημ2π\left(t + \frac{1}{4} - \frac{x}{20}\right)$ (t σε *s*, x, y σε *cm*)

(γ) $V = 4πσυν2π\left(t - \frac{1}{4}\right)$ (t σε *s*, V σε $\frac{cm}{s}$), $α = -8π^2 ημ2π\left(t - \frac{1}{4}\right)$ (t σε *s*, α σε $\frac{cm}{s^2}$)]

2.64. Στα σχήματα φαίνονται δύο γραφικές παραστάσεις για εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

Θεωρούμε ως αρχή x = 0 τη μια άκρη του γραμμικού ελαστικού μέσου. Με βάση τις πληροφορίες που παρέχουν οι γραφικές παραστάσεις (I) και (II), να βρείτε





α. το μήκος κύματος και την περίοδο του κύματος.

β. την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ. την εξίσωση του κύματος.

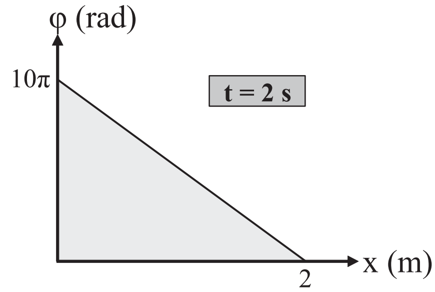
δ. την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, την ταχύτητα ταλάντωσης και την επιτάχυνση ενός μορίου του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση x = 10 cm τη χρονική στιγμή t = 0,8 s.

ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος κατά τη χρονική στιγμή t = 0,4 s.

[Απ. α. 10 cm, 0,8 s (β) $12{,}5\,\frac{cm}{s}$ γ. $y = 2\eta\mu 2\pi\left(1{,}25t - \frac{x}{10}\right)$ (t σε s, y και x σε cm)

δ. 0, $5\pi\,\frac{cm}{s}, 0$]

2.65. Ημιτονοειδές εγκάρσιο κύμα πλάτους $A = 0{,}1\,m$ διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$. Η εξίσωση δονήσεως της πηγής Ο, που βρίσκεται στην αρχή του άξονα $x'x$, είναι $y = A\eta\mu\omega t$. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή τη χρονική στιγμή t = 2 s.



α. Να βρείτε την περίοδο του κύματος και το μήκος κύματος.

β. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να βρείτε για τη χρονική στιγμή t = 4 s και για ένα σημείο Κ του ελαστικού μέσου το οποίο απέχει από την πηγή Ο απόσταση x = 1 m,

i) την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του.

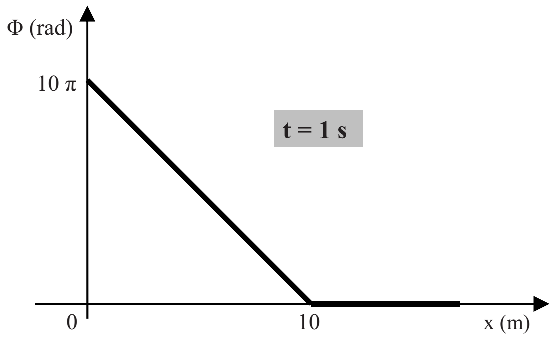
ii) την ταχύτητά του.

iii) την επιτάχυνσή του.

ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 2 s.

[Απ. (α) 0,4 s 0,4 m (β) $1\,\frac{m}{s}$ (γ) $y = 0{,}1\eta\mu 2\pi(2{,}5t - 2{,}5x)$ (SI) (δ) i) 0 ii) $-0{,}5\pi\,\frac{m}{s}$ iii) 0]

2.66. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου που συμπίπτει με τον άξονα x΄x, κατά τη θετική κατεύθυνση. Η πηγή βρίσκεται στη θέση x = 0 και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 σύμφωνα με την εξίσωση $y = 4 \cdot 10^{-2}$ ημωt (S.I). Στο διάγραμμα δίνεται η μεταβολή της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη τετμημένη x των σημείων του ελαστικού μέσου κατά τη χρονική στιγμή t = 1 s.



α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β. Για το σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x = 4 m, να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο,

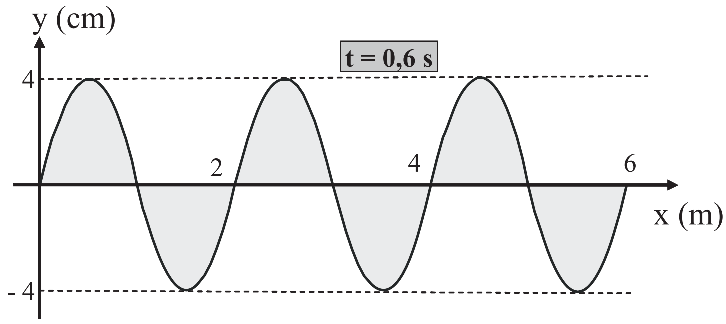
1. την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και

2. τη φάση της ταλάντωσής του.

γ. Για το σημείο του ελαστικού μέσου, του οποίου η φάση τη χρονική στιγμή t = 1,6 s είναι 4 π rad, να παραστήσετε γραφικά την επιτάχυνσή του σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές 0,6 s και 0,65 s. [Απ. $y = 4 \cdot 10^{-2}$ ημ2π(5t – 0,5x) (S.I)]

2.67. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου που συμπίπτει με τον άξονα x΄x, κατά τη θετική κατεύθυνση. Η πηγή βρίσκεται στη θέση x = 0 και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 σύμφωνα με την εξίσωση $y = 4 \cdot 10^{-2}$ ημ(ωt + π) (S.I). Στο διάγραμμα δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0,6 s.



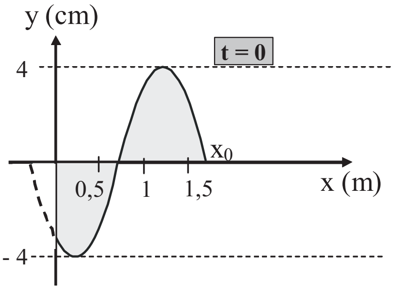
α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την τετμημένη x τη φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t = 1 s.

γ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο τη φάση της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, το οποίο βρίσκεται στη θέση x = 8 m.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0,7 s.

2.68. Η εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx, σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $y = 4x10^{-2}\eta\mu\left(10\pi \cdot t + \frac{5\pi}{3}\right)$ $(S.I)$. Στο σχήμα δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0 κατά την οποία το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση από την αρχή Ο ίση με $x_0 = \frac{5}{3}m$.



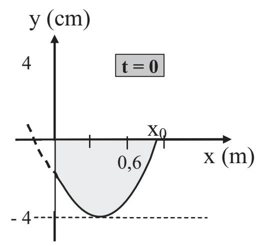
α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την ταχύτητα του παραγόμενου κύματος.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
γ. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση της ταλάντωσης των σημείων του ημιάξονα Ο, σε συνάρτηση με τη θέση x, κατά τη χρονική στιγμή t = 1 s.
δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 13/12 s.
ε. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση της ταλάντωσης του σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση x = 29/3 m, σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ. 2 m, 10 m/s, $y = 4x10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(5t - 0{,}5x + \frac{5}{6}\right)$ $(S.I)$]

2.69. Η εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx, σε συνάρτηση με το χρόνο είναι

$y = 4x10^{-2}\eta\mu\left(10\pi \cdot t + \frac{5\pi}{3}\right)$ $(S.I)$.

Στο σχήμα δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0 κατά την οποία το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση από την αρχή Ο ίση με $x_0 = \frac{2}{3}m$.



α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την ταχύτητα του παραγόμενου κύματος.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
γ. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση της ταλάντωσης των σημείων του ημιάξονα Ο, σε συνάρτηση με τη θέση x, κατά τη χρονική στιγμή t = 1 s.
δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 13/12 s.
ε. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση της ταλάντωσης του σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση x = 29/3 m, σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ. 2 m, 10 m/s, $y = 4x10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(5t - 0{,}5x + \frac{5}{6}\right)$ $(S.I)$]

2.70. Ένα σημείο Ο ενός οριζόντιου γραμμικού ελαστικού μέσου εκτελεί ταυτόχρονα δύο κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις, γύρω από τη θέση ισορροπίας του Ο, που περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = 0{,}1\eta\mu 2\pi t$ $\kappa\alpha\iota$ $y_2 = 0{,}1\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi t\ (S.I)$.

α. Να αποδείξετε ότι κίνηση του σημείου Ο δημιουργεί στο ελαστικό μέσο αρμονικό κύμα.

β. Το κύμα που παράγεται διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x, ο οποίος ταυτίζεται με το ελαστικό μέσο και έχει αρχή το σημείο O. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι 2 m/s. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Δύο σημεία Κ και Λ βρίσκονται στις θέσεις +3 m και +8 m, αντίστοιχα. Αν κάποια χρονική στιγμή η φάση της ταλάντωσης του Κ είναι $\frac{14\pi}{3}$, ποια είναι η φάση της ταλάντωσης του σημείου Λ την ίδια στιγμή;

[Απ. α. $y_{(O)} = 0,2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)(S.I)$, β. $y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(t - 0,5x + \frac{1}{6}\right)(S.I)$, γ. $-\frac{\pi}{3}$]

2.71. Σε ένα σημείο O, στην ελεύθερη εκτεταμένη επιφάνεια νερού που ηρεμεί, πέφτουν με σταθερό ρυθμό 120 σταγόνες το λεπτό. Δημιουργείται έτσι ένα επιφανειακό αρμονικό κύμα το οποίο θεωρούμε εγκάρσιο. Το πλάτος ταλάντωσης της πηγής O είναι σταθερό, ίσο με A. Παρατηρούμε ότι κατά μήκος μιας ακτίνας διάδοσης Ox του κύματος σχηματίζονται 6 διαδοχικά "όρη" τα οποία καλύπτουν απόσταση d = 2,5 m.

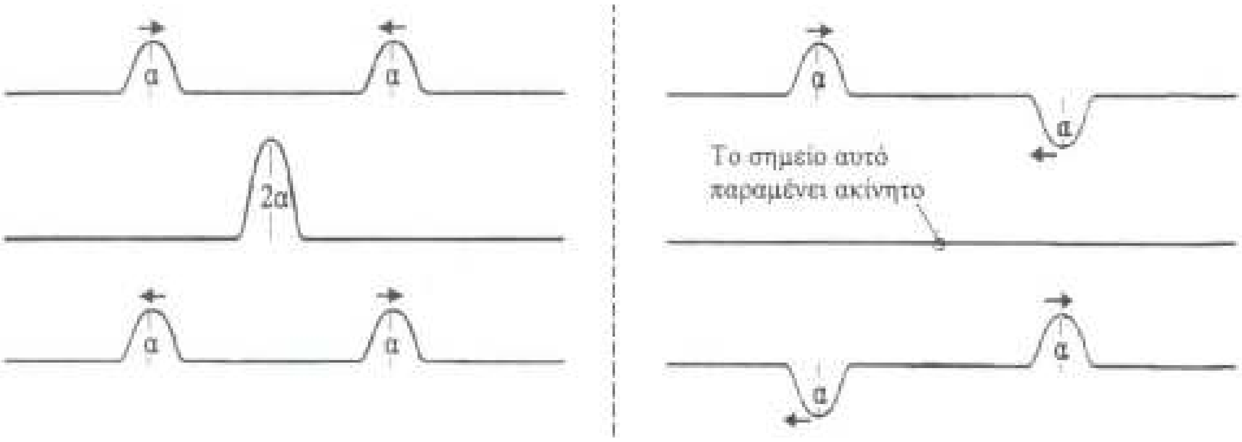
α. Να βρείτε την περίοδο του κύματος και το μήκος κύματος.

β. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

§2.3 ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Συμβολή έχουμε όταν δύο ή περισσότερα κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο ελαστικό μέσο.

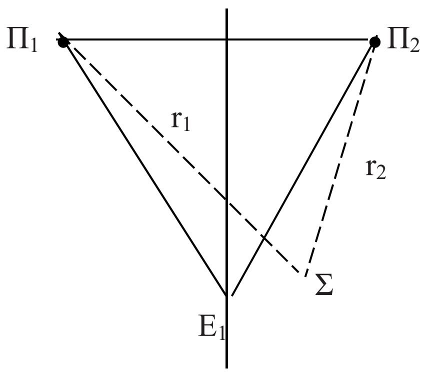
Η μελέτη της συμβολής των κυμάτων γίνεται με τη βοήθεια της **αρχής της επαλληλίας**, σύμφωνα με την οποία η απομάκρυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας του, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων που θα προκαλούσε το κάθε κύμα ξεχωριστά στο ίδιο σημείο. Δηλαδή αν y_1 και y_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των απομακρύνσεων που προκαλεί το κάθε κύμα σε ένα σημείο του ελαστικού μέσου, τότε η απομάκρυνση του σημείου αυτού εξ αιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων θα είναι $y = y_1 + y_2$. (Αντίστοιχα ισχύει και για τις ταχύτητες $\left(\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)$ και τις επιταχύνσεις $\left(\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)$).



Στα δύο σχήματα φαίνεται η συμβολή δύο κυματικών παλμών ίδιου πλάτους που διαδίδονται σε γραμμικό ελαστικό μέσο σε αντίθετες κατευθύνσεις. Παρατηρείστε ότι οι δύο παλμοί μετά τη συμβολή τους συνεχίζουν να διατηρούν την αρχική τους μορφή σα να μη συναντήθηκαν ποτέ.

➢ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ

Θεωρούμε στην επιφάνεια ενός υγρού δύο σημειακές πηγές $Π_1$ και $Π_2$ κυμάτων ίδιας συχνότητας με μηδενική διαφορά φάσης (τέτοιες πηγές ονομάζονται **ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ**, ενώ αν έχουν χρονικά σταθερή διαφορά φάσης ονομάζονται **ΣΥΜΦΩΝΕΣ**).



Θεωρούμε ότι οι πηγές εκτελούν αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους που περιγράφονται από την εξίσωση y = Αημωt.

Έστω E_1 ένα σημείο της επιφάνειας του ελαστικού μέσου, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $Π_1Π_2$. Επειδή οι δύο πηγές είναι σε φάση και τα κύματα για να φτάσουν στο E_1 διανύουν την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο, όταν από τη μία πηγή φτάνει «όρος» θα φτάνει «όρος» και από την άλλη, άρα στο σημείο θα δημιουργείται όρος μέγιστου ύψους 2Α και αντίστοιχα, όταν από την μία πηγή φτάνει «κοιλάδα» θα φτάνει και από την άλλη «κοιλάδα», άρα στο σημείο θα δημιουργείται κοιλάδα μέγιστου βάθους 2Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά και η συμβολή ονομάζεται **ενισχυτική**. (Το σημείο E_1 δεν είναι το μοναδικό σημείο του μέσου στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.) Σε κάποιο άλλο σημείο όταν από τη μία πηγή φτάνει «όρος» και από την άλλη «κοιλάδα», τότε στο σημείο αυτό συμβαίνει αναίρεση και το σημείο παραμένει ακίνητο. Η συμβολή των δύο κυμάτων αυτών λέγεται **αναιρετική ή αποσβεστική**. Σε άλλα σημεία του ελαστικού μέσου, που δεν παρατηρείται ενίσχυση ή απόσβεση θα έχουμε ταλαντώσεις με πλάτη μεταξύ του μέγιστου 2Α και του ελάχιστου 0.

Για να βρούμε την εξίσωση ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας. Επίσης θεωρούμε ότι το πλάτος ταλάντωσης εξ αιτίας της κάθε πηγής σε κάθε σημείου του μέσου είναι σταθερό και ίσο με Α.

Έστω Σ τυχαίο σημείο, το οποίο απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις r_1 και r_2, αντίστοιχα. Στο Σ το κύμα που φτάνει από την πηγή $Π_1$ έχει εξίσωση

$y_1 = A\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{λ}\right)$ και το κύμα που φτάνει από την πηγή $Π_2$ έχει εξίσωση

$y_2 = A\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{λ}\right)$. Για την ταλάντωση του Σ θα ισχύει $y = y_1 + y_2$. Αντικαθιστούμε

$$y = A\left[ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{λ}\right)+ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{λ}\right)\right] \qquad (2.10)$$

Η αγκύλη περιέχει ένα άθροισμα ημιτόνων, το οποίο μετασχηματίζεται σε γινόμενο σύμφωνα με την τριγωνομετρική ταυτότητα: $ημA+ημB = 2συν\frac{A-B}{2}ημ\frac{A+B}{2}$.

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα στην εξίσωση 2.10 και παίρνουμε:

$$y = A\cdot 2συν\frac{2π\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{r_1}{λ}\right)-2π\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{r_2}{λ}\right)}{2}\cdot ημ\frac{2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{λ}\right)+2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{λ}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 2Aσυν\frac{2π(r_2-r_1)}{2λ}\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2λ}\right)} \qquad (2.11)$$

Από την 2.11 παρατηρούμε ότι ο συνημιτονικός παράγοντας είναι ανεξάρτητος από το χρόνο t, αλλά εξαρτάται από τη θέση του σημείου Σ, ενώ ο ημιτονικός παράγοντας περιέχει τη φάση της ταλάντωσης του Σ, η οποία εκτός από το χρόνο t εξαρτάται και από τη θέση του σημείου (όπως ακριβώς σε ένα τρέχον κύμα).

Μπορούμε επομένως να γράψουμε την 2.11 στη μορφή $y = A' \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}$. Ονομάζουμε πλάτος της ταλάντωσης το

$$|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\right| \quad (2.12)$$

Προφανώς είναι $0 \le |A'| \le 2A$.

➢ <u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΣΥΜΒΟΛΗΣ</u>

$\boxed{|A'_{max}| = 2A}$ όταν

$$\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\right| = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}(r_2 - r_1)}{\cancel{2}\lambda} = k\cancel{\pi} \Rightarrow r_1 - r_2 = k\lambda \quad \text{με} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{|r_1 - r_2| = n\lambda, \ \mu\varepsilon \ n = 0, 1, 2...} \quad (2.13)$$

➢ <u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΝΑΙΡΕΤΙΚΗΣ ΣΥΜΒΟΛΗΣ</u>

$\boxed{|A'_{min}| = 0}$ όταν $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\right| = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}(r_2 - r_1)}{\cancel{2}\lambda} = k\cancel{\pi} + \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow$

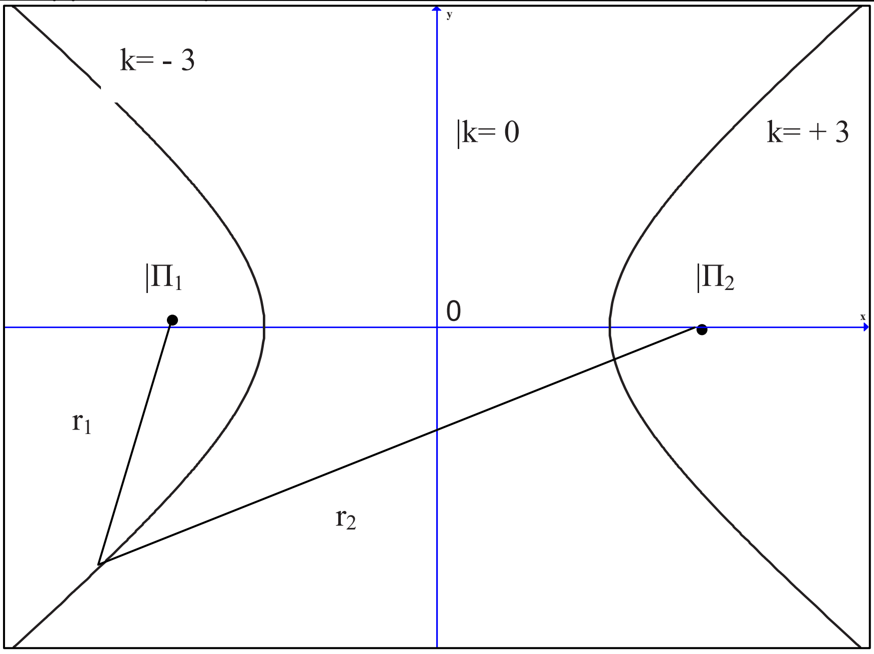
$$r_1 - r_2 = k\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \ \text{ή} \ \boxed{|r_1 - r_2| = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \ \mu\varepsilon \ n = 0, 1, 2...} \quad (2.14)$$

Επομένως τα σημεία του ελαστικού μέσου των οποίων η διαφορά αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2Α (ενισχυτική συμβολή), ενώ τα σημεία του ελαστικού μέσου των οποίων η διαφορά αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος παραμένουν ακίνητα (αναιρετική συμβολή).

➢ ΚΡΟΣΣΟΙ ΣΥΜΒΟΛΗΣ

Αν στη σχέση 2.13 δώσουμε ορισμένη τιμή στο φυσικό αριθμό n, τότε προκύπτει ότι $|r_1 - r_2| = \sigma\tau\alpha\theta.$ (π.χ $r_1 - r_2 = \pm 3\lambda$). Η σχέση αυτή είναι ένας γεωμετρικός τόπος, που δηλώνει ότι όλα τα σημεία που την επαληθεύουν ανήκουν σε τόξο ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ, που ονομάζεται ΚΡΟΣΣΟΣ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΣΥΜΒΟΛΗΣ.

Ομοίως, αν στη σχέση 2.14 δώσουμε ορισμένη τιμή στο φυσικό n, τότε προκύπτει ότι $|r_1 - r_2| = \sigma\tau\alpha\theta.$ (π.χ $r_1 - r_2 = \pm 7\frac{\lambda}{2}$). Όλα τα σημεία που την επαληθεύουν ανήκουν σε τόξο ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ, που ονομάζεται ΚΡΟΣΣΟΣ ΑΝΑΙΡΕΤΙΚΗΣ ΣΥΜΒΟΛΗΣ.



Σημεία της επιφάνειας του υγρού που επαληθεύουν τη σχέση $|r_1 - r_2| = 3\lambda$, ανήκουν στους δύο κλάδους της υπερβολής, των οποίων οι εστίες είναι οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$.
Η μεσοκάθετος του $Π_1Π_2$ είναι ο κροσσός ενισχυτικής συμβολής με k =0.

<u>Σχόλιο:</u> *Από τις εξισώσεις* 2.13 και 2.14 παρατηρούμε ότι στην ενισχυτική συμβολή τα δύο κύματα φτάνουν σε συμφωνία φάσης (δες τη σχέση 2.2.1), ενώ στην αναιρετική συμβολή τα δύο κύματα φτάνουν σε αντίθεση φάσης (δες τη σχέση 2.2.2).

Παράδειγμα 2.7. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$, δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα ίδιου πλάτους 0,5 cm και συχνότητας 5 Hz. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι 40 cm/s. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού και απέχει από τις δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις 28 cm και 44 cm, αντίστοιχα.

α. Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων, την ίδια χρονική στιγμή στο Σ;

β. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού;

γ. Πόσο είναι η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t = 2,25 s;

δ. Κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ βρίσκεται ένα δεύτερο κομμάτι φελλού. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη απόσταση του φελλού από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$, ώστε ο φελλός να παραμένει διαρκώς ακίνητος;

Λύση

Δίνονται A = 0,5 cm = $5 \cdot 10^{-3}$ m, f = 5 Hz ➔ T = 0,2 s, r_1 = 28 cm, r_2 = 44 cm και υ = 0,4 m/s. Για το μήκος κύματος των δύο κυμάτων ισχύει

$$\lambda = \upsilon T \Rightarrow \lambda = 0,4 \cdot 0,2\,m \Rightarrow \lambda = 0,08\,m$$

α. Τα δύο κύματα όταν φτάνουν στο Σ προκαλούν ταλαντώσεις με εξισώσεις

$$y_1 = 5\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2}-\frac{0,28}{0,08}\right) \Rightarrow y_1 = 5\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu\left(10\pi t - 7\pi\right)\ (S.I.)$$

$$y_2 = 5\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2}-\frac{0,44}{0,08}\right) \Rightarrow y_2 = 5\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu\left(10\pi t - 11\pi\right)\ (S.I.)$$

Η διαφορά φάσης είναι $\Phi_1 - \Phi_2 = \left(10\pi t - 7\pi\right) - \left(10\pi t - 11\pi\right) \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = 4\pi$. Δηλαδή τα δύο κύματα φτάνουν σε συμφωνία φάσης, άρα στο σημείο αυτό θα έχουμε ενισχυτική συμβολή.

β. Από την εξίσωση 2.12 έχουμε

$$\left|A'\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(r_2 - r_1\right)}{2\lambda}\right| \Rightarrow \left|A'\right| = 2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(0,44-0,28\right)}{2\cdot 0,08}\right| m$$

$$\left|A'\right| = 10^{-2}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\right| \Rightarrow \left|A'\right| = 10^{-2}\ m$$

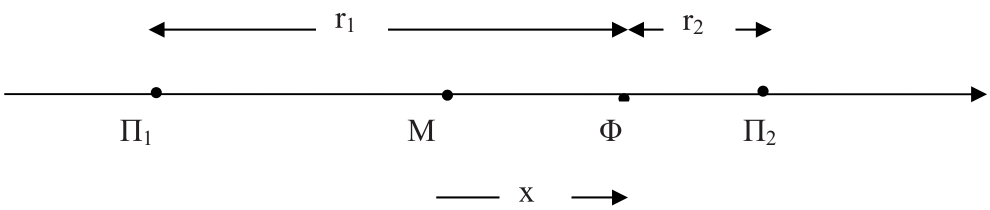
γ. Από την εξίσωση 2.11 που περιγράφει τη σύνθετη κίνηση του φελλού, με αντικατάσταση

$$y = 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,2}-\frac{0,28+0,44}{2\cdot 0,08}\right) \Rightarrow y = 10^{-2}\cdot\eta\mu\left(10\pi t - \frac{72\pi}{8}\right) \overset{t=2,25s}{\Rightarrow}$$

$$y = 10^{-2}\cdot\eta\mu\left(22,5\pi - 9\pi\right) \Rightarrow y = 10^{-2}\cdot\eta\mu 13,5\pi \Rightarrow y = -10^{-2}\ m \Rightarrow y = -1\ cm.$$

δ. Για να παραμένει ακίνητος ο δεύτερος φελλός πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη 2.14, δηλαδή πρέπει

$\left|r_1 - r_2\right| = \left(2n+1\right)\dfrac{0,08}{2}\ m,\ \mu\varepsilon\ n = 0,1,2...$ ή $\left|r_1 - r_2\right| = 4\left(2n+1\right)\ cm,\ \mu\varepsilon\ n = 0,1,2...$



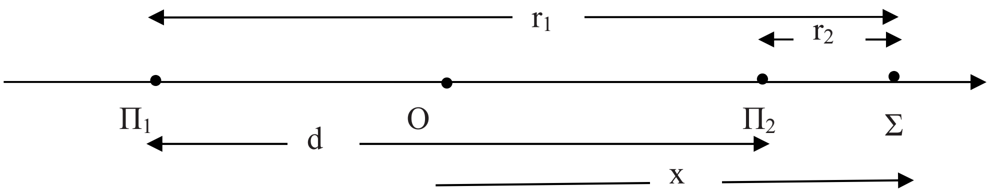
Είναι $r_1 = x + \dfrac{\Pi_1\Pi_2}{2}\ \kappa\alpha\iota\ r_2 = \dfrac{\Pi_1\Pi_2}{2} - x$. Επομένως $\left|x + \cancel{\dfrac{\Pi_1\Pi_2}{2}} - \cancel{\dfrac{\Pi_1\Pi_2}{2}} + x\right| = 4\left(2n+1\right)\ cm \Rightarrow$

$$2\left|x\right| = \left(8n+4\right)\ cm \Rightarrow \left|x\right| = \left(4n+2\right)\ cm \overset{n=0}{\Rightarrow} \left|x\right|_{\min} = 2\ cm \Rightarrow x_{\min} = \pm 2\ cm$$

Δηλαδή η ελάχιστη απόσταση από το μέσο Μ είναι 2 cm και η θέση του φελλού μπορεί να είναι 2 cm δεξιά ή αριστερά του μέσου Μ.

✓ **Τι συμβαίνει στην ευθεία που ορίζουν τα Π₁, Π₂;**

Α. Έστω σημείο Σ της ευθείας $Π_1Π_2$, έξω από το ευθ. τμήμα $Π_1Π_2$ και *Ο* το μέσον του $Π_1Π_2$. Θεωρούμε το μέσο *Ο* σαν αρχή του άξονα x΄x, ο οποίος ταυτίζεται με την ευθεία $Π_1Π_2$, με θετική φορά προς τα δεξιά.



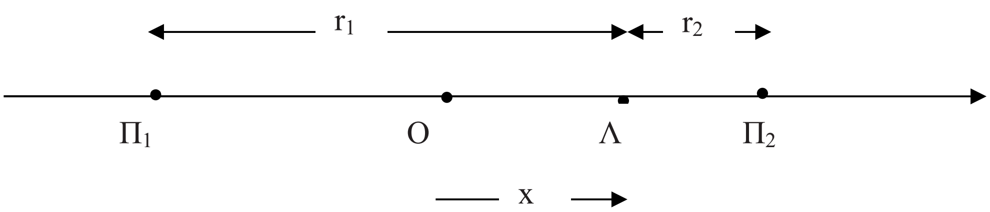
Από με το σχήμα προκύπτει ότι $|r_1 - r_2| = (Π_1Π_2) = d$. Επίσης $r_1 = x + \frac{d}{2}$ και $r_2 = x - \frac{d}{2}$.

Με αντικατάσταση στην εξίσωση 2.11 έχουμε $y = 2Aσυν\frac{2πd}{2λ} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{2x}{2λ}\right) \Rightarrow$

$y = 2Aσυν\frac{πd}{λ} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$. Παρατηρούμε ότι προκύπτει κύμα, του οποίου το πλάτος $|A'| = 2A\left|συν\frac{πd}{λ}\right|$ εξαρτάται από την απόσταση d μεταξύ των δύο πηγών. Έτσι αν d = nλ, τότε $|A'| = 2A\left|συν\frac{πn\cancel{λ}}{\cancel{λ}}\right| \Rightarrow |A'| = 2A|συνnπ| \Rightarrow |A'| = 2A|\pm1| \Rightarrow |A'| = 2A$, δηλαδή το κύμα που διαδίδεται έχει πλάτος 2Α. Αν $d = (2n+1)\frac{λ}{2}$, τότε

$|A'| = 2A\left|συν\frac{π(2n+1)\frac{λ}{2}}{λ}\right| \Rightarrow |A'| = 2A\left|συν\left(nπ + \frac{π}{2}\right)\right| \Rightarrow |A'| = 0$, δηλαδή όλα τα σημεία που βρίσκονται στον άξονα x΄x εκτός του ευθ. τμήματος $Π_1Π_2$, είναι ακίνητα.

Β. Έστω σημείο Λ που βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x και μεταξύ των πηγών $Π_1$ και $Π_2$.



Τα δύο κύματα που δημιουργούν οι πηγές διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, επομένως οι εξισώσεις που τα περιγράφουν, με αρχή του άξονα το σημείο *Ο*, είναι

$y_1 = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ και $y_2 = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]\Rightarrow$$

$$y = A\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(\cancel{\frac{t}{T}}+\frac{x}{\lambda}\right)-2\pi\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x}{\lambda}\right)}{2}\cdot\eta\mu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}+\cancel{\frac{x}{\lambda}}\right)+2\pi\left(\frac{t}{T}-\cancel{\frac{x}{\lambda}}\right)}{2}\Rightarrow$$

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \text{ ή } \boxed{y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t} \quad (2.15)$$

Παρατηρούμε ότι η φάση της ταλάντωσης του τυχαίου σημείου Λ, ΔΕΝ εξαρτάται από τη θέση του σημείου Λ, επομένως αυτό που περιγράφει η εξίσωση 2.15 ΔΕΝ μπορεί να είναι κύμα. Το ονομάζουμε όμως **ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ** με τον όρο «κύμα» να είναι προφανώς καταχρηστικός. Περιγράφει αρμονική ταλάντωση της οποίας το πλάτος διαφέρει από σημείο σε σημείο, αλλά είναι συνάρτηση μόνο της θέσης του σημείου αυτού.

Στάσιμο κύμα ονομάζουμε το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων ίδιου πλάτους, ίδιας συχνότητας που διαδίδονται στο ίδιο ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσο με αντίθετη φορά.

Επειδή τα κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες και επειδή έχουν και ίδια συχνότητα θα έχουν και ίσα μήκη κύματος.
Στάσιμο κύμα μπορεί να δημιουργηθεί και μόνο από **μία πηγή**, αν το κύμα που δημιουργεί αυτή η πηγή ανακλαστεί σε ακλόνητο εμπόδιο ή στο ελεύθερο άκρο μιας τεντωμένης χορδής. (βλέπε Στάσιμο από Ανάκλαση)

Συμβολίζουμε με $|A'|$ το πλάτος του στάσιμου. Είναι $\boxed{|A'| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|}$. (2.16)

Από τη σχέση 2.16 είναι $|A'|_{min} = 0$, όταν $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ Τα σημεία αυτά παραμένουν συνεχώς ακίνητα και ονομάζονται **δεσμοί** του στάσιμου.

Επίσης από την 2.16: $|A'|_{max} = 2A$, όταν $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Τα σημεία αυτά ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και ονομάζονται **κοιλίες** του στάσιμου.
Συνοπτικά οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} x_\delta &= (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (2.17)\\ x_\kappa &= k\frac{\lambda}{2} \quad (2.18)\end{aligned}\right\rangle k\in\mathbb{Z}$$

✓ **Απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών.**

Για να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, αρκεί να δώσουμε στον ακέραιο k δύο διαδοχικές τιμές, π.χ. τις τιμές ρ και ρ+1. Από την 2.17 θα έχουμε

$$\Delta x_\delta = \left[2(\rho+1)+1\right]\frac{\lambda}{4} - (2\rho+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \Delta x_\delta = (2\rho+3-2\rho-1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta x_\delta = \frac{\lambda}{2}} \qquad (2.19)$$

✓ **Απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών.**

Για να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών, αρκεί να δώσουμε στον ακέραιο k δύο διαδοχικές τιμές, π.χ. τις τιμές ρ και ρ+1. Από την 2.18 θα έχουμε

$$\Delta x_k = (\rho+1)\frac{\lambda}{2} - \rho\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta x_k = (\rho+1-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta x_k = \frac{\lambda}{2}} \qquad (2.20)$$

✓ **Απόσταση μεταξύ δεσμού και της επόμενης κοιλίας.**

Θέλουμε η κοιλία να προηγείται του δεσμού, πρέπει δηλαδή $x_\kappa > x_\delta$, άρα

$k\frac{\lambda}{2} > (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2k > 2n+1 \Rightarrow k > n + \frac{1}{2}$. Για την αμέσως επόμενη κοιλία πρέπει $k = n+1$

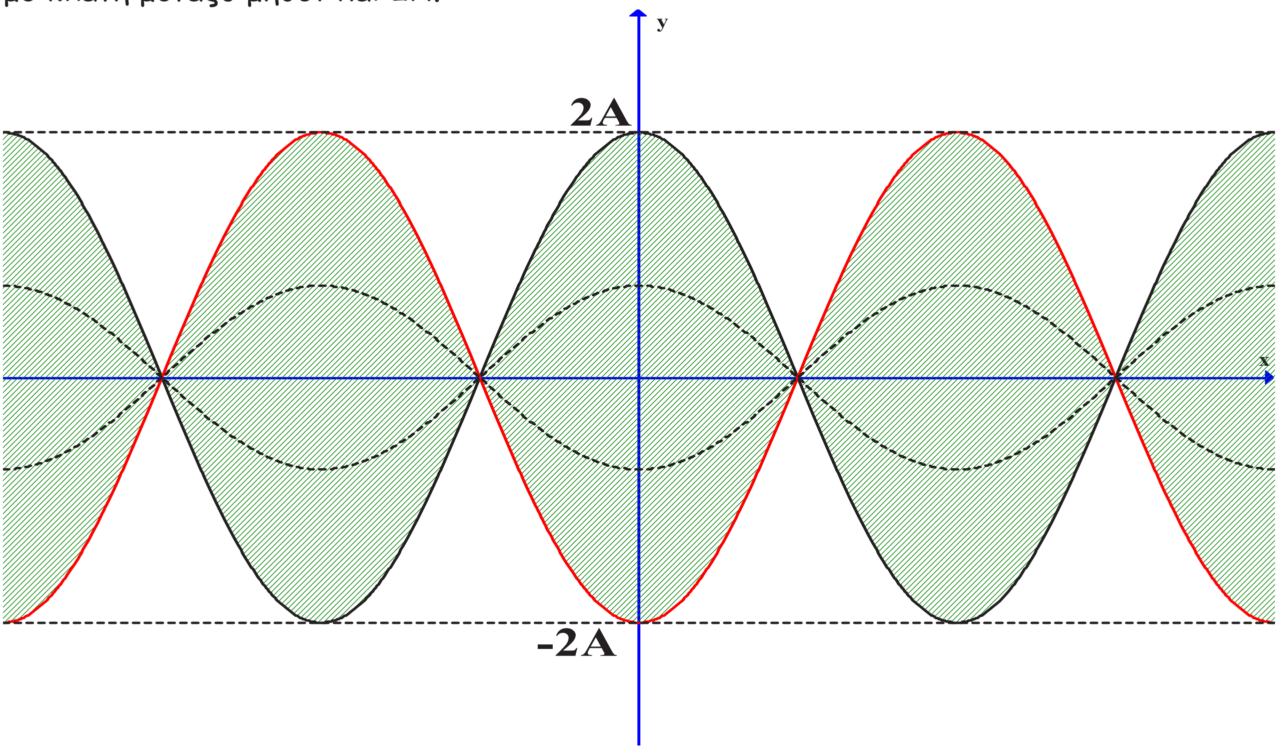
Άρα $\Delta x_{\kappa\text{-}\delta} = (n+1)\frac{\lambda}{2} - (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \Delta x_{\kappa\text{-}\delta} = (\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta x_{\kappa-\delta} = \frac{\lambda}{4}} \qquad (2.21)$$

(Για την απόσταση μεταξύ κοιλίας και του επόμενου δεσμού πρέπει

$x_\delta > x_\kappa \Rightarrow (2n+1)\frac{\lambda}{4} > k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2n+1 > 2k \Rightarrow k < n + \frac{1}{2}$, επομένως θέτουμε k = n.)

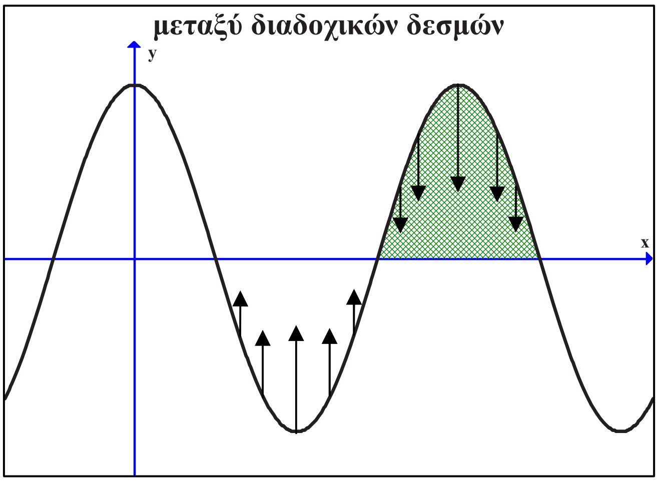
Τα σημεία του ελαστικού μέσου που επαληθεύουν τις 2.17 και 2.18 ή θα παραμένουν ακίνητα ή θα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Τα υπόλοιπα σημεία θα ταλαντώνονται με πλάτη μεταξύ μηδέν και 2Α.



Στιγμιότυπα στάσιμου

§2.4 Διαφορά φάσης

Από το στιγμιότυπο του στάσιμου προκύπτει ότι τα σημεία του μέσου που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια στιγμή απομάκρυνση με το ίδιο αλγεβρικό πρόσημο, άρα όπως προκύπτει και από την εξίσωση του στάσιμου (σχέση 2.15) έχουν την **ίδια φάση** ωt.



Για τα σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν του ίδιου δεσμού (δεξιά και αριστερά) σε απόσταση μικρότερη από λ/2, έχουν κάθε στιγμή απομακρύνσεις με αντίθετο πρόσημο, άρα αν για το ένα σημείο είναι $y_1 = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda}\right| \eta\mu\omega t$, για το άλλο θα είναι $y_2 = -2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda}\right| \eta\mu\omega t \Rightarrow$

$y_2 = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda}\right| \eta\mu(\omega t + \pi)$, δηλαδή τα σημεία αυτά έχουν διαφορά φάσης π.

Γενικά: Σε ένα στάσιμο κύμα η διαφορά φάσης μεταξύ δύο οποιοδήποτε σημείων του είναι ή μηδέν ή π.

Ενέργεια στο στάσιμο.

Η ενέργεια σε ένα στάσιμο κύμα, θεωρητικά, είναι «εγκλωβισμένη» μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών. Επομένως στο στάσιμο δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας.

*** Στην πράξη βέβαια, οι δεσμοί δεν είναι τελείως ακίνητοι, αλλά έστω και λίγο ταλαντώνονται, έτσι ώστε να «περνάει» η ενέργεια για να διατηρείται αμείωτη η ταλάντωση των σημείων του μέσου. Άλλωστε το στάσιμο κύμα είναι ένα τυπικό παράδειγμα συντονισμού, όπου η ενέργεια προσφέρεται από την πηγή με το βέλτιστο τρόπο για να αντισταθμίσει το μέγιστο ρυθμό απώλειας λόγω διαφόρων αιτιών απόσβεσης.*

Διαφορές μεταξύ στάσιμου και τρέχοντος κύματος.

1. Η φάση στο τρέχον κύμα εξαρτάται από τη θέση του σημείου, ενώ στο στάσιμο η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων του μέσου είναι μηδέν ή π.
2. Στο τρέχον κύμα η φάση μετατοπίζεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, ενώ στο στάσιμο δε μετατοπίζεται.
3. Στο τρέχον κύμα έχουμε μεταφορά ενέργειας και ορμής, ενώ στο στάσιμο δεν έχουμε ούτε μεταφορά ενέργειας ούτε μεταφορά ορμής.
4. Στο τρέχον κύμα όλα τα σημεία εκτελούν αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους Α, ενώ στο στάσιμο το πλάτος ταλάντωσης μεταβάλλεται από μηδέν στους δεσμούς, μέχρι 2Α στις κοιλίες.

Παράδειγμα 2.8. Κατά μήκος του ίδιου γραμμικού ελαστικού μέσου και προς αντίθετες κατευθύνσεις, διαδίδονται ταυτόχρονα δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις: $y_1 = A\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{λ}\right)$ και $y_2 = A\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{λ}\right)$. Από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων δημιουργείται στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα.

Για το στάσιμο κύμα γνωρίζουμε ότι

i. δύο διαδοχικοί δεσμοί του απέχουν μεταξύ τους κατά 20 cm.

ii. ένα σημείο του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση μιας κοιλίας εκτελεί αρμονική ταλάντωση συχνότητας 5 Hz και πλάτους 8 cm.

α. Να εξετάσετε αν στη θέση x = 0 υπάρχει δεσμός ή κοιλία του στάσιμου.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δύο αρμονικών κυμάτων.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου.

δ. Να σχεδιάσετε στους ίδιους άξονες τα στιγμιότυπα του στάσιμου κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{7T}{12}\ \ και\ \ t_3 = \frac{3T}{4}$, όπου T η περίοδος των κυμάτων.

<u>Λύση</u>

Από το δεδομένο i. έχουμε ότι $\frac{λ}{2} = 20\,cm \Rightarrow λ = 40\,cm \Rightarrow λ = 0,4\,m$.

Από το δεδομένο ii. έχουμε ότι f = 5 Hz για τα δύο κύματα, αλλά και για όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου, εκτός βέβαια των δεσμών. Επίσης, επειδή το σημείο που βρίσκεται στην κοιλία εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους 2A θα είναι 2A = 8 cm ➔ A = 4 cm.

α. Για x = 0 έχουμε $y_1 = Aημ2π\frac{t}{T}\ \ και\ \ y_2 = Aημ2π\frac{t}{T}$, συνεπώς

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = 2Aημ2π\frac{t}{T}$$

Η θέση x = 0 εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους 2A, άρα είναι κοιλία του στάσιμου.

β. Είναι

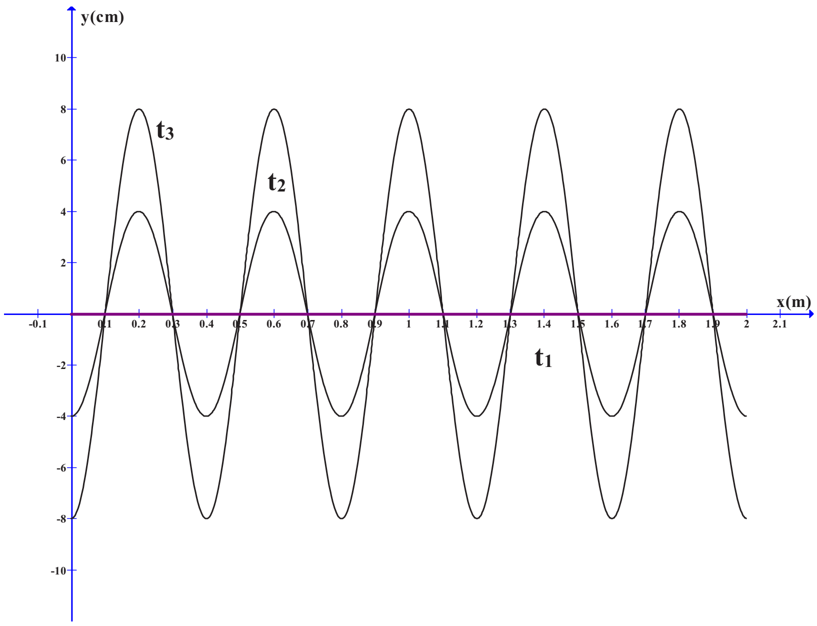
$υ = λ\cdot f \Rightarrow υ = 0,4\,m\cdot 5\,Hz \Rightarrow$

$υ = 2\,m/s$, για το κάθε κύμα.

γ. Το στάσιμο που θα δημιουργηθεί θα έχει εξίσωση

$$y = 2Aσυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}\ \ ή$$

$$y = 0,08συν5πx\cdot ημ10πt\ (S.I.)$$



δ. Για t_1 = 0 είναι y = 0 για κάθε x, συνεπώς το στιγμιότυπο είναι ευθεία που ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$.

Για $t_2 = \frac{7T}{12} = \frac{7}{12\times 5}s = \frac{7}{60}s$ είναι $y = 0{,}08συν\frac{2πx}{0{,}4}ημ10π\frac{7}{60} \Rightarrow$

$$y = 0{,}08συν5πx \cdot ημ\frac{7π}{6} \Rightarrow y = 0{,}08συν\frac{2πx}{0{,}4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -0{,}04συν5πx\ (S.I.)$$

Για $t_3 = \frac{3T}{4} = \frac{3}{4\cdot 5}s = \frac{3}{20}s$ είναι

$$y = 0{,}08συν\frac{2πx}{0{,}4}ημ10π\frac{3}{20} \Rightarrow\ y = 0{,}08συν5πx\cdot ημ\frac{3π}{2} \Rightarrow y = 0{,}08συν\frac{2πx}{0{,}4}\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$y = -0{,}08συν5πx\ (S.I.)$$

Παράδειγμα 2.9. Μια τεντωμένη χορδή εκτελεί ταλάντωση σύμφωνα με την εξίσωση

$$y = 0{,}05\cdot ημ\frac{100πx}{3}\cdot συν40πt\ (S.I.) \qquad (2.9.1)$$

α. Ποιο είναι το πλάτος, το μήκος κύματος και η ταχύτητα των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προήλθε το παραπάνω στάσιμο κύμα;

β. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών καθώς και την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών;

γ. Ποια είναι η ταχύτητα ενός σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση x = 1,5 cm τη χρονική στιγμή $t = \frac{9}{8}s$;

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι η δοθείσα εξίσωση του στάσιμου είναι διαφορετικής μορφής από την εξίσωση που αποδείξαμε στην θεωρία. (Εξίσωση 2.15). Πρέπει λοιπόν, πηγαίνοντας τώρα ανάποδα, να βρούμε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων από τις οποίες προήλθε το στάσιμο. Θα χρειαστούμε την ταυτότητα από την τριγωνομετρία:

$2ημA\cdot συνB = ημ(A+B) + ημ(A-B)$

Η 2.9.1 γίνεται: $y = \frac{0{,}05}{2}\left[ημ\left(\frac{100πx}{3}+40πt\right)+ημ\left(\frac{100πx}{3}-40πt\right)\right] \Rightarrow$

$$y = \frac{0{,}05}{2}\left[ημ2π\left(20t+\frac{50x}{3}\right)-ημ2π\left(20t-\frac{50x}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$y = \frac{0{,}05}{2}\left[ημ2π\left(20t+\frac{50x}{3}\right)+ημ2π\left(20t-\frac{50x}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$. Επομένως τα δύο κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις: $y_1 = 0{,}025\cdot ημ2π\left(20t-\frac{50x}{3}+0{,}5\right)$ (S.I.) και

$$y_2 = 0{,}025\cdot ημ2π\left(20t+\frac{50x}{3}\right)\ \text{(S.I).}$$

Αντιστοιχίζοντας την εξίσωση y_2 με την εξίσωση ενός κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση, παίρνουμε: Α = 0,025 m ή Α = 2,5 cm, $20\cancel{t} = \frac{\cancel{t}}{T} \Rightarrow T = 0,05\,s$ και $\frac{x}{\lambda} = \frac{50x}{3} \Rightarrow \lambda = 0,06\,m$ ή $\lambda = 6\,cm$. Η ταχύτητα υ του κύματος είναι $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,06}{0,05} m/s \Rightarrow \upsilon = 1,2\,m/s$.

β. Στους δεσμούς πρέπει |Α΄| = 0 άρα αρκεί
$\eta\mu\frac{100\pi x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{100\pi x}{3} = k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{100}k\,(m)\;k \in \mathbb{Z}$ [Παρατηρείστε ότι για k = 0 είναι x = 0, δηλαδή η αρχή είναι δεσμός.]
Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών θα υπολογιστεί αν δώσουμε στον ακέραιο k δύο διαδοχικές τιμές, π.χ. τις ρ και ρ+1.

Για k = ρ: $x_\rho = \frac{3}{100}\rho$ και για k = ρ+1: $x_{\rho+1} = \frac{3}{100}(\rho+1)$. Επομένως η ζητούμενη απόσταση είναι $\Delta x = x_{\rho+1} - x_\rho \Rightarrow \Delta x = \frac{3}{100}\;m$ ή $\Delta x = 3\;cm$.

γ. Η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου της χορδής είναι

$$V = \frac{dy}{dt} \Rightarrow V = 0,05 \cdot 40\pi \cdot \eta\mu\frac{100\pi x}{3} \cdot \left(-\eta\mu 40\pi t\right) \Rightarrow V = -2\pi \cdot \eta\mu\frac{100\pi x}{3}\eta\mu 40\pi t\;(S.I.) \qquad (2.9.2)$$

Για x = 1,5 cm = 0,015 m και $t = \frac{9}{8}s$, η 2.9.2 δίνει $V = -2\pi \cdot \eta\mu\frac{100\pi \cdot 0,015}{3}\eta\mu 40\pi\frac{9}{8} \Rightarrow$
$V = -2\pi \cdot \eta\mu 5\pi \cdot \eta\mu 45\pi \Rightarrow V = 0$.

[**Σχόλιο:** Επειδή η εξίσωση του κύματος είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, της θέσης x και του χρόνου t, ο σωστός συμβολισμός για την ταχύτητα ταλάντωσης είναι $V = \frac{\partial y}{\partial t}$ (μερική παράγωγος).
Μπορούμε, αν θέλουμε, να αποφύγουμε την παραγώγιση. Στην περίπτωση αυτή αρκεί στην εξίσωση του στάσιμου 2.9.1, να αντικαταστήσουμε μόνο την τιμή της θέσης x, οπότε να βρούμε τη συνάρτηση y = f(t) ➔ y = Α΄συνωt, οπότε V = ω Α΄συν(ωt + π/2) ➔ V = - ω Α΄ημωt. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε και το t και υπολογίζουμε την ταχύτητα V.]

§2.5 ΣΤΑΣΙΜΟ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

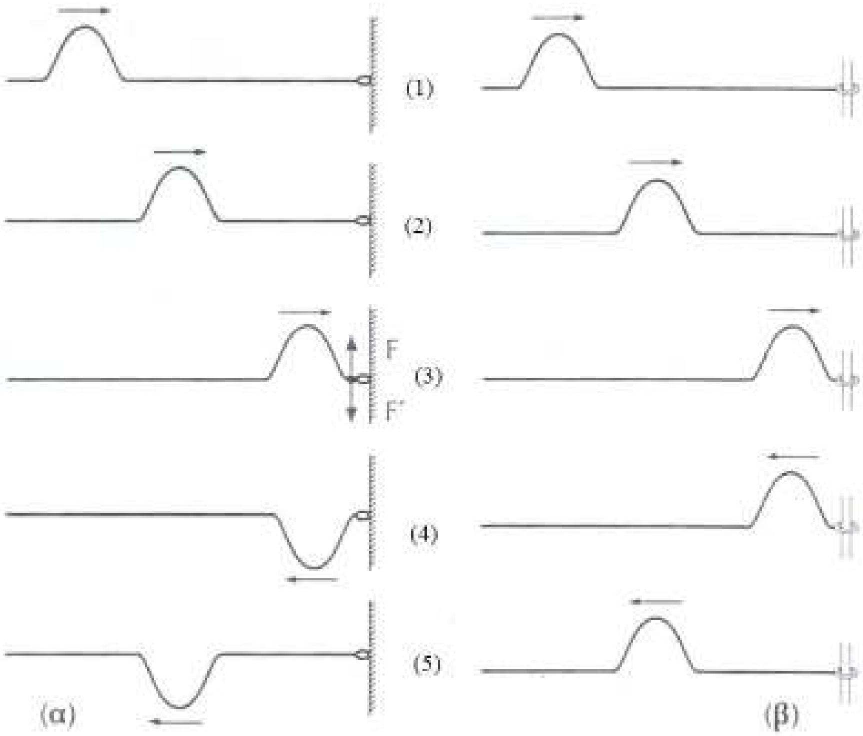
Όπως αναφέρθηκε, είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε στάσιμο κύμα χρησιμοποιώντας μόνο μία πηγή αρμονικών κυμάτων, εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο της ανάκλασης των κυμάτων.

Όταν ένα κύμα που παράγει μια πηγή ανακλάται σε ένα εμπόδιο, συμβάλλει με το κύμα που προέρχεται από την πηγή και, με κατάλληλες προϋποθέσεις, δημιουργείται στάσιμο.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις (α) και (β), η ανάκλαση να γίνει στο σταθερό άκρο ή στο ελεύθερο άκρο.

Όταν η ανάκλαση γίνει σε σταθερό άκρο, τότε στο άκρο αυτό δημιουργείται ΔΕΣΜΟΣ, ενώ αν η ανάκλαση γίνει σε ελεύθερο άκρο, τότε στο άκρο αυτό δημιουργείται ΚΟΙΛΙΑ.

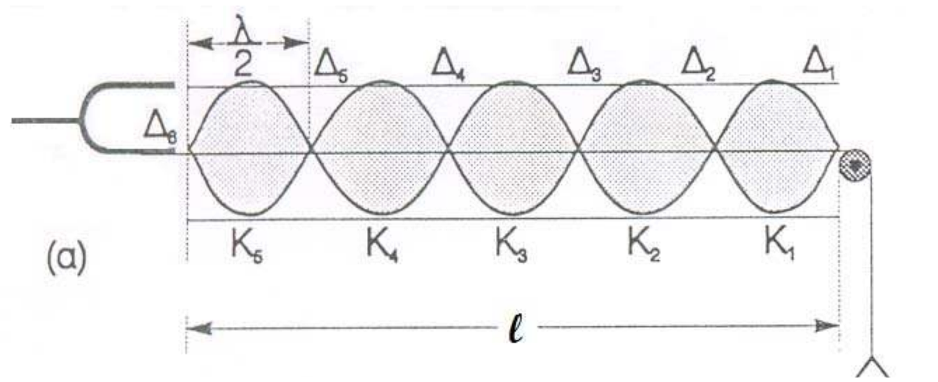
Ας θεωρήσουμε μια τεντωμένη χορδή της οποίας το ένα άκρο είναι ακλόνητο. Στη χορδή διαδίδεται ένας κυματικός παλμός, όπως φαίνεται στο σχήμα (α1). Ο παλμός διαδίδεται προς το ακλόνητο άκρο (α2) και φτάνει σ' αυτό. Στη θέση αυτή (α3) η χορδή ασκεί δύναμη F στο σημείο στήριξης. Σύμφωνα με το νόμο ΔΡΑΣΗΣ – ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ και το σημείο στήριξης ασκεί δύναμη F΄ αντίθετη της F. Το αποτέλεσμα της δύναμης F΄ είναι η αντιστροφή του παλμού (α4), ο οποίος διαδίδεται αντίθετα. Αν τώρα αντί για παλμό προσπίπτει κύμα, το ανακλώμενο κύμα θα διαδίδεται αντίθετα με την εγκάρσια απομάκρυνσή του αντίθετη. Το ακλόνητο σημείο δε μπορεί να κινηθεί, επομένως για το σημείο αυτό είναι $y = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -y_1$. Αυτό σημαίνει ότι το ανακλώμενο κύμα και το προσπίπτων παρουσιάζουν διαφορά φάσης π.

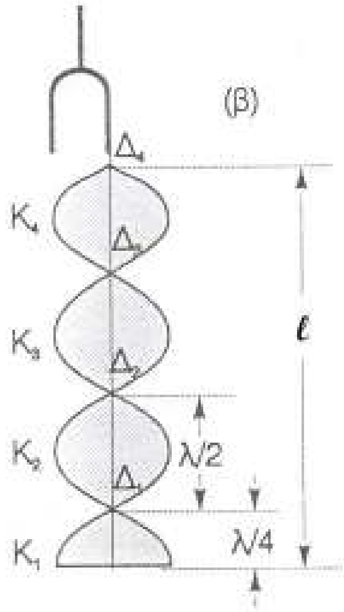


Κατά την ανάκλαση σε ακλόνητο εμπόδιο παρουσιάζεται μια ασυνέχεια στη φάση κατά π ή αλλιώς ένα ΠΗΔΗΜΑ ΦΑΣΗΣ.

Αν αντί να δέσουμε το άκρο της χορδής σε ακλόνητο σημείο, το δέσουμε σε ένα ελαφρύ δαχτυλίδι, το οποίο είναι περασμένο σε κατακόρυφο σωλήνα και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, (σχήμα β) ο κυματικός παλμός ανακλάται στο άκρο αυτό ΧΩΡΙΣ αλλαγή φάσης, οπότε στο άκρο αυτό, αν αντί για παλμό προσπίπτει κύμα, έχουμε κοιλία.

Κατά την ανάκλαση σε ελεύθερο άκρο το προσπίπτων και το ανακλώμενο κύμα έχουν την ΙΔΙΑ ΦΑΣΗ.





Στα σχήματα (α) και (β) φαίνεται η δημιουργία στάσιμου με πηγή ένα διαπασών και ανάκλαση σε ακλόνητο άκρο (α) και σε ελεύθερο άκρο (β).

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΣΕ ΧΟΡΔΗ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Το άκρο Ο μιας τεντωμένης χορδής ΟΒ ορισμένου μήκους l εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y = A ημωt. Το κύμα που δημιουργείται, διαδίδεται κατά μήκος της χορδής και ανακλάται στο ακλόνητο άκρο της Β. Το ανακλώμενο κύμα συμβάλλει με το προσπίπτων και έτσι δημιουργείται στη χορδή στάσιμο κύμα. Θεωρούμε ότι η χορδή ΟΒ ανήκει στον άξονα x΄x, το άκρο Ο ταυτίζεται με την αρχή του άξονα και σα θετική φορά από το άκρο Ο προς το άκρο Β.

Το κύμα που δημιουργεί η ταλάντωση του Ο έχει εξίσωση $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. (2.22)

Η ταλάντωση του άκρου Β (x = l) είναι $y_{1(B)} = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\ell}{\lambda}\right)$. Για το ανακλώμενο κύμα, λόγω του πηδήματος φάσης, στο ίδιο σημείο Β ισχύει $y_{2(B)} = A\cdot\eta\mu\left[\omega\left(t-\frac{\ell}{\upsilon}\right)+\pi\right]$ ή

$y_{2(B)} = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\ell}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)$. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ενός τυχαίου σημείου Σ στη θέση x εξ αιτίας του ανακλώμενου κύματος είναι

$$y_2 = A\cdot\eta\mu\left[\omega\left(t-\frac{\ell}{\upsilon}-\frac{\ell-x}{\upsilon}\right)+\pi\right] \Rightarrow y_2 = A\cdot\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\ell}{\upsilon T}-\frac{\ell-x}{\upsilon T}\right)+\pi\right]$$

$$\Rightarrow y_2 = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2\ell}{\lambda}+\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right) \qquad (2.23)$$

Για τη συνολική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του Σ, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, ισχύει $y = y_1 + y_2$, επομένως με αντικατάσταση των 2.22 και 2.23 παίρνουμε

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{2\ell}{\lambda}+\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)-\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{x}{\lambda}\right)}{2}\cdot\eta\mu 2\pi\frac{\left(\frac{t}{T}-\frac{2\ell}{\lambda}+\cancel{\frac{x}{\lambda}}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{t}{T}-\cancel{\frac{x}{\lambda}}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$y = 2A\cdot\eta\mu 2\pi\frac{\ell-x}{\lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\ell}{\lambda}\right) \qquad (2.24)$$

Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $|A'| = 2A\left|\eta\mu 2\pi\frac{\ell-x}{\lambda}\right|$ (2.25)

Παρατηρούμε ότι για **x** = *l* είναι |Α΄| = 0, δηλαδή η θέση Β (**x** = *l*) είναι δεσμός.
Αν θέλουμε η αρχή Ο να είναι κοιλία, πρέπει για x = 0 να είναι |Α΄| = 2Α , δηλαδή αρκεί

$$\left|\eta\mu 2\pi\frac{\ell-0}{\lambda}\right| = 1 \Rightarrow 2\cancel{\pi}\frac{\ell}{\lambda} = k\cancel{\pi}+\frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \frac{2\ell}{\upsilon}f = \frac{1}{2}(2k+1) \Rightarrow f = (2k+1)\frac{\upsilon}{4\ell}, \quad k\in\mathrm{N} \qquad (2.26)$$

Σύμφωνα με τη σχέση 2.26 στάσιμο στην περίπτωση αυτή, δημιουργείται μόνο αν η συχνότητα ταλάντωσης της πηγής είναι περιττό πολλαπλάσιο της ποσότητας $\frac{\upsilon}{4\ell}$.

Για k = 0 προκύπτει $f_1 = \frac{\upsilon}{4\ell}$, που είναι η μικρότερη τιμή της συχνότητας για την οποία δημιουργείται στάσιμο και ονομάζεται <u>1η αρμονική</u>. Ομοίως για k = 1 έχουμε τη δεύτερη αρμονική κ.ο.κ.
Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να γίνει η μελέτη για άλλες περιπτώσεις δημιουργίας στάσιμου σε χορδή ορισμένου μήκους.

Παράδειγμα 2.10. Το άκρο O μιας ομογενούς χορδής OB διεγείρεται σε ταλάντωση και το άλλο άκρο της B στερεώνεται σε αβαρές δαχτυλίδι, που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές, κατά μήκος κατακόρυφου σωλήνα μικρότερης διαμέτρου. Στο O προκαλείται εγκάρσια αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την εξίσωση y = 0,04 ημ20πt (S.I.). Το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά μήκος της χορδής με ταχύτητα 4 m/s.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, που δημιουργείται από το προσπίπτων και το ανακλώμενο στο άκρο B, κύμα. Το μήκος της χορδής είναι 1,2 m. Θεωρούμε σα χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το άκρο O της χορδής και αρχή του συστήματος συντεταγμένων(x = 0) το άκρο O με θετική φορά για τον ημιάξονα Ox από το O προς το B.

γ. Να καθορίσετε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου, από τη θέση x = 10 cm ως τη θέση x = 120 cm κατά τις χρονικές στιγμές t_1 = 1,025 s και $t_2 = t_1 + \frac{3T}{4}$.

Θεωρούμε ότι στη χορδή δημιουργείται στάσιμο με κοιλίες στα άκρα O και B.

<u>Λύση</u>

Από την εξίσωση ταλάντωσης του άκρου O προκύπτει ότι A = 0,04 m και ω = 20π rad/s. Είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{20\pi} \Rightarrow T = 0,1\ s$ και $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10\ Hz$.

α. Για το μήκος κύματος ισχύει $\lambda = \upsilon \cdot T \Rightarrow \lambda = 4\,m/s \cdot 0,1\,s \Rightarrow \lambda = 0,4\ m$.

β. Έστω τυχαίο σημείο M στη θέση με συντεταγμένη x. Η ταλάντωσή του M εξ αιτίας του κύματος που δημιουργεί η ταλάντωση του O είναι $y_1 = A \cdot \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$. Το άκρο B, λόγω του ίδιου κύματος θα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y_{1(B)} = A \cdot \eta\mu\omega\left(t - \frac{\ell}{\upsilon}\right)$. Επειδή το άκρο B είναι ελεύθερο, το ανακλώμενο κύμα είναι σε φάση με το προσπίπτων. Η εξίσωση ταλάντωσης του M εξ αιτίας του ανακλώμενου κύματος είναι

$$y_2 = A \cdot \eta\mu\omega\left(t - \frac{\ell}{\upsilon} - \frac{\ell - x}{\upsilon}\right) \Rightarrow y_2 = A \cdot \eta\mu\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon} - \frac{2\ell}{\upsilon}\right) \Rightarrow y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\upsilon T} - \frac{2\ell}{\upsilon T}\right) \Rightarrow$$

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2\ell}{\lambda}\right)$$

Η συνολική απομάκρυνση του M από τη θέση ισορροπίας του είναι $y = y_1 + y_2$ ➔

$$y = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2\ell}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\ell - x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda}\right) \quad (2.10.1)$$

$$y = 0,08\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{1,2 - x}{0,4}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,1} - \frac{1,2}{0,4}\right) \Rightarrow y = 0,08\sigma\upsilon\nu 2\pi(3 - 2,5x)\eta\mu 2\pi(10t - 3)$$ ή

$$y = 0,08 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (S.I.) \quad (2.10.2)$$

γ. Για τα σημεία της χορδής που είναι **δεσμοί**, πρέπει, από την 2.10.1 να είναι

$$\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\ell - x_\Delta}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi\frac{\ell - x_\Delta}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_\Delta = \ell - (2k+1)\frac{\lambda}{4} \text{ ή } x_\Delta = 1,2 - (2k+1)\frac{0,4}{4} \Rightarrow$$

$x_\Delta = 1,1 - 0,2k \ \ (m)$ (2.10.3)

Πρέπει $0 < x_\Delta < \ell \Rightarrow 0 < 1,1 - 0,2k < 1,2 \Rightarrow -1,1 < -0,2k < 0,1 \Rightarrow -0,5 < k < 5,5 \Rightarrow$

$k = 0,1,2,3,4,5$. Αντικαθιστούμε τις επιτρεπτές τιμές του ακέραιου k στην 2.10.3

k	0	1	2	3	4	5
x_Δ (m)	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1

Για τα σημεία της χορδής που είναι **κοιλίες**, πρέπει από την 2.10.1 να είναι

$$\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\ell - x_K}{\lambda}\right| = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\ell - x_K}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi\frac{\ell - x_K}{\lambda} = k\pi \Rightarrow x_K = \ell - k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$x_K = 1,2 - 0,2k \ \ (m)$ (2.10.4)

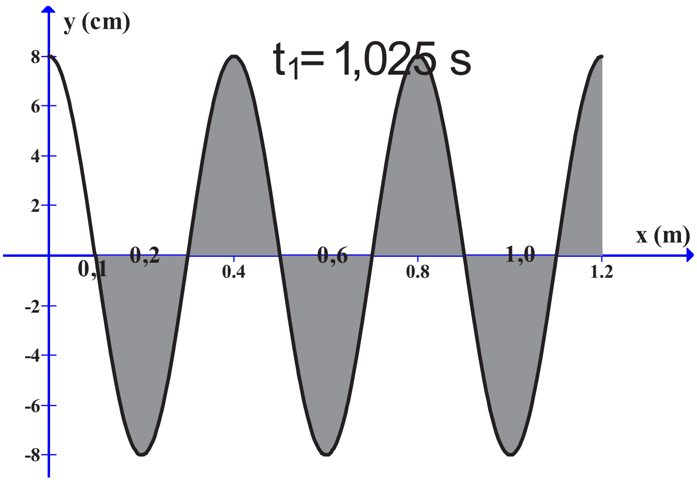
Πρέπει $0 \le x_K \le \ell \Rightarrow 0 \le 1,2 - 0,2k \le 1,2 \Rightarrow -1,2 \le -0,2k \le 0 \Rightarrow 0 \le k \le 6 \Rightarrow$

$k = 0,1,2,3,4,5,6$. Αντικαθιστούμε τις επιτρεπτές τιμές του ακέραιου k στην 2.10.4

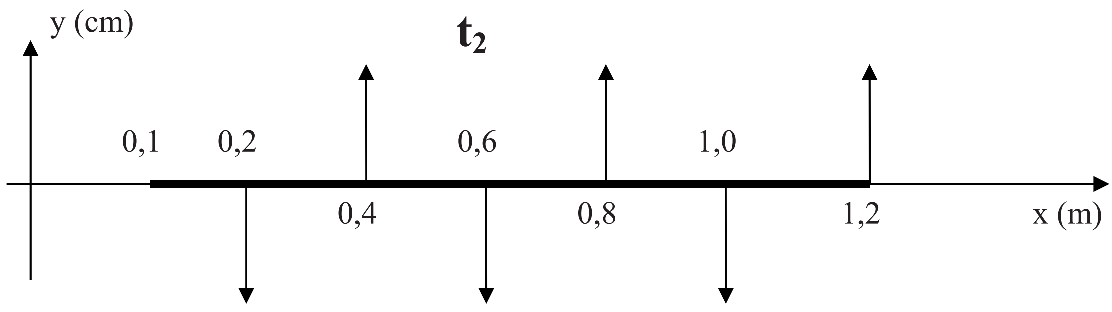
k	0	1	2	3	4	5	6
x_K (m)	1,2	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0

δ. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του στάσιμου 2.10.2 την τιμή του χρόνου t_1 = 1,025 s και έχουμε: $y = 0,08 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t_1 \Rightarrow y = 0,08 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu 20\pi \cdot 1,025 \Rightarrow$

$$y = 0,08 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu\left(20\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 0,08 \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \ (S.I.)$$



Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{3T}{4}$ το άκρο Ο θα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση. Επομένως όλα τα σημεία της χορδής θα διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους και η χορδή θα ταυτίζεται με τον άξονα.



Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση κίνησης των κοιλιών.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*
Παρατήρηση: *Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα υ για την ταχύτητα του κύματος και V για την ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου.*

2.72. Δύο πηγές χαρακτηρίζονται ως σύγχρονες όταν
α. έχουν ίδια συχνότητα και το ίδιο πλάτος.
β. δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα.
γ. έχουν σταθερή διαφορά φάσης.
δ. αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα.

2.73. Για να έχουμε φαινόμενο συμβολής πρέπει τα κύματα να
α. διαδίδονται στο ίδιο μέσο.
β. προέρχονται από σύγχρονες πηγές.
γ. είναι μηχανικά.
δ. να είναι εγκάρσια και να προέρχονται από σύγχρονες πηγές.

2.74. Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ ταλαντώνονται χωρίς αρχική φάση στην επιφάνεια ενός υγρού με συχνότητα 2 *Hz* και το ίδιο πλάτος 0,05 *m*, παράγοντας αρμονικά εγκάρσια κύματα, που διαδίδονται με ταχύτητα 12 *m/s*. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις 4 *m* και 6 *m* αντίστοιχα. Συνεπώς
α. το σημείο Μ εξ αιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων ταλαντώνεται με πλάτος 0,1 *m*.
β. Η ταχύτητα της σύνθετης αρμονικής ταλάντωσης του Μ δίνεται από την εξίσωση $V = 0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(4\pi \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) \ \ (S.I)$
γ. τη στιγμή που το κύμα από την πηγή $Π_2$ φτάνει στο σημείο Μ, η απομάκρυνση του Μ από τη Θ.Ι του είναι $2{,}5\sqrt{3}\ cm$.
δ. το σημείο Μ αρχίζει να εκτελεί τη σύνθετη αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{3}s$.

2.75. Δύο σύγχρονες πηγές ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος στην επιφάνεια ενός υγρού παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ = 1 m. Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου Μ της επιφάνειας του υγρού, εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων είναι $y = -2A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{2}\right) \ \ (S.I)$. Συνεπώς το σημείο Μ
α. ισαπέχει από τις δύο πηγές.
β. ταλαντώνεται με πλάτος – 2Α.
γ. απέχει από τη μία πηγή απόσταση 2 m και από την άλλη απόσταση 1 m.
δ. ταλαντώνεται με περίοδο διπλάσια από την περίοδο ταλάντωσης των πηγών των δύο κυμάτων.

2.76. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών σ' ένα στάσιμο κύμα είναι

α. $\frac{\lambda}{4}$ **β.** $\frac{\lambda}{2}$

γ. λ **δ.** 2λ

όπου λ το μήκος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

2.77. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών σ' ένα στάσιμο κύμα είναι

α. $\frac{\lambda}{2}$ **β.** $\frac{\lambda}{4}$

γ. 2 λ **δ.** $\frac{\lambda}{8}$

όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

2.78. Σε ένα στάσιμο κύμα το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου δίνεται από τη σχέση: $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$. Στη σχέση αυτή το x συμβολίζει την απόσταση

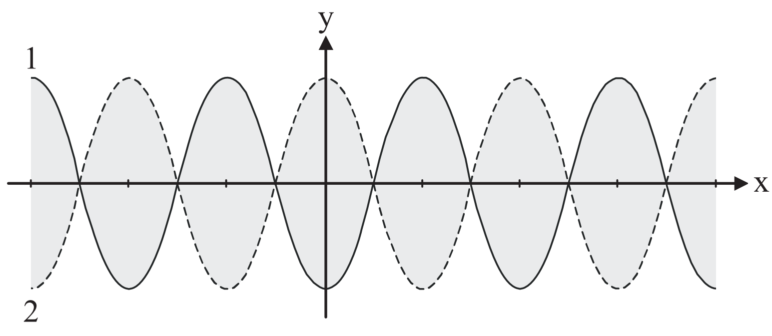
α. από τον πρώτο δεσμό.
β. από την πρώτη κοιλία.
γ. μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών.
δ. μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών.

2.79. Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που περιλαμβάνονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ενός στάσιμου κύματος έχουν

α. διαφορετική συχνότητα ταλάντωσης.
β. ίδιο πλάτος ταλάντωσης.
γ. διαφορετική φάση.
δ. ίδια φάση.

2.80. Δύο σημεία ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο εγκάρσιο κύμα, βρίσκονται το ένα αριστερά και το άλλο δεξιά ενός δεσμού Δ και απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{3}$. Τα σημεία αυτά έχουν

α. διαφορετική συχνότητα ταλάντωσης.
β. διαφορά φάσης π.
γ. ίδια φάση.
δ. διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$.



2.81. Στο σχήμα φαίνονται δύο στιγμιότυπα στάσιμου εγκάρσιου κύματος, το οποίο δημιουργείται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον. Αν το στιγμιότυπο (1) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4}$ (Τ η περίοδος των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα), τότε το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή

α. $\frac{3T}{4}$ **β.** $\frac{T}{2}$ **γ.** T **δ.** $\frac{T}{3}$

2.82. Κατά μήκος ομογενούς χορδής ΟΒ, η οποία εκτείνεται στη διεύθυνση του προσανατολισμένου ημιάξονα Οx , έχει μήκος L, με ακλόνητα τα άκρα της Ο και Β, δημιουργείται στάσιμο κύμα με εξίσωση $y = 2A\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t$.

Α. Οι θέσεις των κοιλιών υπολογίζονται από τη σχέση: ($k\epsilon\mathbb{N}$)

α. $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$. **β.** $x = k\frac{\lambda}{2}$. **γ.** $x = k\frac{\lambda}{4}$. **δ.** x = kλ.

Β. Για το μήκος L της χορδής ισχύει η σχέση ($k\epsilon\mathbb{N}$)

α. L = kλ. β. $L = k\frac{\lambda}{4}$. γ. $L = k\frac{\lambda}{2}$. δ. $L = (2k-1)\frac{\lambda}{4}$.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν την κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

2.83. Το φαινόμενο της συμβολής εμφανίζεται μόνο αν οι πηγές των δύο κυμάτων είναι σύγχρονες και με το ίδιο πλάτος.

2.84. Τα σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, εξ' αιτίας της συμβολής δύο όμοιων αρμονικών κυμάτων, βρίσκονται πάνω σε παραβολές.

2.85. Το στάσιμο κύμα είναι το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων ίδιου πλάτους, ίδιας συχνότητας, που έχουν ίδια ταχύτητα και διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση.

2.86. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών στάσιμου κύματος είναι $\frac{\lambda}{2}$, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

2.87. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών στάσιμου κύματος είναι $\frac{\lambda}{2}$, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

2.88. Στο στάσιμο κύμα, η απόσταση ενός δεσμού από την πλησιέστερή του κοιλία είναι $\frac{\lambda}{4}$, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

2.89. Όλα τα σημεία γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, στο οποίο δημιουργείται στάσιμο κύμα, ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος.

2.90. Σε μια χορδή δημιουργούνται στάσιμα κύματα. Συνεπώς

α. το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου της χορδής είναι σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου

β. υπάρχουν σημεία της χορδής που είναι ακίνητα.

γ. όλα τα σημεία της χορδής έχουν την ίδια ενέργεια ταλάντωσης.

δ. η ενέργεια δε μεταδίδεται, αλλά κάθε σημείο έχει την δική του ενέργεια.

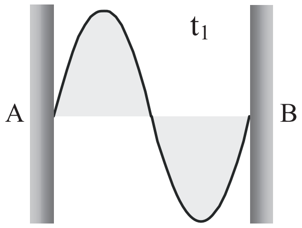
2.91. Σε στάσιμο κύμα, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου τα οποία περιλαμβάνονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση.

2.92. Σε στάσιμο κύμα, η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται το ένα αριστερά και το άλλο δεξιά ενός δεσμού, σε απόσταση $\frac{\lambda}{3}$ μεταξύ τους, είναι π (rad).

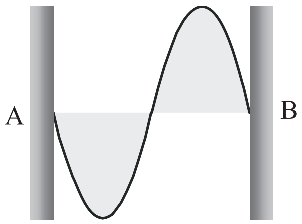
Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

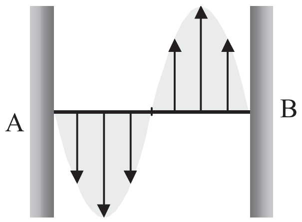
2.93. Τη χρονική στιγμή t_1, το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος το οποίο σχηματίζεται σε χορδή της οποίας τα άκρα A και B είναι στερεωμένα είναι το (α).
Να αντιστοιχίσετε τα στιγμιότυπα (β), (γ), (δ) με τις χρονικές στιγμές της δεξιάς στήλης.
(Τα βέλη παριστάνουν τις ταχύτητες των σημείων της χορδής).



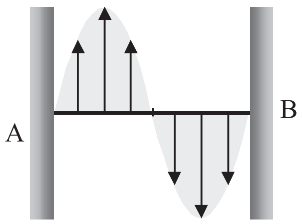
(α)



(β)



(γ)



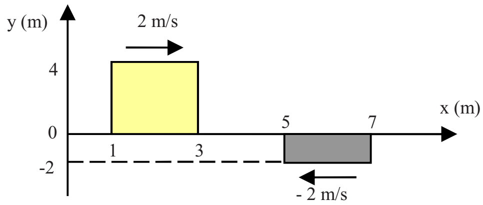
(δ)

1. $t_1 + \frac{T}{4}$
2. $t_1 + \frac{3T}{4}$
3. $t_1 + \frac{T}{2}$
4. $t_1 + \frac{T}{8}$

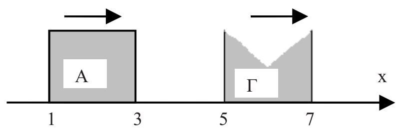
2.94. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα στοιχεία της δεξιάς στήλης.	
Α. Φάση ταλάντωσης ενός μορίου γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$	**1.** $A = 2A\left\|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right\|$
Β. Φάση ταλάντωσης ενός μορίου γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$	**2.** $\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t + x)$
Γ. Πλάτος στάσιμου κύματος το οποίο δημιουργείται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον από τη συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων ίδιου πλάτους Α, ίδιας συχνότητας f και ίδιου μήκους κύματος λ.	**3.** $\varphi = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

2.95. Δύο κυματικοί παλμοί κινούνται με αντίθετες ταχύτητες και συμβάλλουν. Αν το διπλανό σχήμα απεικονίζει το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t = 0, να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ s και $t_2 = 1,25$ s.



2.96. Ο παλμός Α του διπλανού σχήματος, όταν συναντήθηκε με έναν άγνωστο παλμό Β, δημιούργησε τον παλμό Γ. Να σχεδιάσετε την εικόνα του παλμού Β πριν συναντηθεί με τον Α.



2.97. Τι ονομάζουμε στάσιμο κύμα; Ποια σημεία του ελαστικού μέσου ονομάζονται δεσμοί και ποια κοιλίες;

2.98. Σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον δημιουργείται στάσιμο κύμα. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ

α. δύο διαδοχικών δεσμών;
β. δύο διαδοχικών κοιλιών;
γ. ενός δεσμού από την πλησιέστερή του κοιλία;

2.99. Δύο μικρά κομμάτια φελλού $Φ_1$ και $Φ_2$ επιπλέουν στην επιφάνεια υγρού στην οποία διαδίδονται κύματα, που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Ο φελλός $Φ_1$ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του $Π_1Π_2$, ενώ ο φελλός $Φ_2$ έχει αντίστοιχα αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Οι μέγιστες ταχύτητες ταλάντωσης των δύο φελλών είναι αντίστοιχα $υ_{1,max} = 2\ υ_{2,max}$. Μια πιθανή τιμή για τη διαφορά $|r_1 - r_2|$ είναι

α. $\frac{\lambda}{2}$ **β.** λ **γ.** μια τιμή μεταξύ $\frac{\lambda}{2}$ και λ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

2.100. Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων ταλαντώνονται στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος Α και παράγουν κύματα με μήκος κύματος 2 m. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r_1 και r_2, και ταλαντώνεται εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων σύμφωνα με την εξίσωση $y_M = -2Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right)$. Συνεπώς

α. Το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος – 2Α.

β. το άθροισμα των αποστάσεων $r_1 + r_2$, είναι 1 m.

γ. το σημείο Μ απέχει από τις πηγές αποστάσεις 1 m και 2 m.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2.101. Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$, αρμονικών κυμάτων ταλαντώνονται στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος Α και παράγουν κύματα με μήκος κύματος λ. Αν η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι 1,3λ, τότε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ υπάρχουν

α. ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

β. τρία σημεία ενισχυτικής συμβολής.

γ. πέντε σημεία ενισχυτικής συμβολής.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

2.102. Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.

β. Να προσδιορίσετε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών.

Αρχή του άξονα $x'x$ θεωρείται το σημείο Ο για το οποίο τη στιγμή t = 0 είναι y = 0 και $V > 0$.

2.103. Δύο αρμονικά κύματα διαδίδονται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου στη διεύθυνση του άξονα $x'x$ με αντίθετες κατευθύνσεις και περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = A\eta\mu(kx - \omega t)$ και $y_2 = A\eta\mu(kx + \omega t)$ όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (κυματικός αριθμός).

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

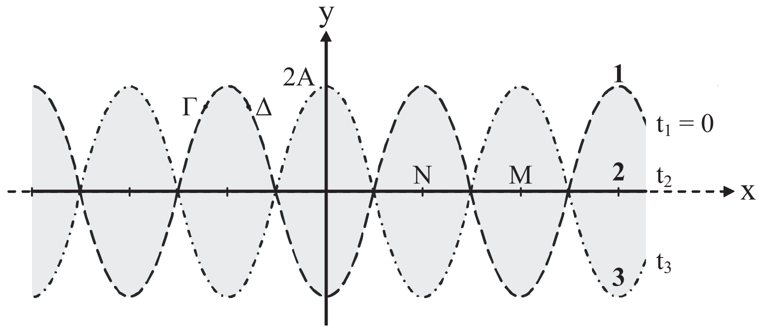
α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργεί η συμβολή των δυο κυμάτων είναι $y = 2A\eta\mu kx \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$.

β. Οι θέσεις των κοιλιών είναι $x_K = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

γ. Οι θέσεις των δεσμών είναι $x_\Delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

***δ.** Η ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών στις θέσεις $x_k = (4n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$ δίνεται από την εξίσωση $V = -2\omega A\eta\mu\omega t$

2.104. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου σχηματίζεται στάσιμο κύμα, του οποίου τρία διαδοχικά στιγμιότυπα φαίνονται στο σχήμα.
Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;



α. Το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T}{4}$, ενώ το στιγμιότυπο (3) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_3 = \frac{T}{2}$.

β. Τη χρονική στιγμή t_2 το σημείο Μ του ελαστικού μέσου κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ενώ το σημείο Ν κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

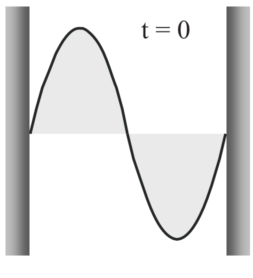
γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σημεία Γ και Δ είναι ίση με μηδέν.

δ. Το σημείο Μ του ελαστικού μέσου, τη χρονική στιγμή $t_2 + \Delta t$ όπου $\Delta t < \frac{T}{4}$ (Τ η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελούν τα σημεία του ελαστικού μέσου) έχει, λόγω της ταλάντωσής του, μόνο δυναμική ενέργεια.

2.105. Α. Για κοιλία και δεσμό στάσιμου κύματος να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις

α. πλάτους σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο.

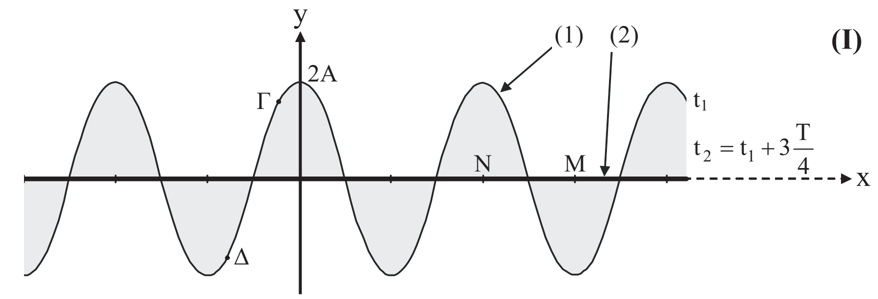


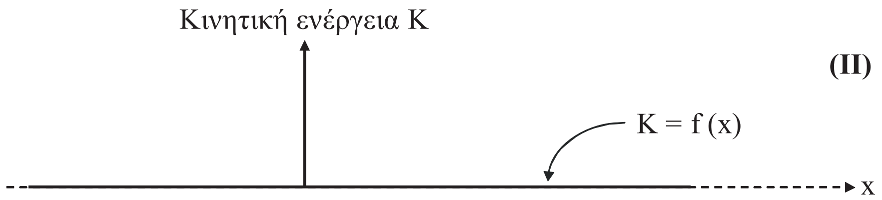
Β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος σε τεντωμένο νήμα τη χρονική στιγμή t = 0, κατά την οποία όλα τα σημεία του νήματος έχουν μηδενική ταχύτητα.

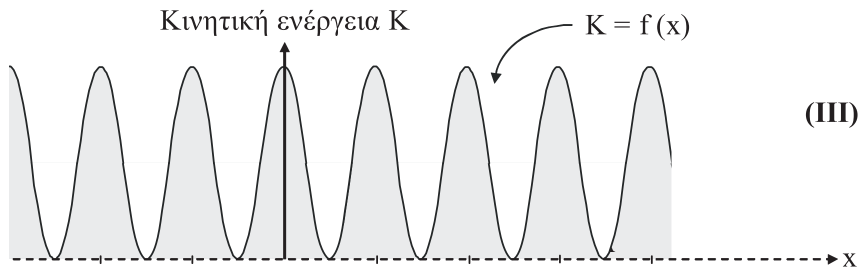
α. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές: $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, T.

β. Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια ταλάντωσης των μορίων του νήματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές;

2.106. Στο σχήμα (Ι) δίνονται δύο στιγμιότυπα (1) και (2) στάσιμου εγκάρσιου κύματος το οποίο δημιουργείται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο και περιγράφεται από την εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$.







Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Στο στιγμιότυπο (1) αντιστοιχεί το διάγραμμα $K = f(x)$ του σχήματος (ΙΙ).

***β.** Στο στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί το διάγραμμα $K = f(x)$ του σχήματος (ΙΙΙ).

γ. Τα μόρια M, N τη χρονική στιγμή t_2 έχουν ταχύτητες $V_M = -\frac{4\pi}{T}A$ και $V_N = \frac{4\pi}{T}A$, αντίστοιχα.

δ. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων που εκτελούν τα μόρια Γ, Δ του ελαστικού μέσου είναι ίση με μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.107. Από δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός υγρού, κύματα πλάτους Α = 0,1 m. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι 0,4 m/s και οι πηγές ταλαντώνονται με περίοδο 0,2 s. Ένα κομμάτι φελλού βρίσκεται στο σημείο Μ, που απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις 32 cm και 28 cm.

Αν οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t = 0,

α. να βρείτε τη χρονική στιγμή που ο φελλός θα αρχίσει να ταλαντώνεται και τη χρονική στιγμή που θα αρχίσει η σύνθετη ταλάντωσή του.

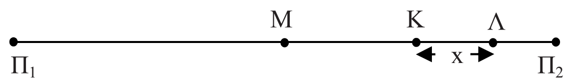
β. να βρείτε και να σχεδιάσετε τη μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τον τρόπο ταλάντωσης του φελλού, σε συνάρτηση με το χρόνο, εξ αιτίας της κάθε πηγής ξεχωριστά.

δ. να σχεδιάσετε τις παραπάνω εξισώσεις στο $0 \le t \le 1{,}2$ s.

ε. να σχεδιάσετε την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο για t > 0.

2.108. Από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2, που απέχουν μεταξύ τους κατά 58 cm, εκπέμπονται αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους , με συχνότητα 200 Hz. Στα σημεία Κ και Λ, όπου ΚΛ = x = 10 cm, έχουμε ενισχυτική συμβολή. Μεταξύ του μέσου Μ του $\Pi_1\Pi_2$ και του Κ υπάρχουν δύο σημεία ενισχυτικής συμβολής, ενώ μεταξύ του Κ και του Λ υπάρχει ένα ακόμη σημείο ενισχυτικής συμβολής.



α. Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη διαφορά αποστάσεων του σημείου Κ από τις δύο πηγές, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος των κυμάτων.

β. Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη διαφορά αποστάσεων του σημείου Λ από τις δύο πηγές, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος των κυμάτων.

γ. Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ν, το οποίο βρίσκεται πάνω στο ευθ. τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ και είναι το πλησιέστερο προς την πηγή Π_1, που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

δ. Να υπολογίσετε το λόγο των μέγιστων ταχυτήτων ταλάντωσης του σημείου Ν και ενός σημείου Ζ, το οποίο απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση l = 7,75 cm.

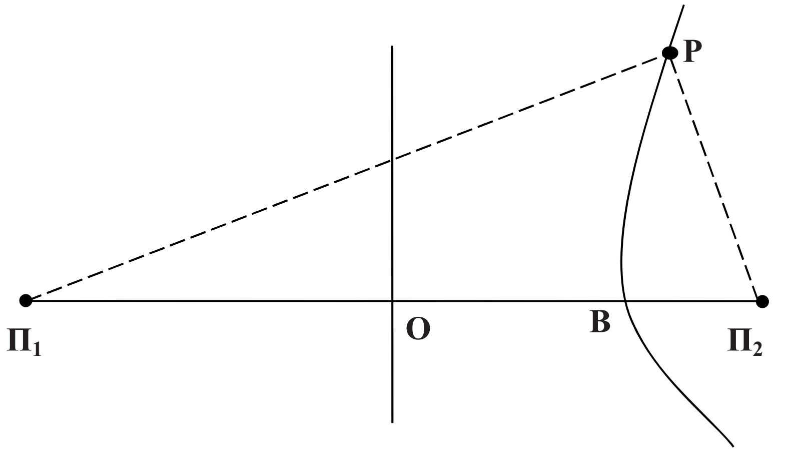
2.109. Δύο όμοια μεγάφωνα είναι τοποθετημένα σε έναν τοίχο σε απόσταση d = 3m μεταξύ τους. Ένας άνθρωπος στέκεται ακριβώς μπροστά από το ένα μεγάφωνο, κάθετα στην ευθεία που τα ενώνει και σε απόσταση x_1 = 4 m από το τοίχο. Τα μεγάφωνα λειτουργούν με τον ίδιο ταλαντωτή συχνότητας f = 300 Hz.

α. Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων όταν φτάνουν στον άνθρωπο;

β. Ποια είναι η πλησιέστερη στα 300 Hz συχνότητα στην οποία μπορεί να ρυθμιστεί ο ταλαντωτής, ώστε ο άνθρωπος να ακούει τον ελάχιστο ήχο;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340 m/s. [Απ. (α) $\frac{30\pi}{17}$, (β) 170 Hz]

2.110. Στα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της οριζόντιας επιφάνειας ενός υγρού βρίσκονται δύο πηγές κυμάτων που ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση y = 0,1 ημ(40πt), (S.I). Τα κύματα που παράγονται από τις δύο πηγές διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα 40 m/s και συμβάλουν. Ένα σημείο P της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις 60m και 40m αντίστοιχα. Τα κύματα φτάνουν στο P σε φάση. Η υπερβολή (κροσσός) ενισχυτικής συμβολής που περνάει από το P τέμνει το ευθ. τμήμα $Π_1Π_2$ στο σημείο Β.



α. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος $Π_1Π_2$ είναι επίσης κροσσός ενισχυτικής συμβολής.

β. Πόσοι άλλοι κροσσοί ενισχυτικής συμβολής υπάρχουν μεταξύ των δύο προηγούμενων κροσσών;

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση ΟΒ.

δ. Αν το σημείο Β απέχει από την πηγή $Π_2$ απόσταση 3m, να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β.

2.111. Δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσον, στην ίδια διεύθυνση με αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο ταχύτητας. Η κοινή διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων είναι ο άξονας $x'x$.

Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο Ο, στο οποίο οι απομακρύνσεις που προκαλούνται από τα κύματα που φθάνουν σ' αυτό έχουν την ίδια εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Δηλαδή για t = 0 είναι y = 0 και V > 0 για καθένα από τα κύματα στη θέση Ο της αρχής του άξονα.

α. Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.

β. Να προσδιορίσετε τις θέσεις των δεσμών και τις θέσεις των κοιλιών.

γ. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ

i) δύο διαδοχικών δεσμών.

ii) δύο διαδοχικών κοιλιών.

iii) ενός δεσμού και της γειτονικής του κοιλίας.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{3T}{4}$. [Απ. (α) $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$ (β) <u>Θέσεις δεσμών:</u> $x_\Delta = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, n \in Z$ <u>Θέσεις κοιλιών:</u> $x_K = n\frac{\lambda}{2}$, $n \in Z$ (γ) i) $\frac{\lambda}{2}$ ii) $\frac{\lambda}{2}$ iii) $\frac{\lambda}{4}$]

2.112. Σ' ένα στάσιμο κύμα δύο μόρια του ελαστικού μέσου απέχουν από τον ίδιο δεσμό Δ αποστάσεις $\frac{\lambda}{6}$ και $\frac{\lambda}{3}$, αντίστοιχα.

α. Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά φάσης;

***β.** Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελούν, αν το πλάτος καθενός από τα κύματα που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι A; [Απ. (α) 0 ή π (rad), (β) $A\sqrt{3}$]

2.113. Η εξίσωση αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y = A\eta\mu(kx - \omega t)$. Για κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$, η εξίσωση έχει τη μορφή

$y = A\eta\mu(kx + \omega t)$, όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Δύο κύματα τα οποία συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα σε χορδή μεγάλου μήκους, έχουν εξισώσεις $y_1 = A\eta\mu(kx - \omega t)$ και $y_2 = A\eta\mu(kx + \omega t)$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση του στάσιμου κύματος έχει τη μορφή $y = 2A\eta\mu kx\sigma\upsilon\nu\omega t$.

β. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ:

i) δύο διαδοχικών δεσμών.

ii) δύο διαδοχικών κοιλιών.

iii) ενός δεσμού και της γειτονικής του κοιλίας.

[Απ. (β) $x_\Delta = n\frac{\lambda}{2}$ $x_K = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, n \in Z$ (γ) i) $\frac{\lambda}{2}$ ii) $\frac{\lambda}{2}$ iii) $\frac{\lambda}{4}$]

2.114. Γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Δύο σημεία του Α, Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση 20 cm και αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με την ίδια συχνότητα f = 5 Hz και πλάτος $A = 4\ cm$.

Κατά μήκος του ελαστικού μέσου διαδίδονται τα δύο ημιτονοειδή εγκάρσια κύματα που παράγονται λόγω της ταλάντωσης των σημείων Α και Β. Το μήκος κύματος είναι λ = 4 cm. Θεωρούμε αρχή του άξονα $x'x$ το μέσο Ο της απόστασης ΑΒ, με το Α αριστερά και το Β δεξιά. Επίσης θεωρούμε αρχή του χρόνου, τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα κύματα συναντώνται στο Ο και είναι, για το σημείο Ο, y = 0 και V > 0.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

***β.** Να βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και κοιλιών που σχηματίζονται. (Στάσιμο κύμα κατά μήκος του ελαστικού μέσου σχηματίζεται μόνο μεταξύ των σημείων Α, Β. Αριστερά του Α και δεξιά του Β τα κύματα διαδίδονται κατά την ίδια κατεύθυνση).

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο για τη δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία μετά το σημείο Ο.

[Απ. (α) $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$ (x, y σε cm, t σε s)

(β) $x_\Delta = (2n+1)$ cm, $-5 \le n \le 4$ 10 δεσμοί, $x_K = 2n$ cm, $-5 \le n \le 5$ 11 κοιλίες

(γ) $y = 8\eta\mu 10\pi t$ y σε cm, t σε s]

2.115. Μια χορδή εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y = 0{,}08συν\frac{50πx}{3}ημ10πt$ (S.I)

α. Πόσο είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης;

β. Να βρείτε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος.

***γ.** Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο κύμα.

Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο Ο για το οποίο τη στιγμή t = 0 είναι y = 0 και V > 0. [Απ. (α) 8 cm (β) 0,2 s, 12 cm, $0{,}6\,\frac{m}{s}$

(γ) $y_1 = 4ημ2π\left(5t - \frac{x}{12}\right)$, $y_2 = 4ημ2π\left(5t + \frac{x}{12}\right)$ (x, y_1, y_2 σε cm, t σε s)]

2.116. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο εγκάρσια ημιτονοειδή κύματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις: $y_1 = 2{,}5ημ2π\left(20t - \frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right)$ και $y_2 = 2{,}5ημ2π\left(20t + \frac{x}{6}\right)$, όπου τα x, y_1, y_2 μετρώνται σε cm και ο χρόνος t σε s.

α. Να βρείτε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.

γ. Ποια είναι η ταχύτητα ενός σημείου του ελαστικού μέσου με συντεταγμένη x = 1,5 cm τη χρονική στιγμή $t = \frac{9}{8}\,s$;

[Απ. (α) $\frac{1}{20}$ s, 6 cm, $1{,}2\,\frac{m}{s}$ (β) $y = 5ημ\frac{πx}{3}συν40πt$ (x, y σε cm, t σε s) (γ) V = 0]

2.117. Γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του ελαστικού μέσου κατά τη θετική κατεύθυνση και περιγράφεται από την εξίσωση $y_1 = 4ημπ\left(t - \frac{x}{10}\right)$, όπου τα x, y_1 σε cm και το t σε s.

α. Να γράψετε την εξίσωση του ημιτονοειδούς κύματος, ίδιου πλάτους, το οποίο όταν συμβάλλει με το προηγούμενο δημιουργεί κατά μήκος του ελαστικού μέσου στάσιμο κύμα. Να θεωρήσετε ότι στη θέση x = 0 τη στιγμή t = 0 είναι y = 0 και V > 0.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργεί η συμβολή των δύο προηγούμενων κυμάτων.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις, σε συνάρτηση με το χρόνο, για την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου, το οποίο βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένη x = 2,5 cm.

[Απ. α. $y_2 = 4ημπ\left(t + \frac{x}{10}\right)$, x, y_2 σε cm, t σε s β. $y = 8συν\frac{πx}{10}ημπt$, x, y σε cm, t σε s

γ. $V = 4π\sqrt{2}\,συνπt$, V σε $\frac{cm}{s}$, t σε s, $α = -4π^2\sqrt{2}\,ημπt$, α σε $\frac{cm}{s^2}$, t σε s]

2.118. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς μέσου το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση $x'x$, δημιουργείται στάσιμο εγκάρσιο κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $y = 6\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\eta\mu 10\pi t$ (x, y σε cm, t σε s).

α. Να βρείτε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των δύο τρεχόντων κυμάτων των οποίων η συμβολή δημιούργησε το στάσιμο κύμα.

***β.** Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων τα οποία με τη συμβολή τους δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

γ. Πόσο είναι το πλάτος ταλάντωσης δύο σημείων Μ, Ν του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $x_1 = -25\,cm$ και $x_2 = +25\,cm$ αντίστοιχα;

δ. Να βρείτε τον αριθμό n των κοιλιών του στάσιμου κύματος που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Μ και Ν.

***ε.** Μεταβάλλουμε κατάλληλα τη συχνότητα των συμβαλλόντων κυμάτων οπότε δημιουργείται κατά μήκος του ελαστικού μέσου ένα νέο στάσιμο κύμα. Διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των σημείων Μ και Ν του ελαστικού μέσου σχηματίζονται n – 2 κοιλίες. Δεδομένου ότι η κινητική κατάσταση των σημείων Μ και Ν δε μεταβλήθηκε,

i) να βρείτε ποιο είναι το νέο μήκος κύματος και η νέα περίοδος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

ii) να γράψετε την εξίσωση του νέου στάσιμου κύματος.

[Απ. (α) 3 cm, 0,2 s, 20 cm, $1\frac{m}{s}$ (β) $y_1 = 3\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{x}{20}\right)$, $y_2 = 3\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{x}{20}\right)$ (x, y_1, y_2 σε cm, t σε s) (γ) 0 (δ) 5 κοιλίες (ε) i) $\frac{100}{3}$ cm, $\frac{1}{3}$ s ii) $y = 6\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi x}{50}\eta\mu 6\pi t$ (x, y σε cm, t σε s)]

2.119. Σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον, μεγάλου μήκους, διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα τα οποία δημιουργούν στάσιμο κύμα και περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = A\eta\mu(\omega t - kx + \phi)$ και $y_2 = A\eta\mu(\omega t + kx)$, όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ο κυματικός αριθμός. Να δείξετε ότι

α. η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $\upsilon = \frac{\omega}{k}$.

***β.** η αυθαίρετη αρχική φάση ϕ αλλάζει τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών, ενώ δεν αλλάζει την απόσταση μεταξύ διαδοχικών δεσμών ή διαδοχικών κοιλιών.

[Απ. (β) <u>Θέσεις δεσμών:</u> $x_\Delta = \frac{\varphi}{4\pi}\lambda + (2n+1)\frac{\lambda}{4}, n \in Z$

<u>Θέσεις κοιλιών:</u> $x_K = \frac{\varphi}{4\pi}\lambda + n\frac{\lambda}{2}, n \in Z$]

2.120. Ένα στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t$. Να βρείτε τη σχέση που δίνει την απόσταση μεταξύ

α. δύο δεσμών n_1 και n_2. ($n_1 < n_2$) [nodes = δεσμοί]

β. δύο κοιλιών a_1 και a_2. ($a_1 < a_2$) [antinodes = αντιδεσμοί, δηλ κοιλίες]

γ. του δεσμού n και της κοιλίας a.

[Απ. $(n_2 - n_1)\frac{\lambda}{2}, \quad (a_2 - a_1)\frac{\lambda}{2}, \quad |n-a|\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4} \quad (+)\ \alpha\nu\ n \geq a$]

2.121. Το άκρο Μ μιας ράβδου ΜΝ μήκους l = 0,9 m είναι ελεύθερο, ενώ το άκρο Ν της ράβδου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα αρμονικό κύμα πλάτους A = 4 cm διαδίδεται με ταχύτητα υ = 4 m/s από το άκρο Μ προς το άκρο Ν, ανακλάται στο ακλόνητο άκρο Ν και διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Διαπιστώνεται ότι μεταξύ των άκρων Μ και Ν υπάρχουν 4 σημεία της ράβδου που παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

α. Να γραφούν οι εξισώσεις του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος καθώς και του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.

β. Ποιες είναι οι συχνότητες των κυμάτων που μπορούν να δημιουργήσουν στάσιμα κύματα πάνω στη ράβδο ΜΝ;

Να θεωρήσετε σαν αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) το άκρο Ν της ράβδου και σαν αρχή μέτρησης των χρόνων (t = 0) τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο άκρο Ν, με θετική ταχύτητα.

[Απ. (α) $y_1 = 4\eta\mu 2\pi(10t + \frac{x}{40}),\ y_2 = -4\eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{40}),\ y = 8\eta\mu\frac{\pi \cdot x}{20} \cdot \sigma\upsilon\nu 20\pi t$

(β) $f = \frac{10}{9}(2n+1), \quad n = 0,1,2\ldots$]

2.122. Ένα ελαφρό νήμα μήκους l = 1,5 m τοποθετείται κατά μήκος του άξονα x . Το νήμα διεγείρεται σε ταλάντωση με το ένα άκρο του σταθερό στο σημείο x = 0.

α. Ποιο είναι το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη ταλάντωση;

β. Αν το νήμα συντονίζεται στη τέταρτη αρμονική σε συχνότητα f_4 = 320 Hz, ποια είναι η ταχύτητα των εγκάρσιων κυμάτων στο νήμα;

γ. Γράψτε μια έκφραση για την εξίσωση του στάσιμου κύματος που αντιστοιχεί στη τέταρτη αρμονική, αν η μέγιστη απομάκρυνση στο σημείο x = λ/4 είναι 4 cm.

[Απ. (α) 6 m, (β) 274,3 m/s, (γ) y = 0,04ημ(7,33x)συν(2010t)]

2.123. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα x΄x, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t \quad (x, y\ \sigma\varepsilon\ cm, t\ \sigma\varepsilon\ s)$.

α. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{31}{30}\ s$, να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x_1 = \frac{16}{3}\ cm$.

β. Κάποια χρονική στιγμή t, η δεύτερη κοιλία δεξιά της αρχής Ο, έχει απομάκρυνση y = + 4 cm κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα y. Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της επόμενης κοιλίας.

γ. Δύο σημεία του ελαστικού μέσου απέχουν από τον δεύτερο δεσμό δεξιά της αρχής Ο, αποστάσεις $\frac{\lambda}{6}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{\lambda}{3}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων που εκτελούν και το πλάτος της ταλάντωσής τους.

δ. Έστω ένα σημείο Μ του μέσου το οποίο ταλαντώνεται με πλάτος 4 cm. Πόση είναι η απόστασή του από τον πλησιέστερο δεσμό;

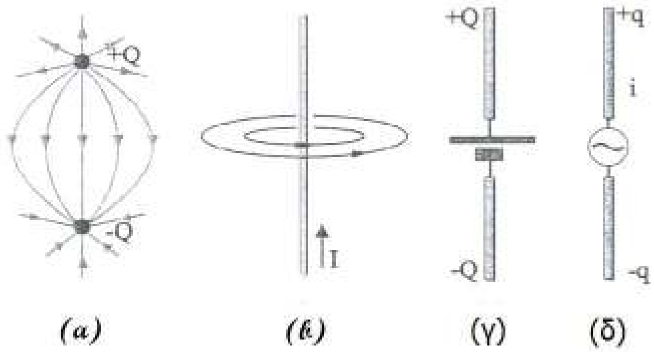
ε. Τη χρονική στιγμή t_0 θεωρούμε στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στο τμήμα του ελαστικού μέσου με $-8\ cm\ \leq x \leq 8\ cm$. Για την κοιλία στη θέση x = 0 είναι y = + 8 cm. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου τις χρονικές στιγμές $t_1 = t_0 + 0{,}05\ s$ και $t_2 = t_0 + 0{,}1\ s$.

Δίνεται $\pi^2 \simeq 10$

[Απ. α. -0,2π m/s, $20\sqrt{3}\frac{m}{s^2}$ β. $-0{,}4\pi\sqrt{3}\frac{m}{s}, 40\frac{m}{s^2}$, γ. 0 ή π (rad), $4\sqrt{3}\ cm$, δ. $\frac{1}{3}\ cm$]

§2.6 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όπως γνωρίζουμε (Φυσική Γ.Π. Β΄ Λυκείου), ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο ή ένα σύστημα ηλεκτρικών φορτίων δημιουργεί στο γύρω χώρο ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ. Επίσης γνωρίζουμε ότι ένας αγωγός ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης δημιουργεί στο γύρω χώρο του ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ. (Σχήμα 1α και 1β)

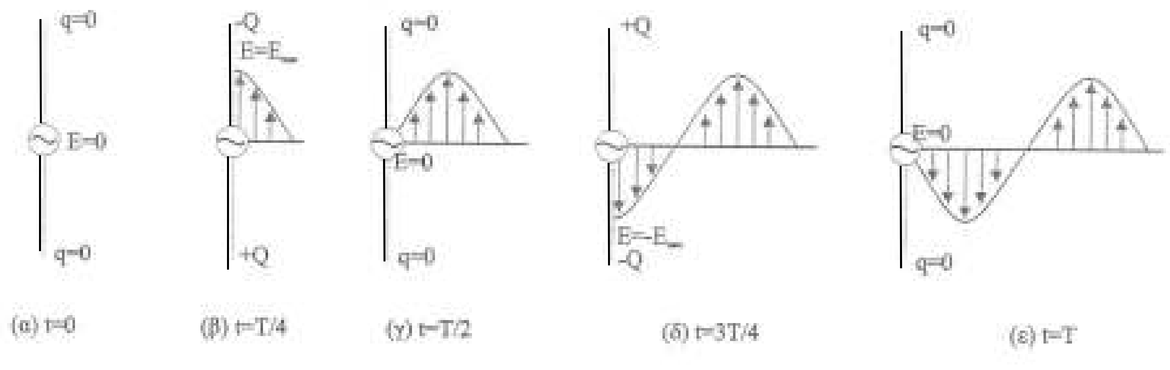


Αν συνδέσουμε στους πόλους μιας πηγής εναλλασσόμενης τάσης δύο μεταλλικούς αγωγούς, αυτοί θα διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα και τα άκρα τους θα «φορτίζονται» περιοδικά με φορτίο +q και – q. (Σχήμα 1δ)

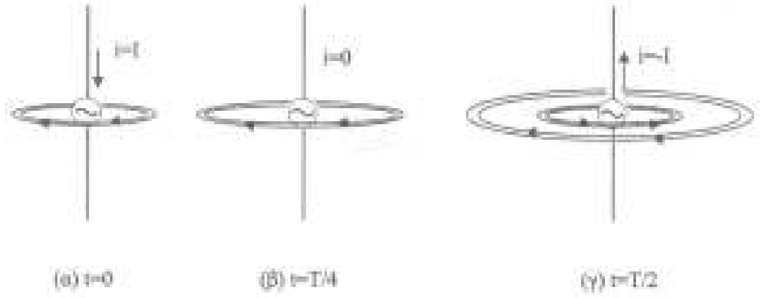
Σχήμα 1

Αν οι δύο όμοιες μεταλλικές σφαίρες του σχήματος 1α συνδεθούν μεταξύ τους με έναν αγωγό, θα αρχίσει μεταφορά ηλεκτρικού φορτίου μέχρι οι σφαίρες να αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό, το οποίο στην περίπτωση που εξετάζουμε θα είναι μηδέν. Για όσο χρόνο διαρκεί η εκφόρτιση, ο αγωγός θα διαρρέεται από ρεύμα και έτσι ενώ το ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 1α) θα εξασθενεί, θα δημιουργείται μαγνητικό πεδίο. Αν φορτίζουμε περιοδικά τις δύο σφαίρες, τότε τα δύο πεδία που δημιουργούνται θα μεταβάλλονται και αυτά περιοδικά. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν συνδέσουμε τις δύο σφαίρες με τους πόλους πηγής εναλλασσόμενης τάσης. Τα φορτία θα εναλλάσσονται (ταλαντώνονται) οπότε θα μεταβάλλονται περιοδικά και τα πεδία. Το σύστημα των δύο φορτίων που ταλαντώνεται ονομάζεται **ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο**. Τα δύο πεδία διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός $c = 3x10^8$ m/s.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το σύστημα των δύο φορτίων με έναν απλό ευθύγραμμο αγωγό, στη μέση του οποίου έχει συνδέσει πηγή εναλλασσόμενης τάσης (σχ. 1α), θα έχουμε μια κεραία παραγωγής ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

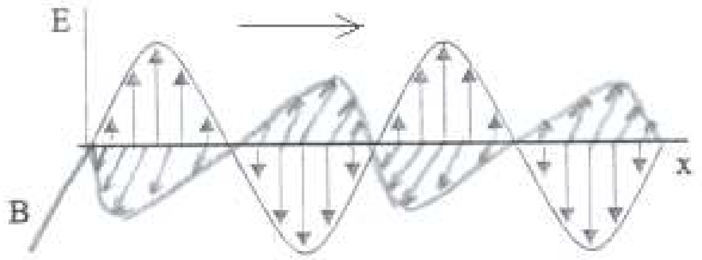


Σχήμα 2



Σχήμα 3

Στα σχήματα 2 και 3 φαίνεται ο τρόπος παραγωγής και διάδοσης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα.
Παρατηρούμε ότι όταν το μαγνητικό πεδίο είναι μέγιστο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει κοντά στην πηγή παραγωγής του Η/Μ κύματος (κεραία), ενώ μακριά από αυτήν αποδεικνύεται ότι τα δύο πεδία είναι σε φάση, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες τιμές τους και ταυτόχρονα μηδενίζονται.



Σχήμα 4

Στο σχήμα 4 φαίνεται το στιγμιότυπο ενός Η/Μ κύματος σε μεγάλη απόσταση από την κεραία που το εξέπεμψε.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Με βάση τον τρόπο παραγωγής ενός Η/Μ κύματος και τη θεωρητική τους μελέτη, μπορούμε να αποδώσουμε στο Η/Μ κύμα τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Τα διανύσματα Ε και Β των δύο πεδίων είναι κάθετα μεταξύ τους σε κάθε σημείο του χώρου.
2. Η διεύθυνση διάδοσης του Η/Μ κύματος είναι κάθετη στα διανύσματα Ε και Β. Δηλαδή τα διανύσματα Ε, Β και c αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα (σχ. 4).
3. Η φορά διάδοσης του Η/Μ κύματος ταυτίζεται με τη φορά που θα προχωρούσε μια δεξιόστροφη βίδα η οποία θα περιστρεφόταν όπως (νοητά) περιστρέφεται το Ε για να «πέσει πάνω» στο Β.
4. Τα Η/Μ κύματα είναι εγκάρσια κύματα.
5. Οι εντάσεις των δύο πεδίων μεταβάλλονται αρμονικά με το χρόνο και μακριά από την κεραία είναι σε φάση.

6. Τα Η/Μ κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός c και σε κάθε άλλο υλικό μέσο με ταχύτητα μικρότερη από c.
7. Τα Η/Μ κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.
8. Ο λόγος των εντάσεων $\frac{E}{B}$ κάθε στιγμή είναι σταθερός και ίσος με c, δηλαδή ισχύει $\frac{E}{B} = c$. (2.27)
9. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταβολή των εντάσεων των δύο πεδίων είναι $E = E_{max} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$ και $B = B_{max} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$.
10. Για το μήκος κύματος λ και την περίοδο Τ ισχύει η σχέση λ = c T, εφόσον το κύμα διαδίδεται στο κενό.

ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ Η/Μ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

Το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο δεν είναι ο μοναδικός τρόπος παραγωγής Η/Μ κυμάτων. Άλλοι τρόποι παραγωγής είναι οι αποδιεγέρσεις ατόμων, διασπάσεις πυρήνων κλπ. Ανεξάρτητα από τον τρόπο παραγωγής τους έχουν ένα μεγάλο φάσμα συχνοτήτων (και μηκών κύματος) που αποτελούν το ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΦΑΣΜΑ. Μπορούμε να χωρίσουμε το Η/Μ φάσμα σε περιοχές, χωρίς όμως να είναι ευδιάκριτα τα όρια των περιοχών. Οι περιοχές στις οποίες χωρίζουμε το φάσμα είναι επτά.

1. **ΡΑΔΙΟΚΥΜΑΤΑ** με μήκη κύματος από 10^5 m ως 30 cm.

Παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις επικοινωνίες.

2. **ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ** με μήκη κύματος από 30 cm ως 1 mm (= 10^{-3} m)

Παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις επικοινωνίες.

3. **ΥΠΕΡΥΘΡΑ ΚΥΜΑΤΑ** με μήκη κύματος από 1 mm ως 700 nm. (1 nm = 10^{-9} m)

Παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα, από αποδιεγέρσεις ατόμων και εκπέμπονται από θερμά σώματα, απορροφώνται από σώματα και αυξάνουν τη θερμοκρασία τους.

4. **ΟΡΑΤΟ ΦΩΣ** με μήκη κύματος από 700 nm ως 400 nm.

Παράγεται από αποδιεγέρσεις ατόμων (ανακατανομή των ηλεκτρονίων στα άτομα και μόρια). Κάθε υποπεριοχή του ορατού φάσματος προκαλεί στο ανθρώπινο μάτι την αίσθηση ενός χρώματος.

5. **ΥΠΕΡΙΩΔΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ** με μήκη κύματος από 400 nm ως 60 nm.

Παράγονται κυρίως από τον ΗΛΙΟ, είναι υπεύθυνες για το «μαύρισμα» όταν κάνουμε ηλιοθεραπεία αλλά και για καρκίνους του δέρματος. Το μεγαλύτερο μέρος της ηλιακής ακτινοβολίας που φτάνει στη γη απορροφάται από το ΟΖΟΝ της στρατόσφαιρας.

6. **ΑΚΤΙΝΕΣ Χ (ή ΑΚΤΙΝΕΣ Röntgen)** με μήκη κύματος από 60 nm ως 10^{-13} m.

Παράγονται από την επιβράδυνση ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, όταν πέφτουν πάνω σε μεταλλικό στόχο.

Χρησιμοποιούνται στην Ιατρική (ακτινογραφίες) αλλά και στη μελέτη κρυσταλλικών δομών.

7. **ΑΚΤΙΝΕΣ γ** με μήκη κύματος από 10^{-10} m ως 10^{-14} m.

Παράγονται από αποδιεγέρσεις πυρήνων και από πυρηνικές αντιδράσεις. Είναι πολύ διεισδυτικές και επομένως επικίνδυνες για τους οργανισμούς.

Παράδειγμα 2.11. Σε ένα σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται μακριά από την πηγή παραγωγής ενός Η/Μ κύματος και το οποίο θεωρούμε ως αρχή ενός τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων Oxyz, το μαγνητικό πεδίο του Η/Μ κύματος ταλαντώνεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $B = 8 \cdot 10^{-4}$ημ$(2 \cdot 10^8 \pi t)$ (S.I). Το Η/Μ κύμα διαδίδεται στο κενό κατά τη θετική φορά του άξονα x.

α. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο Ο.

β. Να υπολογίσετε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του Η/Μ κύματος.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις σε συνάρτηση με το χρόνο, που περιγράφουν το Η/Μ κύμα σε ένα τυχαίο σημείο x του ημιάξονα Οx.

Δίνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Λύση

Επειδή το Η/Μ κύμα βρίσκεται μακριά από την πηγή παραγωγής του, τα δύο πεδία, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό, είναι σε φάση.

α. Από την εξίσωση 2.27 προκύπτει:

$$\frac{E}{B} = c \Rightarrow E = cB \Rightarrow E = 3 \cdot 10^8 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot \text{ημ}\left(2 \cdot 10^8 \pi t\right) \Rightarrow E = 2,4 \cdot 10^5 \cdot \text{ημ}\left(2 \cdot 10^8 \pi t\right) \text{ (S.I)}$$

β. Από τη δοθείσα εξίσωση $B = 8 \cdot 10^{-4}$ημ$(2 \cdot 10^8 \pi t)$ (S.I).προκύπτει ότι $\omega = 2 \cdot 10^8 \pi$ rad/s και $B_{max} = 8 \cdot 10^{-4}$ T.

$$\text{Είναι } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{2 \cdot 10^8 \pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 10^8 Hz}$$

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{10^8 Hz} \Rightarrow \boxed{\lambda = 3m}$$

γ. $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 10^{-8}$ s και $E_{max} = 2,4 \cdot 10^5$ *V/m*

$$B = B_{max}\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow B = 8 \cdot 10^{-4}\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{10^{-8}} - \frac{x}{3}\right) \Rightarrow B = 8 \cdot 10^{-4}\text{ημ}2\pi\left(10^8 t - \frac{x}{3}\right)\text{(S.I)}$$

$$E = E_{max}\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow E = 2,4 \cdot 10^5\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{10^{-8}} - \frac{x}{3}\right) \Rightarrow E = 2,4 \cdot 10^5\text{ημ}2\pi\left(10^8 t - \frac{x}{3}\right)\text{(S.I)}$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*

2.124. Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της έντασης Ε του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου Β, κάθε χρονική στιγμή, είναι

α. 0. **β.** 30^0. **γ.** 45^0. **δ.** 90^0.

2.125. Αν Β είναι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ένα σημείο του χώρου μια ορισμένη χρονική στιγμή, τότε το μέτρο Ε της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο την ίδια χρονική στιγμή, είναι

α. ανάλογο του Β.
β. αντίστροφα ανάλογο του Β.
γ. ανάλογο του B^2.
δ. ανεξάρτητο του Β.

2.126. Μία κοινή ιδιότητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται στο κενό είναι ότι έχουν

α. το ίδιο μήκος κύματος.
β. την ίδια συχνότητα.
γ. την ίδια ταχύτητα διάδοσης.
δ. $E_{max} = B_{max}$.

2.127. Οι διαφορετικές ιδιότητες που εκδηλώνουν τα διάφορα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ραδιοκύματα – μικροκύματα – υπέρυθρα κλπ) οφείλονται

α. στην ταχύτητά τους.
β. στο πλάτος τους.
γ. στην κατεύθυνση διάδοσής τους.
δ. στο μήκος κύματός τους.

2.128. Πηγή παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μικρής συχνότητας θεωρείται

α. το ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο.
β. το κινούμενο με σταθερή ταχύτητα ηλεκτρικό φορτίο.
γ. το επιταχυνόμενο ηλεκτρικό φορτίο.
δ. το συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης.

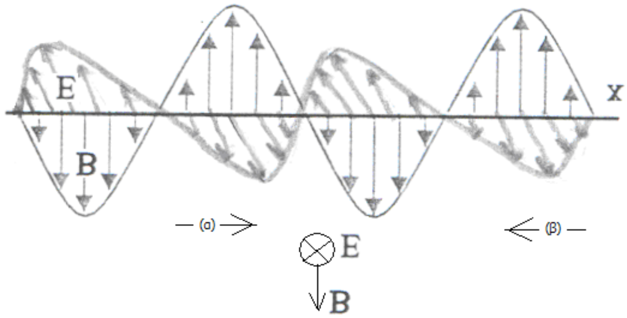
2.129. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

α. Τα ραδιοκύματα έχουν μεγαλύτερες συχνότητες από τα μικροκύματα.
β. Οι υπέρυθρες έχουν μικρότερες συχνότητες από τις ορατές ακτινοβολίες.
γ. Η ορατή περιοχή του φάσματος έχει μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων από την περιοχή των ραδιοκυμάτων.
δ. Οι ακτίνες Χ παράγονται από ταλαντευόμενα ηλεκτρικά κυκλώματα.

2.130. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό με ταχύτητα $c = 3x10^8$ m/s και το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος μηδενίζεται κάθε 10^{-15} s. Το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι

α. 600 nm. **β.** 300 nm.
γ. 150 nm. **δ.** 1800 nm.

2.131. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x.



α. Η κατεύθυνση προς την οποία διαδίδεται παριστάνεται από το βέλος (α).
β. Η κατεύθυνση προς την οποία διαδίδεται παριστάνεται από το βέλος (β).
γ. Δε μπορούμε να γνωρίζουμε την κατεύθυνση προς την οποία διαδίδεται.
δ. Δε μπορεί να υπάρχει τέτοιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

2.132. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;
Αν σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο βρίσκεται στην περιοχή
α. του υπέρυθρου, αυξήσουμε το μήκος κύματός του, τότε θα βρεθεί στην περιοχή του ορατού.
β. του υπεριώδους, αυξήσουμε το μήκος κύματός του, τότε θα βρεθεί στην περιοχή του ορατού.
γ. των ακτίνων Χ αυξήσουμε το μήκος κύματός του, τότε θα βρεθεί στην περιοχή των ακτίνων γ.
δ. των μικροκυμάτων, αυξήσουμε τη συχνότητά του, τότε θα βρεθεί στην περιοχή των ραδιοκυμάτων

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν την κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

2.133. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταφέρει ενέργεια μόνον του ηλεκτρικού πεδίου.

2.134. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταφέρει ενέργεια μόνον του μαγνητικού πεδίου.

2.135. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταφέρει ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου και ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

2.136. Η εξίσωση $E = E_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ περιγράφει αρμονικό ηλεκτρικό κύμα, το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

2.137. Η εξίσωση $B = B_{max}\eta\mu\frac{2\pi}{\lambda}(ct + x)$ περιγράφει αρμονικό μαγνητικό κύμα, το οποίο διαδίδεται στο κενό κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

2.138. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν παρατηρείται το φαινόμενο της συμβολής με αποτέλεσμα να μην μπορούν να δημιουργηθούν στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

2.139. Τη χρονική στιγμή που τα φορτία ενός αγωγού - ηλεκτρικού διπόλου- που τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση, μηδενίζονται, το δίπολο διαρρέεται από μέγιστο ρεύμα.

2.140. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται μόνο από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα.

2.141. Τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στο ορατό φως, όπου κι αν αυτό διαδίδεται είναι μεταξύ 400 nm και 700 nm.

2.142. Η υπεριώδης ακτινοβολία που φτάνει στη Γη απορροφάται κατά κύριο λόγο από το όζον της ατμόσφαιρας.

2.143. Η πιο κοινή αιτία παραγωγής ακτίνων Χ είναι η επιβράδυνση των νετρονίων τα οποία προσπίπτουν με μεγάλη ταχύτητα σε μεταλλικό στόχο.

Ερωτήσεις αντιστοίχησης

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

2.144. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα στοιχεία της δεξιάς στήλης.

Α. Μηχανικά κύματα	**1.** Μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.
Β. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα	**2.** Η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.
Γ. Μήκος κύματος	**3.** Μεταφέρουν μηχανική ενέργεια.
Δ. Στιγμιότυπο κύματος	**4.** Είναι η γραφική παράσταση της εξίσωσης του κύματος για x = σταθερό.
	5. Είναι η γραφική παράσταση της εξίσωσης του κύματος για t = σταθερό.

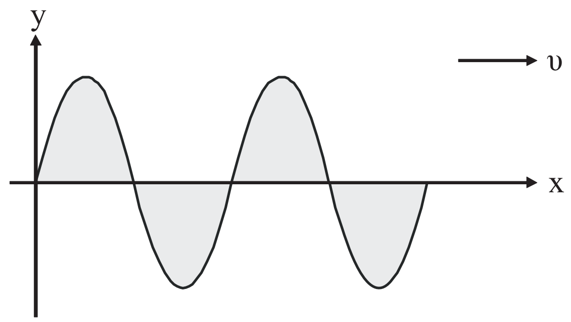
2.145. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα στοιχεία της δεξιάς στήλης.

Α. $y = A\eta\mu(\omega t - kx)$	**1.** Εξίσωση έντασης μαγνητικού πεδίου ηλεκτρομαγνητικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.
Β. $y = A\eta\mu\dfrac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t + x)$	**2.** Εξίσωση μηχανικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.
Γ. $\Delta\phi = 2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}$	**3.** Εξίσωση έντασης ηλεκτρικού πεδίου ηλεκτρομαγνητικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.
Δ. $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{max}\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$	**4.** Διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα, την ίδια χρονική στιγμή.
Ε. $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{max}\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}\right)$	**5.** Εξίσωση μηχανικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.
	6. Εξίσωση στάσιμου κύματος.

2.146. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς στήλης.

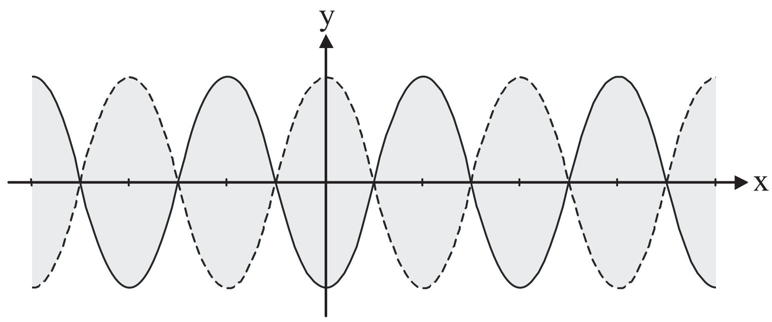
Α. Στιγμιότυπο ηλεκτρομαγνητικού αρμονικού κύματος

1.

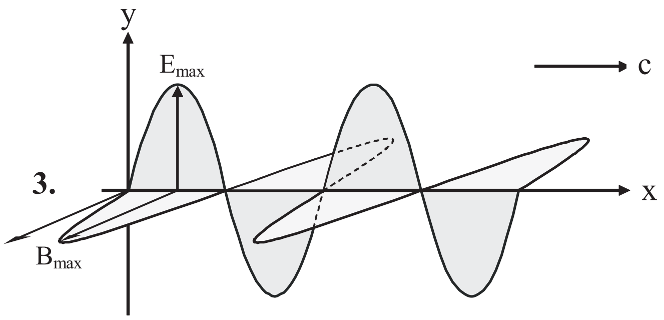


Β. Στιγμιότυπο αρμονικού μηχανικού κύματος

2.

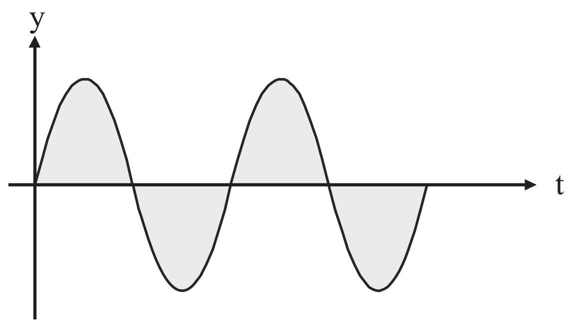


3.



Γ. Στιγμιότυπο στάσιμου κύματος

4.



Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

2.147. Τι ονομάζουμε ηλεκτρομαγνητικό κύμα; Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x.

2.148. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια ή διαμήκη; Μπορεί να δημιουργηθεί στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα; Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά τον άξονα x΄x .

2.149. Η εξίσωση $E = 3000 \cdot ημ2π\left(12 \cdot 10^{10} t + 4 \cdot 10^{4} x\right)\ (S.I.)$ μπορεί να περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Δίνεται c = 3×10^8 *m/s.*

2.150. Αποδείξτε ότι η σχέση Ε = Β c είναι σωστή από πλευράς διαστάσεων, δηλαδή αποδείξτε ότι ισχύει στο S.I η παρακάτω σχέση μεταξύ των μονάδων:

$$1\frac{volt}{meter} = 1 tesla \cdot \frac{meter}{second}$$

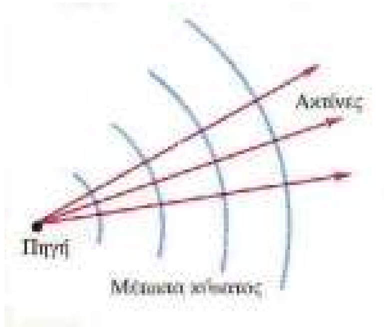
§2.7 ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ του ΦΩΤΟΣ

Θα μελετήσουμε δύο κυματικά φαινόμενα του φωτός (φαινόμενα στα οποία το φως εμφανίζει το κυματικό του πρόσωπο), την ΑΝΑΚΛΑΣΗ και τη ΔΙΑΘΛΑΣΗ.

Εισαγωγικές έννοιες

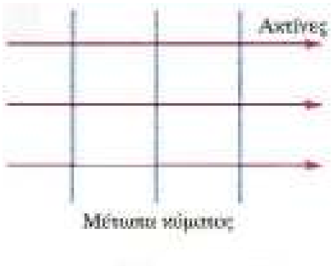
✓ **Μέτωπο κύματος:** Κατά την περιγραφή της διάδοσης ενός κύματος, συχνά χρησιμοποιείται η έννοια του μετώπου κύματος. Ορίζουμε σαν μέτωπο κύματος το γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων στα οποία η φάση της ταλάντωσης μιας φυσικής ποσότητας, συνδεδεμένης με το κύμα, είναι σταθερή.
Ένα παράδειγμα είναι τα κύματα που δημιουργούνται όταν ρίχνουμε ένα πετραδάκι στην ήρεμη επιφάνεια μιας μικρής λίμνης. Οι κύκλοι που σχηματίζονται από τις κορυφές των υδάτινων κυμάτων κατά τη διάδοσή τους είναι μέτωπα κύματος.
Άλλο παράδειγμα είναι η διάδοση των ηχητικών κυμάτων μέσα σε ακίνητο αέρα, που παράγονται από σημειακή πηγή. (Θυμηθείτε ότι ο ήχος είναι διάμηκες μηχανικό κύμα στο οποίο μεταβάλλονται περιοδικά τόσο η πίεση όσο και η πυκνότητα του αέρα.) Κάθε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τη σημειακή πηγή είναι μέτωπο κύματος. Στην περίπτωση αυτή οι κορυφές πίεσης, δηλαδή οι επιφάνειες σε όλη την έκταση των οποίων η πίεση είναι μέγιστη, δημιουργούν σύνολα ομόκεντρων σφαιρών, των οποίων η ακτίνα μεγαλώνει καθώς το κύμα απομακρύνεται από την πηγή του. Όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε την κυματική κίνηση, συνήθως σχεδιάζουμε τμήματα λίγων μόνο μετώπων

κύματος, επιλέγοντας διαδοχικά μέτωπα τα οποία απέχουν μεταξύ τους ένα μήκος κύματος. Με ίδιο τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε και ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα (π.χ. ορατό φως), μόνο που τώρα αντί για την πίεση του ηχητικού κύματος, θα έχουμε το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο.



Σημείωση: Τόσο τα ηχητικά, όσο και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι κύματα χώρου και τα μέτωπά τους είναι σφαιρικές επιφάνειες. Σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, όπου οι ακτίνες των σφαιρών έχουν γίνει πολύ μεγάλες, ένα τμήμα μιας σφαιρικής επιφάνειας μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο, οπότε τότε έχουμε επίπεδο κύμα.

✓ **Φωτεινή Ακτίνα:** Πολλές φορές είναι ευκολότερο να παριστάνουμε ένα φωτεινό κύμα με τη βοήθεια των ακτίνων. Σύμφωνα με τη σωματιδιακή φύση του φωτός οι ακτίνες είναι οι τροχιές των σωματιδίων (φωτονίων). Σύμφωνα με την κυματική φύση του φωτός μια ακτίνα είναι μια υποθετική γραμμή κατά μήκος της κατεύθυνσης προς την οποία προχωράει το κύμα. Οι ακτίνες είναι κάθετες στα μέτωπα κύματος. Αν τα μέτωπα κύματος είναι σφαιρικές επιφάνειες τότε οι ακτίνες είναι οι γεωμετρικές ακτίνες των σφαιρών. Στα επίπεδα κύματα, στα οποία τα μέτωπα είναι παράλληλα επίπεδα, οι ακτίνες είναι ευθείες παράλληλες, κάθετες στα επίπεδα.



✓ **Μονοχρωματική ακτίνα:** Η χρήση ειδικών πηγών ή φίλτρων μας επιτρέπει να επιλέξουμε μια στενή ζώνη του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, με εύρος μηκών κύματος της τάξης των 10 nm. Μια τέτοια ακτινοβολία ονομάζεται μονοχρωματική ακτινοβολία. Το απόλυτα μονοχρωματικό φως, ενός και μόνου μήκους κύματος, είναι μια εξιδανίκευση που δε μπορούμε να επιτύχουμε. Όταν, για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε την έκφραση μονοχρωματική ακτίνα μήκους κύματος 600 nm, εννοούμε στην πραγματικότητα μια στενή ζώνη με μήκη κύματος από 595 nm ως 605 nm. Η περισσότερο μονοχρωματική πηγή που έχουμε σήμερα στη διάθεσή μας, με μεγάλη διαφορά από οποιαδήποτε άλλη πηγή φωτός, είναι ο λέηζερ. Ο συνηθισμένος λέηζερ He – Ne εκπέμπει ερυθρό φως στα 632,8 nm με εύρος περιοχής της τάξης του 10^{-6} nm.

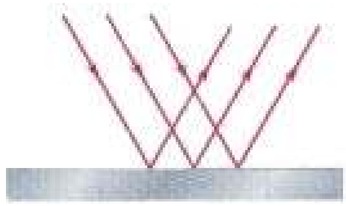
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Όταν μια δέσμη φωτός, που διαδίδεται σε ένα οπτικό μέσο, συναντήσει στην πορεία της τη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο μέσο αυτό και σε ένα άλλο, τότε ένα μέρος της δέσμης επιστρέφει στο αρχικό μέσο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ανάκλαση του φωτός.

Αν η διαχωριστική επιφάνεια είναι τραχεία, τότε οι ακτίνες που αποτελούν τη δέσμη ανακλώνται προς κάθε κατεύθυνση (διασκορπίζονται) και το φαινόμενο ονομάζεται **διάχυτη ανάκλαση ή διάχυση**. Στο φαινόμενο αυτό οφείλεται το γεγονός ότι μπορούμε να δούμε τα σώματα που δεν

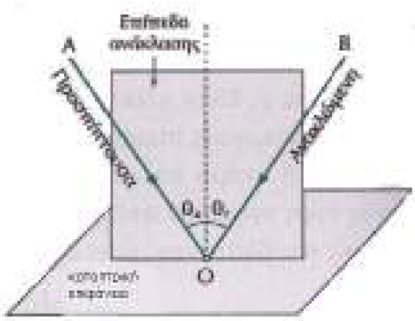
έχουν δικό τους φως (ετερόφωτα).

Στη διάχυση οφείλεται και το γεγονός ότι βλέπουμε μια μεγάλη περιοχή το βράδυ όταν οδηγούμε σε σκοτεινό δρόμο, καθώς το φως των προβολέων του αυτοκινήτου διαχέεται από το οδόστρωμα.



Αν η διαχωριστική επιφάνεια είναι λεία και στιλπνή (γυαλιστερή), τότε οι ακτίνες που αποτελούν τη δέσμη παραμένουν παράλληλες και μετά την ανάκλασή τους. Η ανάκλαση αυτή ονομάζεται **κατοπτρική ανάκλαση**. Στη συνέχεια με τον όρο ανάκλαση θα εννοούμε την κατοπτρική ανάκλαση.

ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

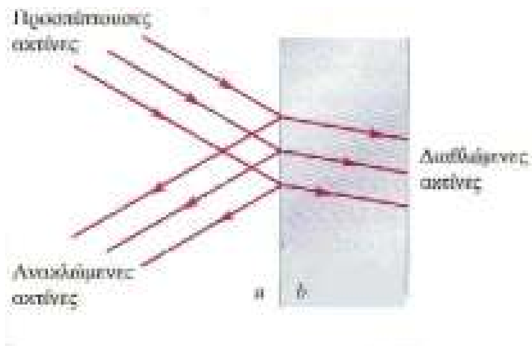


1. Η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετος στην κατοπτρική επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης O, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στην κατοπτρική επιφάνεια.
2. Η γωνία θ_a που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτίνα με την κάθετη στην κατοπτρική επιφάνεια στο σημείο που γίνεται η πρόσπτωση (γωνία πρόσπτωσης), είναι ίση με τη γωνία θ_r που σχηματίζει η ανακλώμενη ακτίνα με την ίδια κάθετη (γωνία ανάκλασης), δηλαδή ισχύει:

$$\theta_a = \theta_r. \qquad (2.28)$$

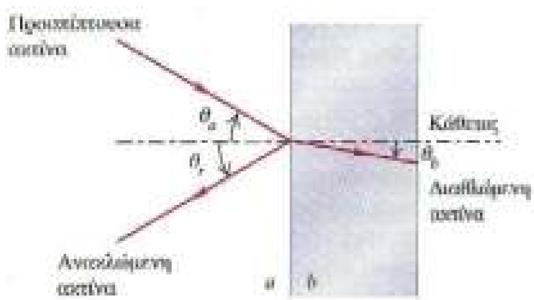
ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Όταν μια **μονοχρωματική** δέσμη φωτός πέσει στη λεία και στιλπνή διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων, ένα μέρος της δέσμης ανακλάται κατοπτρικά ενώ το υπόλοιπο μέρος εισέρχεται στο άλλο οπτικό μέσο (σχήμα 2.7.1). Επειδή η ταχύτητα του φωτός (όπως και κάθε κύματος) εξαρτάται από το μέσο στο οποίο διαδίδεται, το μέρος της φωτεινής δέσμης που εισέρχεται στο άλλο οπτικό μέσο θα έχει διαφορετική ταχύτητα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διάθλαση του φωτός.



Σχήμα 2.7.1

Πολλές φορές χάριν ευκολίας σχεδιάζουμε μόνο μία ακτίνα για κάθε δέσμη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7.2. Το σχήμα αυτό παριστάνει μια φωτεινή δέσμη που διαδίδεται στο οπτικό μέσο a (προσπίπτουσα ακτίνα). Η δέσμη αυτή προσπίπτει στη λεία διαχωριστική επιφάνεια του μέσου a από το οπτικό μέσο b και ένα μέρος της δέσμης ανακλάται (ανακλώμενη ακτίνα) ενώ το υπόλοιπο



Σχήμα 2.7.2

μέρος εισέρχεται στο μέσο b (διαθλώμενη ακτίνα). Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της αλλαγής της ταχύτητας του φωτός, η προσπίπτουσα και η διαθλώμενη ακτίνα δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Ορίζουμε ένα φυσικό αδιάστατο μέγεθος, χαρακτηριστικό για τη μονοχρωματική ακτίνα και το υλικό του οπτικού μέσου, το οποίο ονομάζουμε δείκτη διάθλασης,(ως προς το κενό) με σύμβολο το γράμμα n, σαν το πηλίκο της ταχύτητας c του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα υ του φωτός στο οπτικό μέσο. Δηλαδή $\boxed{n = \frac{c}{\upsilon}}$. (2.29)

Επειδή η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός σε οποιοδήποτε υλικό, είναι πάντα $n \geq 1$, με n = 1 μόνο για το κενό ή κατά προσέγγιση για τον αέρα.

ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

1. Η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη ακτίνα η διαθλώμενη ακτίνα και η κάθετος στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων στο σημείο πρόσπτωσης , βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια.

2. Η γωνία θ_a που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτίνα με την κάθετη στην κατοπτρική επιφάνεια στο σημείο που γίνεται η πρόσπτωση (γωνία πρόσπτωσης), είναι ίση με τη γωνία θ_r που σχηματίζει η ανακλώμενη ακτίνα με την ίδια κάθετη (γωνία ανάκλασης),για όλα τα μήκη κύματος και για όλα τα ζεύγη οπτικών υλικών με κοινή διαχωριστική επιφάνεια, δηλαδή ισχύει: $\boxed{\theta_a = \theta_r}$.

3. Για μονοχρωματικό φως και για συγκεκριμένο ζεύγος οπτικών υλικών a και b, ο λόγος των ημιτόνων των γωνιών θ_a και θ_b (γωνία διάθλασης), που σχηματίζουν αντίστοιχα, η προσπίπτουσα και η διαθλώμενη ακτίνα με την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια, ισούται με το αντίστροφο του λόγου των δεικτών διάθλασης:

$$\frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \qquad (2.30)$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{n_a \eta\mu\theta_a = n_b \eta\mu\theta_b} \qquad (2.31)$$

Η εξίσωση 2.30 ή η εξίσωση 2.31 ονομάζεται **νόμος του Snell**

Όταν μονοχρωματικό φως μεταβαίνει από ένα οπτικό μέσο a, στο οποίο η ταχύτητά του είναι υ_a, σε ένα άλλο οπτικό μέσο στο οποίο η ταχύτητά του γίνεται $\upsilon_b < \upsilon_a$ τότε από την εξίσωση ορισμού του δείκτη διάθλασης προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned} n_a &= \frac{c}{\upsilon_a} \\ n_b &= \frac{c}{\upsilon_b} \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \frac{n_a}{n_b} = \frac{\upsilon_b}{\upsilon_a} \overset{\upsilon_b<\upsilon_a}{\Rightarrow} \frac{n_a}{n_b} < 1 \Rightarrow n_a < n_b$$

. Από την εξίσωση 2.30 προκύπτει ότι

$\frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} > 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_a > \eta\mu\theta_b \Rightarrow \theta_a > \theta_b$, δηλαδή όταν η μετάβαση γίνεται από ένα μέσο a σε ένα άλλο b με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, η γωνία διάθλασης είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης.

Αυτό σημαίνει ότι:

Όταν μονοχρωματικό φως μεταβαίνει από οπτικά αραιό μέσο a σε οπτικά πυκνότερο μέσο b, η ταχύτητα του φωτός μειώνεται και η δέσμη κάμπτεται ώστε να πλησιάζει την κάθετο. Επειδή το αραιότερο οπτικό μέσο είναι το κενό, όταν μια μονοχρωματική ακτίνα μεταβαίνει από το κενό σε οποιοδήποτε οπτικό μέσο η προσπίπτουσα ακτίνα κάμπτεται ώστε να πλησιάζει την κάθετη.
Αντίστροφα, όταν μονοχρωματικό φως μεταβαίνει από ένα οπτικό μέσο σε ένα οπτικά αραιότερο, τότε η ταχύτητα του φωτός αυξάνεται και η ακτίνα κάμπτεται ώστε να απομακρύνεται από την κάθετη. Έτσι αν μια ακτίνας μεταβαίνει από ένα οπτικό μέσο στο κενό, η διαθλώμενη ακτίνα κάμπτεται ώστε να απομακρύνεται από την κάθετη.

Όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_a = 0^0$, δηλαδή όταν η προσπίπτουσα ακτίνα είναι κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων, τότε η γωνία διάθλασης είναι $\theta_b = 0^0$, όπως προκύπτει από το νόμο του Snell (Εξ. 2.31) και η ακτίνα δεν κάμπτεται. Όμως και στην περίπτωση αυτή εξακολουθούμε να μιλάμε για διάθλαση δεδομένου ότι έχει μεταβληθεί η ταχύτητα της διαθλώμενης δέσμης.

Είδαμε ότι κατά το φαινόμενο της διάθλασης μεταβάλλεται η ταχύτητα του φωτός. Τι συμβαίνει όμως με τα άλλα δύο κυματικά μεγέθη, τη συχνότητα και το μήκος κύματος;

Η συχνότητα ενός κύματος είναι εξ ορισμού ο αριθμός των κυμάτων που διέρχονται από μια επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου. Επειδή όμως η διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων δεν μπορεί να δημιουργήσει νέα κύματα (δεν είναι πηγή), ούτε όμως να εξαφανίσει τα υπάρχοντα (δεν είναι καταβόθρα), ο αριθμός των φωτεινών κυμάτων που φτάνουν στη διαχωριστική επιφάνεια είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που την εγκαταλείπουν στο ίδιο χρονικό διάστημα. Επομένων η ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f των φωτεινών κυμάτων κατά το φαινόμενο της διάθλασης ΔΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ.

Για την ταχύτητα, όπως είναι γνωστό ισχύει η θεμελιώδης κυματική εξίσωση $\upsilon = \lambda f$. Επειδή η ταχύτητα κατά τη διάθλαση μεταβάλλεται, ενώ η συχνότητα παραμένει σταθερή, πρέπει να μεταβάλλεται ανάλογα με την ταχύτητα και το μήκος κύματος.

Αν συμβολίσουμε με λ_0 το μήκος κύματος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας στο κενό και με λ το μήκος κύματος της ίδιας ακτινοβολίας στο οπτικό μέσο, τότε από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης (Εξ. 2.29) προκύπτει: $n = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0 \cancel{f}}{\lambda \cancel{f}} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ (2.32)

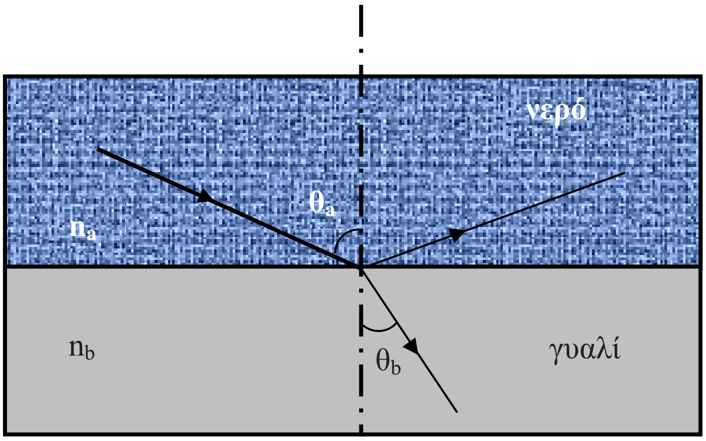
Όταν η μετάβαση της μονοχρωματικής δέσμης γίνεται από το οπτικό μέσο a στο οπτικό μέσο b, τότε από την εξίσωση 2.32 προκύπτει $\left.\begin{matrix} n_a = \frac{\lambda_0}{\lambda_a} \\ n_b = \frac{\lambda_0}{\lambda_b} \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \frac{n_a}{n_b} = \frac{\frac{\cancel{\lambda_0}}{\lambda_a}}{\frac{\cancel{\lambda_0}}{\lambda_b}} \Rightarrow \frac{n_a}{n_b} = \frac{\lambda_b}{\lambda_a}$, δηλαδή τα μήκη κύματος είναι αντίστροφα ανάλογα με τους δείκτες διάθλασης.

Παράδειγμα 2.12. Μια μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα διαδίδεται στο νερό με ταχύτητα $2,25\times10^8$ m/s και προσπίπτει στον γυάλινο πυθμένα του δοχείου με γωνία $\theta_a = 60^0$. Στη συνέχεια εισέρχεται στη γυάλινη πλάκα, η οποία έχει δείκτη διάθλασης 1,52 για την ακτινοβολία αυτή. Να υπολογίσετε

α) το δείκτη διάθλασης του νερού

β) τη γωνία διάθλασης στη γυάλινη πλάκα.

Δίνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3\times10^8$ m/s.



Λύση

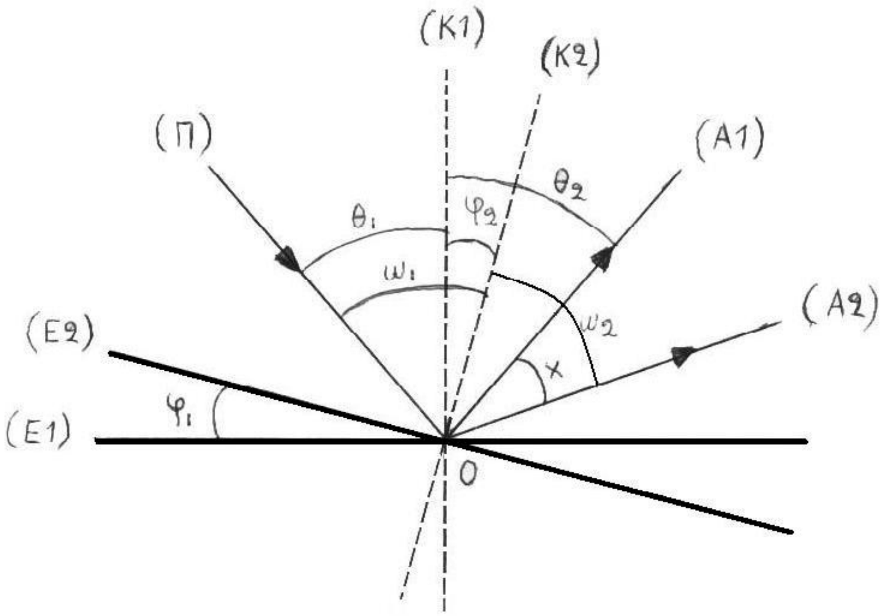
α. Από την εξίσωση ορισμού του δείκτη διάθλασης (Εξ. 2.29) παίρνουμε:

$$n = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow n = \frac{3\times \cancel{10^8\,m/s}}{2{,}25\times \cancel{10^8\,m/s}} \Rightarrow n = \frac{4}{3} \text{ ή } \boxed{n = 1{,}33}.$$

β. Από το νόμο Snell (Εξ. 2.31) λύνοντας ως προς $\eta\mu\theta_b$, παίρνουμε:

$$\eta\mu\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\cdot\eta\mu\theta_a \Rightarrow \eta\mu\theta_b = \frac{1{,}33}{1{,}52}\cdot\eta\mu 60 \Rightarrow \eta\mu\theta_b = 0{,}758 \Rightarrow \theta_b = 49{,}3^0.$$

Παράδειγμα 2.13. Μια φωτεινή ακτίνα ανακλάται από επίπεδο κάτοπτρο. Αν, χωρίς να αλλάξουμε τη θέση της προσπίπτουσας ακτίνας, στρέψουμε το κάτοπτρο κατά γωνία φ γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης, κατά πόσο θα στραφεί η ανακλώμενη ακτίνα;



Λύση

Έστω E_1 το επίπεδο ανάκλασης, Π η προσπίπτουσα ακτίνα, και K_1 η κάθετος στο επίπεδο E_1 (βλ. σχήμα). Έστω θ_1 η γωνία προσπτώσεως και θ_2 η γωνία υπό την οποία ανακλάται η Π από την επιφάνεια E_1 (η ανακλώμενη της Π είναι η ακτίνα A_1 στο σχήμα). Από το νόμο της ανάκλασης (Εξ. 2.28) έχουμε

$$\boxed{\theta_1 = \theta_2.} \qquad (2.13.1)$$

Στρέφουμε το επίπεδο E_1 κατά γωνία $\varphi_1 = \varphi$. Έστω E_2 η νέα θέση του επιπέδου, K_2 η κάθετος στο E_2 και A_2 η ανακλώμενη της ακτίνας Π από το E_2. Η γωνία φ_2 (K_1OK_2) κατά την οποία θα στραφεί η κάθετος, είναι ίση με τη γωνία φ_1, ως οξείες γωνίες με πλευρές μία προς μία κάθετες, δηλαδή είναι $\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}$. (2.13.2)

Η νέα γωνία προσπτώσεως θα είναι η $\omega_1 = \Pi OK_2$ και η γωνία ανακλάσεως από την επιφάνεια E_2 θα είναι η $\omega_2 = K_2OA_2$. Από το νόμο της ανάκλασης έχουμε

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2}. \qquad (2.13.3)$$

Ζητάμε να υπολογίσουμε τη γωνία $x = A_1OA_2$ κατά την οποία έχει στραφεί η ανακλώμενη ακτίνα.

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι: $\varphi_2 + \omega_2 = \theta_2 + x \underset{2.13.1}{\overset{2.13.3}{\Longrightarrow}} \varphi_2 + \omega_1 = \theta_1 + x$

Επίσης ισχύει ότι $\omega_1 = \theta_1 + \varphi_2$. Με αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

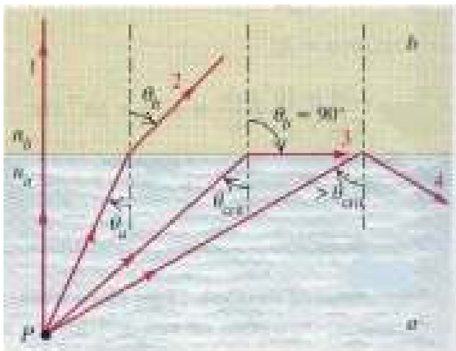
$$\varphi_2 + \cancel{\theta_1} + \varphi_2 = \cancel{\theta_1} + x \Rightarrow x = 2 \cdot \varphi_2 \overset{(2.13.2)}{\Longrightarrow} \boxed{x = 2 \cdot \varphi}.$$

Δηλαδή, όταν το επίπεδο ανάκλασης στρέφεται κατά γωνία φ, η ανακλώμενη ακτίνα στρέφεται κατά γωνία 2φ.

ΟΛΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Από το νόμο του Snell παίρνουμε $\eta\mu\theta_b = \dfrac{n_a}{n_b} \cdot \eta\mu\theta_a$. (2.33)

Παρατηρούμε ότι αν $n_a > n_b$ τότε $\eta\mu\theta_b > \eta\mu\theta_a$ ή $\theta_b > \theta_a$, δηλαδή αν η μετάβαση της μονοχρωματικής ακτίνας γίνει από μέσο οπτικά πυκνό σε μέσο οπτικά αραιότερο, η γωνία διάθλασης είναι μεγαλύτερη από τη γωνία πρόσπτωσης. Επομένως υπάρχει μια τιμή της γωνίας πρόσπτωσης $\theta_a < 90^0$ για την οποία θα είναι $\theta_b = 90^0$, δηλαδή η διαθλώμενη ακτίνα θα είναι παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων (πρακτικά αδύνατο, σύμφωνα με την αρχή της αντιστρεπτής πορείας του φωτός).



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται μερικές ακτίνες που εκπέμπονται από μια πηγή P μονοχρωματικού φωτός, η οποία βρίσκεται στο οπτικό μέσο α με δείκτη διάθλασης n_a. Οι ακτίνες προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια με ένα άλλο οπτικό μέσο με δείκτη διάθλασης $n_b < n_a$. Η ακτίνα 1 προσπίπτει κάθετα και δεν εκτρέπεται, η ακτίνα 2 προσπίπτει υπό γωνία θ_a και η γωνία διάθλασης είναι θ_b, ενώ η ακτίνα 3 προσπίπτει υπό τέτοια γωνία ώστε η γωνία διάθλασης να είναι 90^0. Η γωνία αυτή ονομάζεται **κρίσιμη γωνία** ή ορική γωνία και συμβολίζεται με θ_{crit} (από το critical = κρίσιμη). Αν η πρόσπτωση γίνει υπό γωνία μεγαλύτερη της κρίσιμης (ακτίνα 4, στο σχήμα) τότε δεν υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα και η ακτίνα ανακλάται εξ ολοκλήρου στη διαχωριστική επιφάνεια. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ολική ανάκλαση** και μπορεί να συμβεί ΜΟΝΟ αν η πρόσπτωση γίνεται στη διαχωριστική επιφάνεια με ένα δεύτερο οπτικό μέσο του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι μικρότερος από το δείκτη διάθλασης του οπτικού μέσου στο οποίο διαδίδεται η ακτίνα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη γωνία για δύο δεδομένα οπτικά μέσα και για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία, αρκεί να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση 2.33 τη γωνία διάθλασης θ_b με 90^0 οπότε $\eta\mu\theta_b = 1$:

$$1 = \frac{n_a}{n_b}\eta\mu\theta_{crit} \Rightarrow \qquad \boxed{\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}} \qquad (2.34)$$

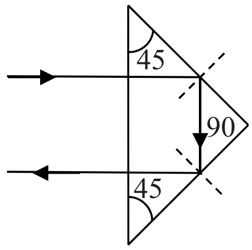
Παράδειγμα 2.14. Μια μονοχρωματική ακτίνα διαδίδεται σε γυαλί με δείκτη διάθλασης 1,52 και προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με τον αέρα. Να υπολογίσετε την κρίσιμη γωνία.

Λύση

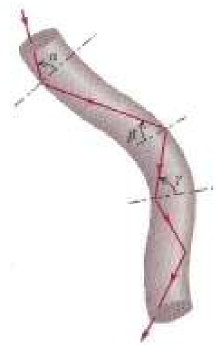
Από την εξίσωση 2.34 με αντικατάσταση των $n_a = 1{,}52$ και $n_b = 1$ (αέρας) παίρνουμε:

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{1}{1{,}52} \Rightarrow \eta\mu\theta_{crit} = 0{,}658 \text{ ή } \boxed{\theta_{crit} = 41{,}1^0}.$$

Σχόλια:



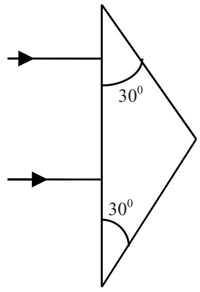
1. Επειδή η κρίσιμη γωνία για το συνδυασμό γυαλί – αέρας είναι μικρότερη από 45^0, ένα γυάλινο τριγωνικό πρίσμα με γωνίες 45^0, 45^0, 90^0 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ολικός ανακλαστήρας. Στο σχήμα φαίνεται η τομή ενός τέτοιου πρίσματος (που είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο), στο οποίο η μονοχρωματική ακτίνα προσπίπτει κάθετα στην υποτείνουσά του. Η ακτίνα μετά από δύο διαδοχικές ολικές ανακλάσεις εξέρχεται επίσης κάθετα από την υποτείνουσα, έχοντας εκτραπεί κατά 180^0. Μπορούμε με συνδυασμό τέτοιων πρισμάτων να εκτρέψουνε την ακτίνα κατά 90^0 ή να τη μετατοπίσουμε παράλληλα στον εαυτό της κλπ.



**2. Όταν μια φωτεινή δέσμη εισέρχεται σε μια διαφανή ράβδο, από το ένα άκρο της, το φως ανακλάται ολικά στο εσωτερικό της και παγιδεύεται μέσα στη ράβδο, μέχρι να βγει από το άλλο άκρο της, ακόμη και αν η ράβδος έχει καμφθεί, αρκεί η καμπυλότητα να μην είναι υπερβολικά μεγάλη. Μια τέτοια ράβδος ονομάζεται *φωταγωγός σωλήνας*. Το ίδιο συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε λεπτές ίνες, γυάλινες ή πλαστικές, αλλά το μεγάλο πλεονέκτημα, εκτός από την ευκαμψία που έχουν, είναι ότι λόγω της πολύ μικρής διαμέτρου (0,002 mm), μια λεπτή δεσμίδα μπορεί να αποτελείται από χιλιάδες τέτοιες ίνες (*οπτικές ίνες*).

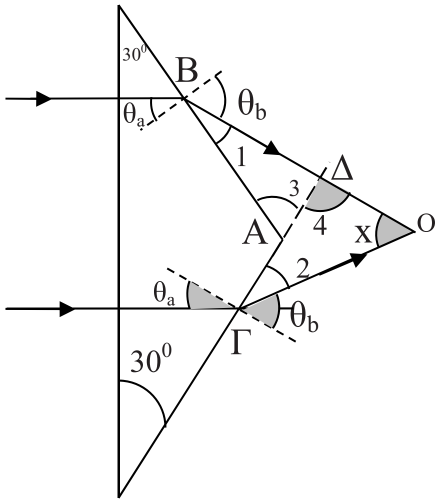
Οι εφαρμογές των οπτικών ινών είναι πάρα πολλές, χρησιμοποιούνται σαν ενδοσκόπια, στις τηλεπικοινωνίες για μετάδοση διαμορφωμένης δέσμης λέιζερ, στην πληροφορική για μετάδοση της πληροφορίας κλπ.

Παράδειγμα 2.15. Το πρίσμα του διπλανού σχήματος έχει δείκτη διάθλασης 1,48. Δύο παράλληλες μονοχρωματικές ακτίνες προσπίπτουν κάθετα στη μεγάλη έδρα του πρίσματος. Ποια είναι η μεταξύ τους γωνία, όταν εξέρχονται πάλι στον αέρα;



Λύση

Επειδή οι ακτίνες προσπίπτουν κάθετα στη μεγάλη πλευρά του πρίσματος εισέρχονται σ' αυτό χωρίς εκτροπή. Στη συνέχεια προσπίπτουν στις μικρές πλευρές του πρίσματος υπό γωνία $θ_a = 30^0$. (Οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες). Υπολογίζουμε την κρίσιμη γωνία, ώστε να εξετάσουμε μήπως οι ακτίνες ανακλαστούν ολικά καθώς μεταβαίνουν από το πρίσμα στον αέρα. Είναι



$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a} \Rightarrow \eta\mu\theta_{crit} = \frac{1}{1,48} \Rightarrow \eta\mu\theta_{crit} = 0,676 \Rightarrow$$

$θ_{crit} = 42,5^0$. Επειδή $θ_a < θ_{crit}$, οι ακτίνες διαθλώνται στα σημεία Β και Γ, εξέρχονται στον αέρα και τέμνονται στο σημείο Ο.

Υπολογίζουμε τις γωνίες διάθλασης $θ_b$, με τη βοήθεια του νόμου Snell.

$$\eta\mu\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\eta\mu\theta_a \Rightarrow \eta\mu\theta_b = \frac{1,48}{1}\cdot\eta\mu 30^0 \Rightarrow \eta\mu\theta_b = 0,74 \Rightarrow \theta_b = 47,7^0.$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτουν:

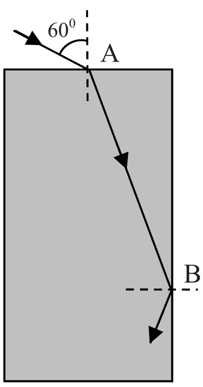
$A_3 = 30+30$ ➔ $A_3 = 60^0$ (Εξωτερική γωνία τριγώνου)

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 90^0 - \theta_b \\ \Gamma_2 &= 90^0 - \theta_b \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_1 = \Gamma_2 = 90^0 - 47,7^0 \Rightarrow B_1 = \Gamma_2 = 42,3^0.$$

$Δ_4 = B_1 + A_3$ ➔ $Δ_4 = 42,3^0 + 60^0$ ➔ $Δ_4 = 102,3^0$ (Εξωτερική γωνία τριγώνου).

$x + Δ_4 + Γ_2 = 180^0$ ➔ $x = 180^0 – (102,3^0 + 42,3^0)$ ➔ $\boxed{x = 35,4^0}$.

Παράδειγμα 2.16. Μια μονοχρωματική δέσμη φωτός που διαδίδεται στον αέρα, προσπίπτει στο σημείο Α μιας διαφανούς πλάκας υπό γωνία 60^0, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο δείκτης διάθλασης, ώστε η δέσμη να υποστεί ολική ανάκλαση στο σημείο Β.

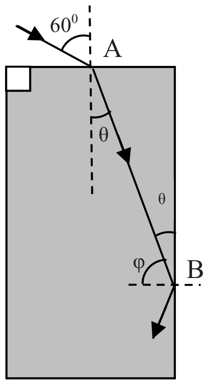


Λύση

Έστω n ο δείκτης διάθλασης της διαφανούς πλάκας και θ η γωνία διάθλασης.

Από το νόμο Snell έχουμε: $1\cdot\eta\mu 60^0 = n\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2n}$ (2.16.1)

Για την κρίσιμη γωνία ισχύει (Εξ. 2.34): $\eta\mu\theta_{crit} = \dfrac{1}{n}$ (2.16.2)



Αν φ είναι η γωνία πρόσπτωσης στο σημείο Β, τότε από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει: $\theta + \varphi = 90^0 \rightarrow \varphi = 90^0 - \theta$ (2.16.3)

Για να υποστεί η δέσμη ολική ανάκλαση στο Β πρέπει η γωνία υπό την οποία προσπίπτει να είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία, δηλαδή πρέπει: $\varphi \ge \theta_{crit} \overset{(2.16.3)}{\Longrightarrow} 90^0 - \theta \ge \theta_{crit}$. Επειδή οι όλες γωνίες είναι οξείες και η συνάρτηση ημχ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 90^0]$, μπορούμε να γράψουμε: $\eta\mu\left(90^0\text{-}\theta\right) \ge \eta\mu\theta_{crit} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \ge \eta\mu\theta_{crit} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta \ge \eta\mu^2\theta_{crit}$

$$\Rightarrow 1\text{-}\eta\mu^2\theta \ge \eta\mu^2\theta_{crit} \underset{(2.16.2)}{\overset{(2.16.1)}{\Longrightarrow}} 1\text{-}\left(\frac{\sqrt{3}}{2n}\right)^2 \ge \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow 1 - \frac{3}{4n^2} \ge \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 \ge \frac{7}{4n^2} \Rightarrow n \ge \frac{\sqrt{7}}{2}$$

άρα $n_{\min} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ή $n_{\min} = 1{,}32$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: *Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.*

2.151. Μονοχρωματική ακτίνα μήκους κύματος $\lambda_0 = 6{\cdot}10^{-9}$ *m* στο κενό, περνάει από το κενό στο γυαλί. Αν η γωνία πρόσπτωσης είναι 60^0 και η γωνία διάθλασης 30^0, τότε

α. το μήκος κύματος της ακτίνας στο γυαλί είναι $\sqrt{3}$ *nm*.

β. αν η συχνότητα της μονοχρωματικής ακτινοβολίας είναι $5{\cdot}10^{16}$ *Hz*, η ταχύτητα διάδοσης της ακτίνας στο γυαλί είναι $\upsilon = \sqrt{3}\times 10^8 \dfrac{m}{s}$.

γ. ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι ίσος με $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

δ. η συχνότητα όπως και η ταχύτητα της ακτινοβολίας δε μεταβάλλεται.

2.152. Ο δείκτης διάθλασης (ως προς το κενό) ενός οπτικού μέσου για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία, ισούται με το πηλίκο

α. της γωνίας πρόσπτωσης προς τη γωνία διάθλασης.

β. της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα του φωτός στο μέσο.

γ. της συχνότητας της ακτινοβολίας στο κενό προς τη συχνότητα της ακτινοβολίας στο μέσο.

δ. του μήκους κύματος της ακτινοβολίας στο οπτικό μέσο προς το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο κενό.

2.153. Μονοχρωματική ακτινοβολία που διαδίδεται στο οπτικό μέσο (1), προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με άλλο οπτικό μέσο (2). Οι δείκτες διάθλασης των οπτικών μέσων (1) και (2) για την ακτινοβολία αυτή είναι αντίστοιχα n_1 και n_2 ($n_1 < n_2$).

Συνεπώς

α. επειδή η μετάβαση γίνεται από οπτικά αραιό σε οπτικά πυκνότερο μέσο, δεν υπάρχει ανακλώμενη ακτίνα.

β. η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη ακτίνα και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

γ. ο λόγος των δεικτών διάθλασης $\frac{n_1}{n_2}$ ισούται με το λόγο του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης.

δ. η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια .

2.154. Όταν μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός μεταβαίνει από τον αέρα στο γυαλί ποια από τις σειρές του παρακάτω πίνακα περιγράφει τις μεταβολές που συμβαίνουν;

	Ταχύτητα	**Συχνότητα**	**Μήκος κύματος**
α.	μικρότερη	ίδια	μικρότερο
β.	μεγαλύτερη	ίδια	μεγαλύτερο
γ.	μεγαλύτερη	μεγαλύτερη	ίδιο
δ.	ίδια	μικρότερη	μεγαλύτερο

2.155. Όταν μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός μεταβαίνει από ένα οπτικό μέσο σε ένα άλλο με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, η γωνία διάθλασης συγκρινόμενη με τη γωνία πρόσπτωσης

α. είναι μεγαλύτερη.

β. είναι ίση.

γ. είναι μικρότερη.

δ. είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη.

2.156. Μια μονοχρωματική ακτίνα μεταβαίνει από τον αέρα στο γυαλί, του οποίου ο δείκτης διάθλασης για την ακτινοβολία αυτή είναι n. Ο λόγος του μήκους κύματος της ακτινοβολίας στον αέρα προς το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο γυαλί είναι

α. $\frac{1}{n^2}$. **β.** $\frac{1}{n}$. **γ.** n. **δ.** n^2.

2.157. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται σε δύο μονοχρωματικές ακτινοβολίες, μια κόκκινη και μια ιώδη, είναι η σωστή;

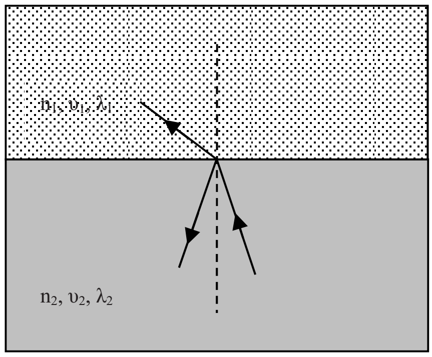
α. Στο κενό το μήκος κύματος της κόκκινης ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της ιώδους.

β. Στο κενό η ταχύτητα διάδοσης της κόκκινης ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης της ιώδους.

γ. Στο κενό η συχνότητα της κόκκινης ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα της ιώδους.

δ. Όταν οι δύο ακτινοβολίες εισέρχονται σε γυάλινο πρίσμα, ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος είναι μεγαλύτερος για την κόκκινη ακτινοβολία.

2.158. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πορεία μιας μονοχρωματικής ακτίνας. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη του σχήματος είναι ότι



α. το μέσο 1 είναι οπτικά πυκνότερο από το μέσο 2.
β. η ταχύτητα του φωτός αυξήθηκε.
γ. η συχνότητα αυξήθηκε.
δ. ισχύει $\lambda_1 < \lambda_2$.

2.159. Μια μονοχρωματική ακτίνα περνάει από ένα οπτικό μέσο σε ένα άλλο του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι κατά 20% μεγαλύτερος. Συνεπώς
α. το μήκος κύματος αυξάνεται κατά 20%.
β. το μήκος κύματος μειώνεται κατά 20%.
γ. η ταχύτητα διάδοσης μειώνεται κατά $16,\bar{6}$ %.
δ. η ταχύτητα διάδοσης μειώνεται κατά $33,\bar{3}$ %.

2.160. Ιώδης ακτινοβολία που διαδίδεται στο κενό, έχει μήκος κύματος 420 nm. Η ακτίνα προσπίπτει κάθετα σε γυάλινη πλάκα, η οποία έχει δείκτη διάθλασης για την ακτινοβολία αυτή, n = 1,5. Συνεπώς
α. η ακτίνα λόγω διάθλασης αλλάζει διεύθυνση.
β. η γωνία διάθλασης είναι 0^0.
γ. η ακτίνα δεν είναι ορατή στη γυάλινη πλάκα γιατί το μήκος κύματός της στο γυαλί είναι έξω από την περιοχή του ορατού (400 *nm* – 700 *nm*).
δ. η ταχύτητα διάδοσης στο γυαλί μειώνεται κατά $66,\bar{6}$ %.

2.161. Ένας άνθρωπος που στέκεται έξω από μια λίμνη, παρατηρεί ένα μικρό ψαράκι που βρίσκεται ακίνητο σε βάθος Η. Ο άνθρωπος εκτιμά ότι το ψαράκι βρίσκεται σε βάθος μικρότερο από Η, εξαιτίας του φαινομένου της
α. ανάκλασης. **β.** διάχυσης.
γ. διάθλασης. **δ.** ολικής ανάκλασης.

2.162. Η τομή γυάλινου πρίσματος έχει σχήμα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ ($Α = 90^0$). Μονοχρωματική ακτίνα φωτός πέφτει κάθετα στην έδρα ΑΒ και εξέρχεται εφαπτομενικά στην υποτείνουσα ΒΓ. Ο δείκτης διάθλασης n του πρίσματος είναι
α. $n = \sqrt{2}$ **γ.** $n \geq \sqrt{2}$
β. $1 < n \leq \sqrt{2}$ **δ.** $n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.163. Η κρίσιμη γωνία για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία που προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ αέρα – νερού, προερχόμενη από το νερό, εξαρτάται
α. από τη γωνία πρόσπτωσης.
β. από τη γωνία ανάκλασης.
γ. από την ταχύτητα της ακτινοβολίας στο κενό.
δ. από το δείκτη διάθλασης του νερού.

2.164. Ολική ανάκλαση μπορεί να συμβεί όταν μια μονοχρωματική ακτινοβολία που διαδίδεται σε ένα οπτικό μέσο προσπέσει στη διαχωριστική επιφάνεια με ένα άλλο οπτικό μέσο που έχει

α. μικρότερο δείκτη διάθλασης. **β.** τον ίδιο δείκτη διάθλασης.
γ. μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης. **δ.** δείκτη διάθλασης ίσο με τη μονάδα.

2.165. Μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός που διαδίδεται στο νερό, προσπίπτει στην ελεύθερη επιφάνειά του υπό γωνία 45^0. Αν ο δείκτης διάθλασης του νερού για την ακτινοβολία αυτή είναι $n = \frac{4}{3}$, η ακτίνα

α. κατά ένα μέρος ανακλάται και κατά το υπόλοιπο διαθλάται.
β. διαθλάται και κινείται κάθετα προς τη διαχωριστική επιφάνεια νερού – αέρα.
γ. διαθλάται και κινείται παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια νερού – αέρα.
δ. υφίσταται ολική ανάκλαση.

2.166. Για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία οι δείκτες διάθλασης του νερού και του γυαλιού είναι αντίστοιχα $\frac{4}{3}\ \textit{και}\ \frac{3}{2}$. Για την ακτινοβολία αυτή είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε ολική ανάκλαση όταν μεταβαίνει από

α. τον αέρα στο νερό. **β.** τον αέρα στο γυαλί.
γ. το γυαλί στο νερό. **δ.** το νερό στο γυαλί.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν την κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

2.167. Όταν οι ακτίνες μιας παράλληλης δέσμης ακτίνων μονοχρωματικού φωτός συναντούν τη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων, τότε

α. ένα μέρος του αρχικού φωτός επιστρέφει στο αρχικό μέσο.
β. η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης.
γ. οι ανακλώμενες ακτίνες εξακολουθούν να είναι μεταξύ τους παράλληλες.
δ. η ταχύτητα διάδοσης της ανακλώμενης δέσμης είναι μικρότερη από αυτήν της προσπίπτουσας.

2.168. Ο δείκτης διάθλασης ενός οπτικού μέσου είναι μικρότερος από το δείκτη διάθλασης του κενού.

2.169. Τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης συναντώνται μόνο στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

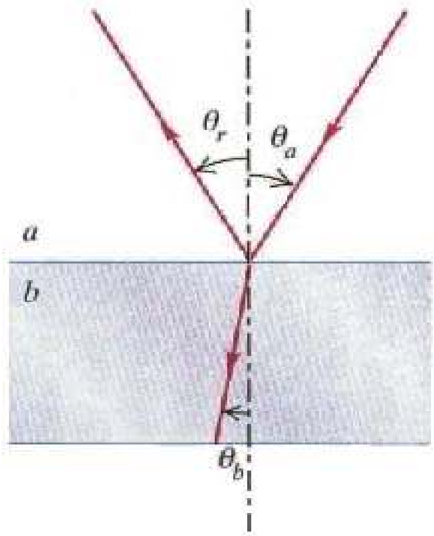
2.170. Το διπλανό σχήμα δείχνει τη διάθλαση μιας μονοχρωματικής ακτίνας κατά τη μετάβασή της από το οπτικό μέσο a στο οπτικό μέσο b. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

α. Η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία διάθλασης.

β. Ο δείκτης διάθλασης, για την ακτινοβολία αυτή, του μέσου b είναι μικρότερος από αυτόν στο μέσο a.

γ. Η συχνότητα της ακτινοβολίας στα δύο οπτικά μέσα είναι ίδια.

δ. Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο μέσο a είναι μεγαλύτερη από αυτή στο μέσο b.



2.171. Ο δείκτης διάθλασης ενός οπτικού μέσου, για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία, εκφράζει πόσες φορές είναι

α. μικρότερη η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο μέσο σε σχέση με την ταχύτητα διάδοσής της στο κενό.

β. μικρότερη η συχνότητα της ακτινοβολίας στο μέσο σε σχέση με αυτή στο κενό.

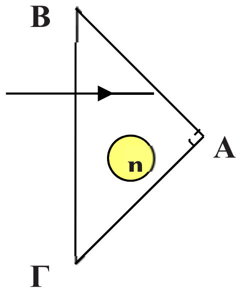
γ. μικρότερο το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο μέσο από αυτό στο κενό.

2.172. Το φαινομενικό «σπάσιμο» μιας ευθύγραμμης ράβδου, που είναι μισοβυθισμένη στο νερό, οφείλεται στο φαινόμενο της διάθλασης.

2.173. Εξαιτίας του φαινομένου της διάθλασης, ένα αντικείμενο μέσα στο νερό φαίνεται από έναν παρατηρητή έξω από το νερό σε μικρότερο βάθος από όσο πραγματικά είναι.

2.174. Όταν η γωνία πρόσπτωσης μιας μονοχρωματικής ακτίνας φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων είναι ίση με την κρίσιμη γωνία, τότε δεν υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα.

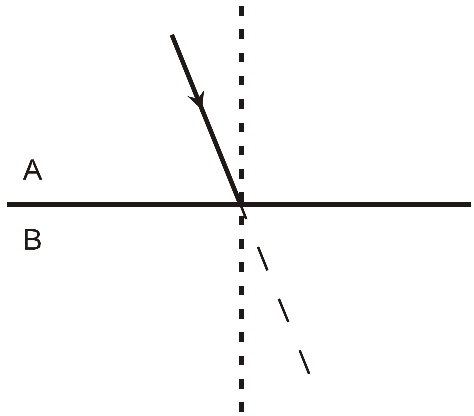
Ερωτήσεις ανοικτού τύπου



2.175. Μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός μεταβαίνει από τον αέρα στο γυάλινο πρίσμα, του οποίου η τομή είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, πέφτοντας κάθετα στην έδρα ΒΓ. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού για αυτήν την ακτινοβολία είναι 2. Να σχεδιάσετε και να δικαιολογήσετε την πορεία της ακτίνας μέχρι να βγει ξανά στον αέρα.

2.176. Να δικαιολογήσετε την πρόταση: «Δεν είναι δυνατόν να υπάρξει οπτικό μέσο το οποίο να είναι οπτικά αραιότερο από το κενό».

2.177. Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός που διαδίδεται στο οπτικό μέσο Α με δείκτη διάθλασης n_A προσπίπτει με γωνία μικρότερη της κρίσιμης στη διαχωριστική επιφάνεια με άλλο διαφανές οπτικό μέσο Β με δείκτη διάθλασης n_B, όπου $n_B < n_A$.



Α. Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε τη διαθλώμενη ακτίνα.

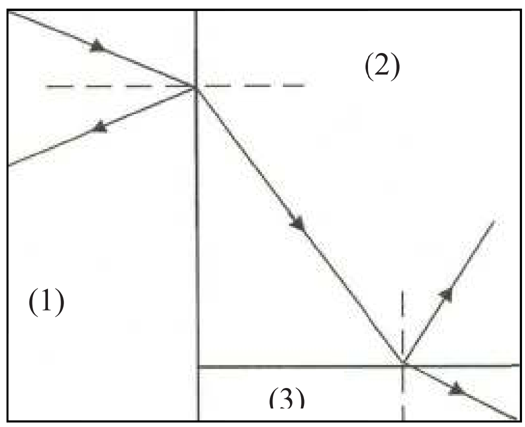
Β. Ποια από τις δύο γωνίες είναι μεγαλύτερη;

α. η γωνία προσπτώσεως,

β. η γωνία διαθλάσεως.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *[Ημ. Λύκειο Μά 2002]*

2.178. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η πορεία μιας ακτίνας μονοχρωματικού φωτός η οποία διέρχεται από τρία διαφανή υλικά (1), (2) και (3), με δείκτες διάθλασης n_1, n_2 και n_3 αντίστοιχα.



Ποια σχέση ικανοποιούν οι δείκτες διάθλασης;

α. $n_3 > n_2 > n_1$

β. $n_3 = n_2 > n_1$

γ. $n_1 > n_2 > n_3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

[Εσπ. Λύκειο Μά 2004]

2.179. Μονοχρωματική ακτινοβολία που διαδίδεται στο γυαλί προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια του γυαλιού με τον αέρα, με γωνία πρόσπτωσης θ_α τέτοια ώστε ημθ_α= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $n_\alpha = \sqrt{2}$. Η ακτινοβολία θα:

α. διαθλαστεί και θα εξέλθει στον αέρα.
β. κινηθεί παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια.
γ. ανακλαστεί ολικά από τη διαχωριστική επιφάνεια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *[Ημερ. Λύκειο Μά 2004]*

2.180. Μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_0 στο κενό περνάει από το μέσον α με δείκτη διάθλασης n_α στο μέσον β με δείκτη διάθλασης n_β προσπίπτοντας κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Αν $n_\alpha=2n_\beta$, τότε το μήκος κύματος λ_β της ακτινοβολίας στο μέσον β και το μήκος κύματος λ_α της ακτινοβολίας στο μέσο α ικανοποιούν τη σχέση

α. $\lambda_\beta = \frac{\lambda_\alpha}{2}$. **β.** $\lambda_\beta = 2\lambda_\alpha$. **γ.** $\lambda_\beta = 4\lambda_\alpha$.

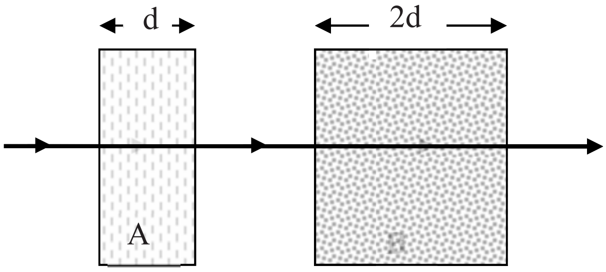
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμα.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. *[Εξ. Ελλήνων Εξωτερ 2005]*

2.181. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ γυαλιού και αέρα προερχόμενη από το γυαλί. Αν η ταχύτητα διάδοσης της ακτίνας στο γυαλί είναι υ και στον αέρα c $(\upsilon \neq c)$, τότε για την κρίσιμη γωνία θ_{crit} ισχύει η σχέση

α. $\eta\mu\theta_{crit} = \frac{c}{\upsilon}$ **β.** $\eta\mu\theta_{crit} = \frac{\upsilon}{c}$, **γ.** $\eta\mu\theta_{crit} = \frac{\upsilon^2}{c^2}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. *[Εξ. Ελλήνων Εξωτερ 2006]*

2.182. Μια μονοχρωματική ακτίνα διαπερνά κάθετα δύο πλάκες Α και Β με δείκτες διάθλασης n_A και n_B αντίστοιχα, στον ίδιο χρόνο. Η πλάκα Β έχει διπλάσιο πλάτος από την πλάκα Α, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



Ι. Για του δείκτες διάθλασης ισχύει η σχέση

α. $\frac{n_A}{n_B}=\frac{1}{2}$ **β.** $\frac{n_A}{n_B}=\frac{2}{1}$, **γ.** $\frac{n_A}{n_B}=\frac{1}{4}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.
ΙΙ. Αν στην πλάκα Α χωράνε ακριβώς 10^6 μήκη κύματος, τότε στην πλάκα Β χωράνε

α. 10^6 κύματα. **β.** $2{\cdot}10^6$ κύματα. **γ.** $4{\cdot}10^6$ κύματα.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.183. Στον πυθμένα δοχείου που περιέχει νερό, τοποθετούμε γυάλινο πλακίδιο. Τα δύο διαφανή υλικά έχουν το ίδιο πάχος d = 18 *cm*. Μια δέσμη παράλληλων ακτίνων μονοχρωματικού φωτός, που διαδίδεται στον αέρα, προσπίπτει κάθετα στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού και συνεχίζοντας την πορεία της προσπίπτει κάθετα και στο γυάλινο πλακίδιο.

α. Να σχεδιάσετε την πορεία της ακτίνας μέχρι τον πυθμένα του δοχείου.

β. Αν η ακτίνα διαπερνά το νερό σε χρόνο t_1 και το πλακίδιο σε χρόνο t_2, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{t_1}{t_2}$.

γ. Να υπολογίσετε τη χρονική καθυστέρηση που προκαλείται στη διάδοση της ακτίνας στο νερό από την παρεμβολή του πλακιδίου.

Δίνονται οι δείκτες διάθλασης του νερού και του γυαλιού $\frac{4}{3}$ και $\frac{3}{2}$ αντίστοιχα και η ταχύτητα του φωτός στον αέρα $3 \cdot 10^8$ *m/s*. [Απ. β. 8/9, γ. 10^{-10} s]

2.184. Ένα διαφανές πλακίδιο έχει παράλληλες επίπεδες πλευρές, περιβάλλεται από αέρα και έχει πάχος 15 *cm*. Μια μονοχρωματική ακτίνα που διαδίδεται στον αέρα, προσπίπτει στην επιφάνειά του υπό γωνία 60^0. Ο δείκτης διάθλασης του πλακιδίου είναι $\sqrt{3}$ και η ταχύτητα του φωτός στον αέρα είναι $3 \cdot 10^8$ *m/s*.

α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα εξέρχεται από το πλακίδιο.

β. Να σχεδιάσετε την πορεία της ακτίνας και να αποδείξετε ότι η αναδυόμενη ακτίνα είναι παράλληλη στην προσπίπτουσα.

γ. Να υπολογίστε το χρόνο, από τη στιγμή της εισόδου της στο πλακίδιο, που θα χρειαστεί για να βγει ξανά στον αέρα. [Απ. γ. 10^{-9} s]

2.185. Ένα δοχείο περιέχει υγρό ύψους 30 *cm*. Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού επιπλέει κυκλικός δίσκος, αμελητέου πάχους, διαμέτρου 10 *cm*. Ακριβώς πάνω από το κέντρο του δίσκου και σε απόσταση 5 *cm* βρίσκεται σημειακή πηγή μονοχρωματικού φωτός. Να υπολογίσετε τη διάμετρο του σκοτεινού κύκλου που σχηματίζεται στον πυθμένα του δοχείου. Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του υγρού $\sqrt{2}$ και ότι $\sqrt{3} = 1{,}73$.

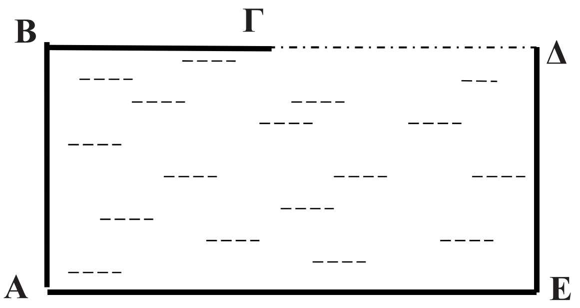
[Απ. 44,6 cm]

2.186. Μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται μέσα σε υγρό και προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με τον αέρα. Ο δείκτης διάθλασης του υγρού είναι $\sqrt{3}$ και η διαθλώμενη ακτίνα είναι κάθετη στην ανακλώμενη ακτίνα. Να υπολογίσετε

α. τη γωνία προσπτώσεως.

β. το ημίτονο της κρίσιμης γωνίας. [Απ. α. 30^0, β. $\frac{\sqrt{3}}{3}$]

2.187. Το ορθογώνιο δοχείο ΑΒΔΕ, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχει αδιαφανή τοιχώματα και οριζόντιο πυθμένα. Γεμίζουμε πλήρως το δοχείο με υγρό που έχει δείκτη διάθλασης 4/3. Το ύψος του δοχείου είναι $(AB) = h = \sqrt{7}\ cm$. Να υπολογιστεί το ελάχιστο μήκος (ΒΓ) της επιφάνειας του υγρού, το οποίο πρέπει να καλύψουμε με αδιαφανή πλάκα, ώστε η ακμή Α να είναι αόρατη από οποιοδήποτε σημείο. [Απ. 3 cm]



2.188. Ένας γυάλινος κύλινδρος έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο της βάσης του (η τομή του είναι τετράγωνο) και δείκτη διάθλασης $\sqrt{2}$. Μια φωτεινή μονοχρωματική ακτίνα πέφτει από τον αέρα στο κέντρο της πάνω βάσης του με γωνία πρόσπτωσης 45^0.

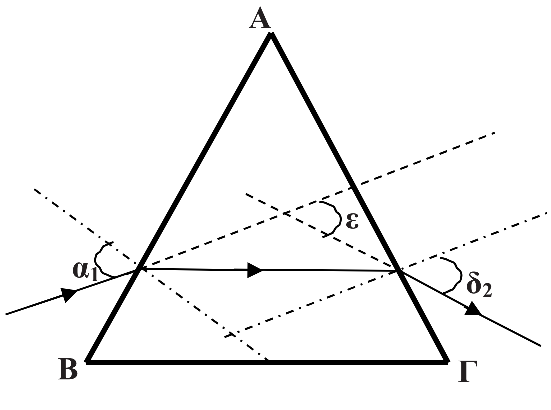
α. Να αποδείξετε, ότι μετά τη διάθλαση της στην πάνω βάση, η ακτίνα προσπίπτει στο πλευρικό τοίχωμα του κυλίνδρου και να υπολογίσετε τη γωνία πρόσπτωσης.

β. Να αποδείξετε ότι τελικά βγαίνει στον αέρα από την κάτω βάση του κυλίνδρου.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία εκτροπής της ακτίνας. (τη γωνία μεταξύ της εισερχόμενης και της εξερχόμενης από τον κύλινδρο ακτίνας)

[Απ. **α.** 60^0, **β.** μία ολική ανάκλαση, **γ.** 90^0].

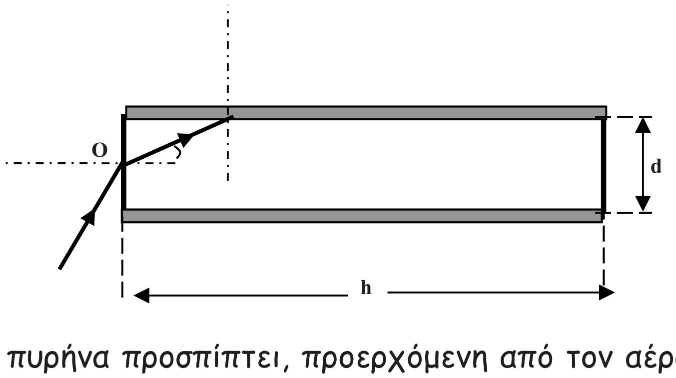
2.189. Στο γυάλινο πρίσμα ΑΒΓ του σχήματος προσπίπτει μονοχρωματική ακτινοβολία, προερχόμενη από τον αέρα, υπό γωνία $α_1$ (γωνία πρόσπτωσης) και εξέρχεται υπό γωνία $δ_2$ (γωνία ανάδυσης) ώστε $α_1 = δ_2$. Αν Α είναι η γωνία του πρίσματος και n ο δείκτης διάθλασής του, να αποδείξετε ότι:



α. Η γωνία εκτροπής ε δίνεται από τη σχέση $ε = 2α_1 - A$.

β. Ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται από τη σχέση:
$$n = \frac{\eta\mu\frac{\varepsilon + A}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}.$$

2.190. Γυάλινος κύλινδρος διαμέτρου d = 0,10 *cm* και μήκους h = 1,52 *m* (πυρήνας) είναι επικαλυμμένος ομόκεντρα με άλλον πολύ λεπτό γυάλινο κύλινδρο που έχει μικρότερο δείκτη διάθλασης. Στο κέντρο της μιας βάσης του κυλίνδρου – πυρήνα προσπίπτει, προερχόμενη από τον αέρα μονοχρωματική ακτίνα φωτός, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού του κυλίνδρου – πυρήνα είναι 1,60 ενώ του γυαλιού της επικάλυψης είναι 1,20.

Α. i.) Να υπολογίσετε τη ελάχιστη τιμή της γωνίας με την οποία πρέπει να γίνει η πρόσπτωση στο εσωτερικό του κυλίνδρου (πυρήνας – επικάλυψη), ώστε η ακτίνα να πάθει ολική ανάκλαση.

. **ii)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στη μία βάση του κυλίνδρου, η έξοδός της θα γίνει από την άλλη βάση του κυλίνδρου.

Β. Για γωνία πρόσπτωσης ίση με 30^0,

i) να υπολογίσετε τη τιμή της γωνίας διάθλασης.

ii) να υπολογίσετε το πλήθος των διαδοχικών εσωτερικών ανακλάσεων της ακτίνας μέχρι να ξαναβγεί στον αέρα.

iii) να προσδιορίσετε το σημείο της βάσης του κυλίνδρου από το οποίο εξέρχεται η ακτίνα.

Δίνονται: $ημ(18{,}2^0)=\frac{5}{16}$, $ημ(48{,}6^0)=\frac{3}{4}$, $ημ(71{,}8^0)=0{,}95$, $εφ(71{,}8^0)=3{,}04$

[Απ. **Α.** $48{,}6^0$ **Β.** $18{,}2^0$, 500, κέντρο]

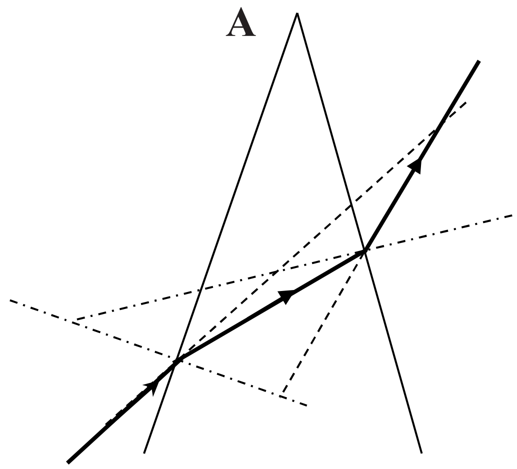
Σχόλια: α) Για τις διαιρέσεις ίσως χρειαστείτε κομπιουτεράκι.

β) Αυτή είναι η αρχή λειτουργίας μιας ΟΠΤΙΚΗΣ ΙΝΑΣ. Σήμερα κατασκευάζονται οπτικές ίνες με διάμετρο της τάξης των 4 μm = $4{\cdot}10^{-4}$ cm. Η διάταξη του σχήματος θα μπορούσε να ήταν ένας ΦΩΤΑΓΩΓΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ, για να μεταφερθεί το φως σε σημείο που δεν μπορούμε να πλησιάσουμε. Χρησιμοποιείται επίσης στην Ιατρική για ενδοσκόπηση, π.χ της ουροδόχου κύστης. Το μεγάλο πλεονέκτημα των οπτικών ινών είναι βέβαια ο τεράστιος όγκος πληροφοριών που μπορούν να μεταφέρουν, με τη βοήθεια κάποιου κυματικού φορέα (φως, ραδιοφωνικό κύμα κλπ). Για παράδειγμα αρκεί ΜΙΑ οπτική ίνα για τις ανάγκες μιας σύγχρονης κατοικίας (Τηλεφωνήματα, Τηλεόραση, Δεδομένα Η/Υ κλπ). Το κόστος όμως είναι, προς το παρών τουλάχιστον, απαγορευτικό για κάτι τέτοιο.

γ) Φυσικά δε χρειάζεται η ακτίνα να εισέρχεται από το κέντρο της βάσης ούτε ο κύλινδρος (ίνα) να είναι άκαμπτος. Ακόμη και αν καμφθεί, αρκεί η καμπυλότητα να μην είναι υπερβολικά μεγάλη, το φως ή η πληροφορία θα παγιδευτεί εκεί μέσα μέχρι να βγει από την άλλη βάση.

2.191. Αν Α είναι η γωνία του τριγωνικού πρίσματος, α είναι η γωνία πρόσπτωσης, δ η γωνία ανάδυσης και ε η γωνία εκτροπής, να δείξετε ότι η γωνία εκτροπής δίνεται από τη σχέση:

$$ε = δ - α + Α.$$



Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο

Α. ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ταχύτητα κύματος $\upsilon = \frac{x}{t}$ $\upsilon = \lambda f$

Μήκος κύματος $\lambda = \upsilon T$

Εξίσωση αρμονικού κύματος $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (φορά διάδοσης η Θετική)

$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ (φορά διάδοσης η ΑΡΝΗΤΙΚΗ)

Φάση αρμονικού κύματος $\Phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\Phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

Συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

Πλάτος $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\right|$

Ενισχυτική συμβολή $|r_1 - r_2| = n\lambda,\ \mu\varepsilon\ n = 0,1,2...$

Αποσβετική συμβολή $|r_1 - r_2| = (2n+1)\frac{\lambda}{2},\ \mu\varepsilon\ n = 0,1,2...$

Στάσιμο κύμα $y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t$

Πλάτος $|A'| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$

Απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών $\Delta x_{\delta} = \frac{\lambda}{2}$

Απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών $\Delta x_{k} = \frac{\lambda}{2}$

Απόσταση μεταξύ δεσμού και της επόμενης κοιλίας $\Delta x_{\kappa-\delta} = \frac{\lambda}{4}$

Α. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Εξίσωση Η/Μ κύματος $E = E_{max}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, $B = B_{max}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$\frac{E}{B} = c$ και $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c$

Δείκτης διάθλασης $n = \frac{c}{\upsilon}$ $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$

Νόμος Snell $n_a\eta\mu\theta_a = n_b\eta\mu\theta_b$

Κρίσιμη γωνία $\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$ $(n_b < n_a)$

Ολική ανάκλαση $\theta_a > \theta_{crit}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	
$\etaμx = \etaμθ \to \begin{cases} x = 2kπ + θ \\ ή \quad\quad k \in Z \\ x = (2k+1)π - θ \end{cases}$	$συνx = συνθ \to \begin{cases} x = 2kπ + θ \\ ή \quad\quad k \in Z \\ x = 2kπ - θ \end{cases}$
$συνx = 0$ ή $\lvert \etaμx \rvert = 1 \to x = kπ + \frac{π}{2},\ k \in Z$	$\etaμx = 0$ ή $\lvert συνx \rvert = 1 \to x = kπ,\ k \in Z$
$εφx = εφθ \to x = kπ + θ \quad k \in Z$	$σφx = σφθ \to x = kπ + θ \quad κ \in Z$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί	**ημθ**	**συνθ**	**εφθ**	**σφθ**
ημθ	——	$\pm\sqrt{1-συν^2θ}$	$\dfrac{εφθ}{\pm\sqrt{1+εφ^2θ}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2θ}}$
συνθ	$\pm\sqrt{1-ημ^2θ}$	——	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2θ}}$	$\dfrac{σφθ}{\pm\sqrt{1+σφ^2θ}}$
εφθ	$\dfrac{ημθ}{\pm\sqrt{1+ημ^2θ}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-συν^2θ}}{συνθ}$	——	$\dfrac{1}{σφθ}$
σφθ	$\dfrac{\pm\sqrt{1-ημ^2θ}}{ημθ}$	$\dfrac{συνθ}{\pm\sqrt{1+συν^2θ}}$	$\dfrac{1}{εφθ}$	——

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ	
$ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + ημβ \cdot συνα$	$συν(α+β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ$
$ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - ημβ \cdot συνα$	$συν(α-β) = συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ$
$εφ(α+β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$	$σφ(α+β) = \dfrac{σφα \cdot σφβ - 1}{σφα + σφβ}$
$εφ(α-β) = \dfrac{εφα - εφβ}{1 + εφα \cdot εφβ}$	$σφ(α-β) = \dfrac{σφα \cdot σφβ + 1}{σφβ - σφα}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ	
$ημ2θ = 2ημθ \cdot συνθ$	$συν2θ = συν^2θ - ημ^2θ = 2συν^2θ - 1 = 1 - 2ημ^2θ$
$εφ2θ = \dfrac{2εφθ}{1 - εφ^2θ}$	$σφ2θ = \dfrac{σφ^2θ - 1}{2σφθ} = \dfrac{σφθ - εφθ}{2}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ	
$ημA + ημB = 2ημ\dfrac{A+B}{2}συν\dfrac{A-B}{2}$	$ημA - ημB = 2ημ\dfrac{A-B}{2}συν\dfrac{A+B}{2}$
$συνA + συνB = 2συν\dfrac{A+B}{2}συν\dfrac{A-B}{2}$	$συνA - συνB = 2ημ\dfrac{A+B}{2}ημ\dfrac{B-A}{2}$
$εφA + εφB = \dfrac{ημ(A+B)}{συνA \cdot συνB}$	$εφA - εφB = \dfrac{ημ(A-B)}{συνA \cdot συνB}$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ	
$ημA \cdot ημB = \frac{1}{2}\left[συν(A-B) - συν(A+B)\right]$	$συνA \cdot συνB = \frac{1}{2}\left[συν(A+B) + συν(A-B)\right]$

ημ(2kπ+α) = ημα συν(2kπ+α) = συνα	ημ(2kπ-α) =- ημα συν(2kπ-α) = συνα
ημ(-α) =- ημα συν(-α) = συνα	$ημ\left(\frac{π}{2}-α\right)$ = συνα $συν\left(\frac{π}{2}-α\right)$ = ημα
ημ(π – α) = ημα συν(π – α) = - συνα	$ημ\left(\frac{π}{2}+α\right)$ = συνα $συν\left(\frac{π}{2}+α\right)$ = - ημα
ημ(π + α) = - ημα συν(π + α) = - συνα	$ημ\left(\frac{3π}{2}-α\right)$ = - συνα $συν\left(\frac{3π}{2}-α\right)$ = - ημα
	$ημ\left(\frac{3π}{2}+α\right)$ = - συνα $συν\left(\frac{3π}{2}+α\right)$ = ημα

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

	0	30^0 $\frac{\pi}{6}$	45^0 $\frac{\pi}{4}$	60^0 $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$	120^0 $\frac{2\pi}{3}$	135^0 $\frac{3\pi}{4}$	150^0 $\frac{5\pi}{6}$	180^0 π
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0