1 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α. Εξισώσεις της αρμονικής ταλάντωσης

Παράδειγμα 1.1. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας 0,2 *kg* εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η ταχύτητα του αντικειμένου περιγράφεται κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση $\upsilon = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (σε μονάδες του S.I.).

α. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

γ. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του.

Λύση

Όταν δίνεται κάποια εξίσωση ταλάντωσης (απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης δύναμης κλπ), τη συγκρίνουμε με τη γενική εξίσωση που περιγράφει την ίδια μεταβολή. Η δοσμένη εξίσωση και η γενική πρέπει να ταυτίζονται γιατί ισχύουν για κάθε τιμή του t.

Αν λοιπόν συγκρίνουμε την εξίσωση ταχύτητας που δίνεται στην εκφώνηση με τη σχέση 1.2 θα πάρουμε ότι $\omega A = 2\pi$ *m/s*, $\omega = 10\pi$ *rad/s* και $\varphi_0 = \pi/4$.

α. Είναι $\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{4}}$

β. $10\pi\, rad/s \cdot A = 2\pi\, m/s \Rightarrow \boxed{A = 0{,}2\, m}$.

γ. $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0{,}2\, kg \cdot (10\pi\, rad/s)^2 \Rightarrow \boxed{D = 20\pi^2\, N/m}$.

δ. Αντικαθιστούμε στην 1.1: $\boxed{x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)}$ (S.I.)

Παράδειγμα 1.2. Η επιτάχυνση ενός σημειακού αντικειμένου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση, περιγράφεται από την εξίσωση $\alpha = 20\pi^2 \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (S.I.). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης. Θεωρούμε ότι η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Η αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης είναι η φάση της απομάκρυνσης τη χρονική στιγμή t = 0. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η $x = A\ \eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ και της επιτάχυνσης η $\alpha = -\omega^2 A\ \eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τη δοθείσα εξίσωση επιτάχυνσης με τη γενική, πρέπει να έχουν την ίδια μορφή. Μπορούμε να αλλάξουμε τη μία ή την άλλη. Επιλέγουμε εδώ να αλλάξουμε τη γενική. Ισοδύναμα αυτή γράφεται: $a = \omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$. Συνεπώς με σύγκριση των δύο εξισώσεων παίρνουμε:

$\omega^2 A = 20\pi^2$ *m/s²*, ω = 10π *rad/s* και $\varphi_0 + \pi = \frac{\pi}{3}$.

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} - \pi \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}}$ ή $\varphi_0 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{4\pi}{3}}$.

Επίσης είναι $(10\pi\ rad/s)^2 \cdot A = 20\pi^2\ m/s^2 \Rightarrow A = 0,2\ m$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $\boxed{x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)\ (S.I.)}$ ή $\boxed{x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)\ (S.I.)}$.

- **Παράδειγμα 1.3.** Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη Θ.Ι. του (x = 0) κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση (υ > 0). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση

Γράφουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου:

$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$\upsilon = \omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

Αντικαθιστούμε τις δοσμένες αρχικές συνθήκες t = 0, x = 0 και υ > 0

$A\eta\mu\varphi_0 = 0 \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0$

$\omega A\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει ότι η μοναδική λύση στο [0 ,2π) είναι η $\boxed{\varphi_0 = 0}$.

- **Παράδειγμα 1.4.** Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση (υ > 0). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση

Γράφουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου:

$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$\upsilon = \omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

Αντικαθιστούμε τις δοσμένες αρχικές συνθήκες t = 0, $x = -\frac{A}{2}$ και υ > 0

$$\left.\begin{array}{l} A\eta\mu\varphi_0 = -\frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \\ \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \end{array}\right\rangle \overset{4o}{\Rightarrow} \varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}} \text{ ή } \boxed{\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}}.$$

- **Παράδειγμα 1.5.** Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση x = + A. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση

Όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται σε ακραία θέση της τροχιάς του είναι $υ = 0$. Για το λόγο αυτό δε δίνεται η φορά κίνησης.

Γράφουμε την εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου: $x = A\,ημ(ωt + φ_0)$ και αντικαθιστούμε $Aημφ_0 = A$ ή $ημφ_0 = 1$ ή $\boxed{φ_0 = \frac{\pi}{2}}$.

<u>Σημείωση:</u> Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της αρχικής φάσης είναι με τον κύκλο αναφοράς.

Παράδειγμα 1.6. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x. Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της τροχιάς του είναι 0,2 *m* και ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να πάει από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι 1 s. Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το αντικείμενο περνάει από τη θέση $x = 0{,}05$ *m* για $1^η$ και $4^η$ φορά, μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε πρώτα την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Γράφουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου:

$x = A\,ημ(ωt + φ_0)$ Αντικαθιστούμε τις δοσμένες αρχικές
$υ = ωA\,συν(ωt + φ_0)$ συνθήκες $t = 0$, $x = 0$ και $υ < 0$.
$Aημφ_0 = 0 \rightarrow ημφ_0 = 0$ Από το σύστημα αυτό προκύπτει
$ωA\,συνφ_0 < 0 \rightarrow συνφ_0 < 0$ ότι η μοναδική λύση στο $[0, 2π)$ είναι η $φ_0 = π$.

Επειδή οι δύο ακραίες θέσεις του ταλαντωτή στην αμείωτη αρμονική ταλάντωση απέχουν 2A, είναι $2A = 0{,}2$ *m* ή $A = 0{,}1$ *m*. Επίσης ο ελάχιστος χρόνος για να μεταβεί ο ταλαντωτής από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι T/2, άρα $T/2 = 1$ *s* ή $T = 2$ *s*. και $ω = π$ *rad/s*

Για να υπολογίσουμε τις ζητούμενες χρονικές στιγμές, γράφουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης και λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση που προκύπτει.

$x = A\cdot ημ(ω\cdot t + φ_0) \Rightarrow x = 0{,}1\cdot ημ(π\cdot t + π)$ (S.I). Αντικαθιστούμε στη $x = 0{,}05$ m και έχουμε $0{,}1\cdot ημ(πt+π) = 0{,}05 \Rightarrow ημ(πt+π) = 0{,}5 \Rightarrow ημ(πt+π) = ημ\frac{π}{6}$. Η εξίσωση αυτή έχει δύο απειρίες λύσεων:

$$πt+π = 2kπ + \frac{π}{6} \Rightarrow t = 2k - \frac{5}{6},\quad k = 1,2,3... \qquad (1.6.1)$$

$$πt+π = 2nπ + π - \frac{π}{6} \Rightarrow t = 2n - \frac{1}{6},\quad n = 1,2,3... \qquad (1.6.2)$$

(Οι τιμές που μπορούν να πάρουν οι ακέραιοι k και n πρέπει να δίνουν $t > 0$).

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε <u>και στις δύο λύσεις τη μικρότερη από τις επιτρεπόμενες τιμές των ακεραίων</u>. Έτσι για $k = 1$ η πρώτη δίνει $t_1 = \frac{7}{6}s$ και η δεύτερη για $n = 1$ δίνει $t_2 = \frac{11}{6}s$. Επειδή $t_1 < t_2$, ο ταλαντωτής διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = 0{,}05$ *m* τη χρονική στιγμή t_1 και για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή t_2. Συνεπώς η λύση από την οποία προέκυψε η χρονική στιγμή t_1 θα δίνει τις περιττές φορές ($1^η$, $3^η$, $5^η$, $7^η$ ...σχέση 1.6.1) που διέρχεται από τη δεδομένη θέση και η λύση από την οποία προέκυψε η χρονική στιγμή t_2 θα δίνει τις άρτιες φορές ($2^η$, $4^η$, $6^η$, $8^η$...σχέση 1.6.2). Για πρώτη φορά το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση x = 0,05 *m* τη χρονική στιγμή $\boxed{t_1 = \frac{7}{6} s}$. Για να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή που θα περάσει από την ίδια θέση για $4^η$ φορά, αντικαθιστούμε στην $t = 2n - \frac{1}{6}$ όπου n = 2. [n = 1: $2^η$ φορά, n = 2: $4^η$ φορά, n = 3: $6^η$ φορά κλπ].

Άρα $t_4 = \left(4 - \frac{1}{6}\right) s \Rightarrow \boxed{t_4 = \frac{23}{6} s}$

Παράδειγμα 1.7. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος 8 *cm*, περίοδο 12 *s* και μηδενική αρχική φάση. Θεωρούμε ότι η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα για να μεταβεί από τη θέση – 4 *cm* στη θέση + 4 *cm*.

Λύση

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που ζητείται, αντιστοιχεί στην απ' ευθείας μετάβαση του αντικειμένου από τη θέση x_1 = - 4 *cm* στη θέση x_2 = + 4 *cm*, δηλαδή σε κίνηση με υ > 0.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow ω = \frac{π}{6}\ rad/s.$$

Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για την ταλάντωση είναι

$x = 8 \cdot ημ\left(\frac{π}{6}t\right)$ και $υ = \frac{8π}{6} συν\left(\frac{π}{6}t\right)$ t σε s, x σε cm *και υ σε* cm/s.

Πρέπει
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -4\ cm \\ υ_1 > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 \cdot ημ\left(\frac{π}{6}t\right) = -4 \\ \frac{8π}{6} συν\left(\frac{π}{6}t\right) > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ημ\left(\frac{π}{6}t\right) = -\frac{1}{2} \\ συν\left(\frac{π}{6}t\right) > 0 \end{array}\right\rangle \overset{4^o}{\Rightarrow} \frac{π}{6}t_1 = 2kπ - \frac{π}{6} \overset{S.I.}{\Rightarrow} t_1 = 12k - 1$$

με k = 1, 2, 3, … ώστε t_1 > 0.

Πρέπει
$$\left.\begin{array}{l} x_2 = +4\ cm \\ υ_2 > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 \cdot ημ\left(\frac{π}{6}t\right) = 4 \\ \frac{8π}{6} συν\left(\frac{π}{6}t\right) > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ημ\left(\frac{π}{6}t\right) = \frac{1}{2} \\ συν\left(\frac{π}{6}t\right) > 0 \end{array}\right\rangle \overset{1^o}{\Rightarrow} \frac{π}{6}t_2 = 2nπ + \frac{π}{6} \overset{S.I.}{\Rightarrow} t_2 = 12n + 1$$

με n = 0, 1, 2, 3, … ώστε t_2 > 0.

Επίσης πρέπει να είναι $t_2 > t_1$, άρα $Δt = t_2 - t_1 = 12(n-k) + 2$. Η ελάχιστη τιμή για το Δt είναι 2 s όταν n – k =0 ή n = k (≥ 1). Άρα $\boxed{Δt_{min} = 2\ s}$.

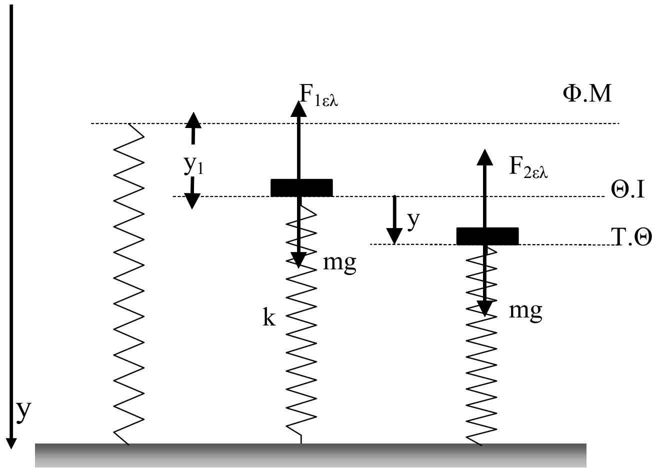
Συστήματα που εκτελούν Αρμονική Ταλάντωση.

Γενικά. Για να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση (π.χ κατά τον άξονα x΄x), ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του.
2. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας $ΣF_x = 0$.
3. Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του και σημειώνουμε πάλι όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό.

4. Σχεδιάζουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{x}$, το οποίο έχει αρχή τη θέση ισορροπίας και τέλος την τυχαία θέση. Η φορά του διανύσματος θέσης είναι και η θετική φορά του άξονα ταλάντωσης.
5. Στην τυχαία θέση υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη κατά τον άξονα ταλάντωσης, δηλαδή βρίσκουμε μια έκφραση για τη ΣF_x σε συνάρτηση με το x. Αν καταλήξουμε στη μορφή $\Sigma F_x = -$ σταθερά $\cdot$ x, τότε το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D ίση με τη σταθερά που βρήκαμε, και με περίοδο που δίνεται από τη σχέση 1.8. Προσοχή: το πρόσημο – πρέπει απαραίτητα να προκύψει στην έκφραση της ΣF_x.

Παράδειγμα 1.8. Ένα μικρών διαστάσεων σώμα που έχει μάζα 1 *kg* ισορροπεί δεμένο στη μία άκρη ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m*, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε λίγο το σώμα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδό της.



Λύση

Στη θέση ισορροπίας στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος του και η δύναμη από το ελατήριο. Πρέπει $\Sigma F_y = 0$ ή $F_{1\varepsilon\lambda} = mg$ ή $k\,y_1 = mg$ (1.8.1)

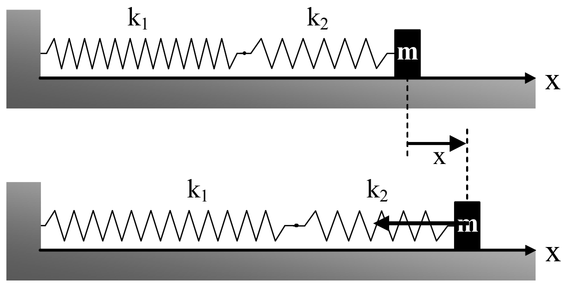
Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά y από τη θέση ισορροπίας του. Το διάνυσμα θέσης έχει φορά προς τα κάτω και επομένως η θετική φορά του άξονα y είναι προς τα κάτω. Έτσι στην τυχαία θέση:

$$\Sigma F_y = mg - F_{2\varepsilon\lambda} = mg - k(y_1 + y) = mg - ky_1 - ky \overset{(1.8.1)}{\Rightarrow} \Sigma F_y = -ky \text{ ή } \Sigma F_y = -D\,y.$$

Άρα η μάζα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με D = k και περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\,s \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{5}\,s} \text{ ή } T = 0{,}628\ s.$$

Παράδειγμα 1.9. Δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 = 200 *N/m* και k_2 = 300 *N/m* συνδέονται σε σειρά. Το ένα άκρο του συστήματος που προκύπτει συνδέεται ακλόνητα με κατακόρυφο τοίχο και το άλλο συνδέεται με σώμα μάζας m = 0,3 *kg*. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη. Να δείξετε



ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίων θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

Λύση

Στη θέση ισορροπίας επειδή τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, δεν ασκείται καμία δύναμη κατά τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα.

Απομακρύνουμε κατά x το σώμα από τη θέση ισορροπίας του. Στη θέση αυτή τα ελατήρια επιμηκύνονται, το μεν k_1 κατά x_1 το δε k_2 κατά x_2. Επειδή τα ελατήρια έχουν διαφορετική σκληρότητα $(k_1 \neq k_2)$, δεν επιμηκύνονται το ίδιο. Ισχύει προφανώς ότι $x = x_1 + x_2$. (1.9.1)

Στο σώμα ασκείται δύναμη από το ελατήριο σταθεράς k_2 ίση με $F = -k_2x_2$ (1.9.2)

(Η θετική φορά του άξονα είναι του διανύσματος θέσης x, όπως φαίνεται στο σχήμα.)

Σύμφωνα με το αξίωμα «Δράση – Αντίδραση» το σώμα ασκεί στο ελατήριο k_2 δύναμη ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς, δηλαδή δύναμη $F' = k_2x_2$. (1.9.3)

Επειδή τα ελατήρια είναι ιδανικά, δηλαδή η μάζα τους θεωρείται αμελητέα, η δύναμη F΄ ασκείται (μεταφέρεται) στο ελατήριο k_1 στο σημείο που συνδέεται με το k_2. Συνεπώς το k_1 επιμηκύνεται από δύναμη F΄ κατά x_1. Ισχύει ότι $F' = k_1x_1$. (1.9.4)

Από τις σχέσεις 1.9.3 και 1.9.4 προκύπτει: $k_1x_1 = k_2x_2 \Rightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow \dfrac{k_1}{k_1+k_2} = \dfrac{x_2}{x_1+x_2}$

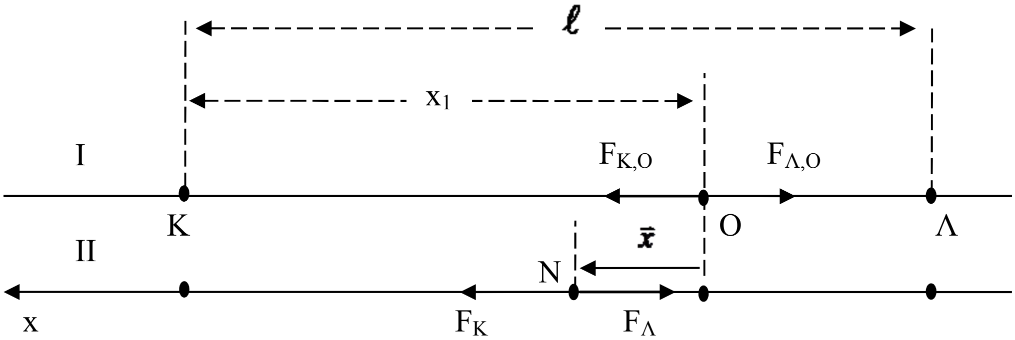
$\overset{1.9.1}{\Rightarrow} x_2 = \dfrac{k_1}{k_1+k_2}\cdot x$. Με αντικατάσταση στην 1.9.2 παίρνουμε $F = -\dfrac{k_1 \times k_2}{k_1+k_2}\cdot x$.

Αν συμβολίσουμε $D = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1+k_2}$, προκύπτει η συνθήκη της αρμονικής ταλάντωσης F = - D x.

Η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης είναι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{k_1\cdot k_2}\cdot m} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{500\cdot 0{,}3}{200\cdot 300}}\ s \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}\ s \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{10}\ s} \text{ ή } T = 0{,}314\ s.$$

Παράδειγμα 1.10. Δύο σημεία Κ και Λ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους $\ell = 0{,}9\ m$. Πάνω στη γραμμή που τα ενώνει μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σημειακό αντικείμενο Ν μάζας $m = 96\cdot 10^{-3}\ kg$, το οποίο δέχεται από τα σημεία Κ και Λ ελκτικές δυνάμεις που έχουν



μέτρα $F_K = 0{,}8\times(KN)$ και $F_\Lambda = 1{,}6\times(\Lambda N)$ αντίστοιχα (SI).

Να δείξετε ότι το σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδό της.

Λύση

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση ισορροπίας Ο του σημειακού αντικειμένου. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, στο σημειακό αντικείμενο θα ασκούνται δύο δυνάμεις, των οποίων τα μέτρα θα είναι ανάλογα στην απόσταση του Ο από τα σημεία Κ και Λ. Οι κατευθύνσεις των δυνάμεων αυτών είναι σημειωμένες στο σχήμα Ι. Εφαρμόζουμε για τη θέση Ο τη συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{K,O} - F_{\Lambda,O} = 0 \Rightarrow 0{,}8(OK) - 1{,}6(O\Lambda) = 0 \Rightarrow 0{,}8x_1 - 1{,}6(\ell - x_1) = 0 \Rightarrow 2{,}4x_1 - 1{,}6\ell = 0 \quad (1.10.1)$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}\ell \Rightarrow x_1 = 0{,}6\ m$ Το σημείο ισορροπίας Ο απέχει από το σημείο Κ απόσταση 0,6 *m* και επομένως από το σημείο Λ απόσταση 0,3 *m*.

Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση Ν, έστω αριστερά από τη θέση ισορροπίας Ο. Ορίζουμε το διάνυσμα θέσης x $\left[\vec{x} = \overrightarrow{ON}\right]$ και τη θετική φορά του άξονα x προς τα αριστερά (σχήμα ΙΙ). Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F_x = F_K - F_\Lambda = 0{,}8(KN) - 1{,}6(\Lambda N) = 0{,}8(x_1 - x) - 1{,}6(\ell - x_1 + x) \overset{1.10.1}{=} \cancel{2{,}4x_1} - 2{,}4x - \cancel{1{,}6\ell} \Rightarrow$$

$\Sigma F_x = -2{,}4x$ ή $\Sigma F_x = -Dx$ με $D = 2{,}4\ N/m$.

Είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{96 \cdot 10^{-3}}{2{,}4}}\ s = 2\pi\sqrt{4 \cdot 10^{-2}}\ s \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{5}\ s}$ ή Τ = 1,256 *s*.

✓ <u>Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ</u>

> ✓ **<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u>**
>
> Η δυναμική ενέργεια που περικλείει ένα παραμορφωμένο ελατήριο δίνεται από τη σχέση $U = \frac{1}{2}kx^2$. Η σχέση αυτή μοιάζει με τη σχέση που δίνει την ενέργεια ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή, όμως εδώ το x μετριέται από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου $(x = \Delta\ell)$, ενώ στη σχέση που δίνει τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης το x μετριέται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.
>
> Επίσης, η σχέση που δίνει τη δύναμη που ασκεί ένα παραμορφωμένο ελατήριο σ' ένα σώμα, είναι $F_{ελ} = -k\,x$. Η σχέση αυτή μοιάζει με τη σχέση που δίνει τη δύναμη επαναφοράς στην αρμονική ταλάντωση, αλλά στη δύναμη του ελατηρίου το x μετριέται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ενώ στη δύναμη επαναφοράς μετριέται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.
>
> Το έργο της δύναμης ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:
>
> $$W_{ελ} = -\Delta U_{ελ} \Rightarrow W_{ελ} = U_{ελ,ΑΡΧ} - U_{ελ,ΤΕΛ} \Rightarrow W_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{ΑΡΧ} - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{ΤΕΛ}$$
>
> Το έργο της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση:
>
> $$W_{επ} = -\Delta U_T \Rightarrow W_{επ} = U_{T,ΑΡΧ} - U_{T,ΤΕΛ} \Rightarrow W_{επ} = \frac{1}{2}kx^2_{ΑΡΧ} - \frac{1}{2}kx^2_{ΤΕΛ}$$

<u>ΣΧΟΛΙΑ:</u> Σε κάθε αρμονική ταλάντωση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας.

Ε = σταθερή

Τη σχέση αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε για 2 οποιεσδήποτε θέσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

1. Για μια θέση Σ, η οποία απέχει από τη Θ.Ι κατά x και στην οποία έχει ταχύτητα μέτρου υ, και σε μια ακραία θέση: $K_\Sigma + U_\Sigma = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ένα από τα x, υ, A, m, D αν γνωρίζουμε τα υπόλοιπα.
2. Για δύο θέσεις Μ και Ν, οι οποίες απέχουν αντίστοιχα κατά x_1 και x_2 από τη θέση ισορροπίας και στις οποίες ο αρμονικός ταλαντωτής έχει ταχύτητες μέτρων υ_1 και υ_2, αντίστοιχα: $K_M + U_M = K_N + U_N \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Dx_2^2$, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ένα από τα x_1, x_2, υ_1, υ_2, m, D αν γνωρίζουμε τα υπόλοιπα.

Παράδειγμα 1.11. Αναφερόμαστε στο παράδειγμα 1.10. Δίνεται επιπλέον ότι το σημειακό αντικείμενο όταν διέρχεται από το σημείο Κ έχει ταχύτητα μέτρου υ_K = 1,5 *m/s*. Ζητείται να υπολογιστούν

α. το μέτρο της ταχύτητάς του όταν διέρχεται από το σημείο Λ.

β. το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί.

Λύση

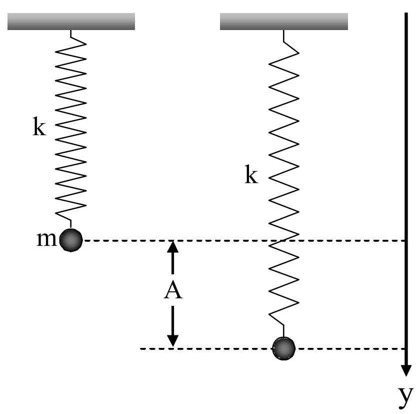
α. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την αρμονική ταλάντωση του αντικείμενου στις θέσεις Κ και Λ. $K_K + U_K = K_\Lambda + U_\Lambda \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}m\upsilon_K^2 + \cancel{\frac{1}{2}}Dx_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}}m\upsilon_\Lambda^2 + \cancel{\frac{1}{2}}Dx_2^2 \overset{x_2=\ell-x_1}{\Rightarrow} \upsilon_\Lambda^2 = \upsilon_K^2 + \frac{D}{m}\left[x_1^2 - (\ell - x_1)^2\right]$

$$|\upsilon_\Lambda| = \sqrt{\upsilon_K^2 + \frac{D}{m}\left[x_1^2 - (\ell - x_1)^2\right]} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \boxed{|\upsilon_\Lambda| = 3\,m/s}$$

β. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για τη θέση Κ και για μια ακραία.

$$K_K + U_K = E \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}m\upsilon_K^2 + \cancel{\frac{1}{2}}Dx_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{m}{D}\upsilon_K^2} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \boxed{A = 0{,}3\sqrt{5}\ m} \text{ ή } A \approx 0{,}67\ m.$$

Παράδειγμα 1.12. Ένα σώμα μάζας m = 0,5 *kg* είναι δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 50 *N/m* και ισορροπεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου κατά A = 0,2 *m* προς τα κάτω και την αφήνουμε ελεύθερη.

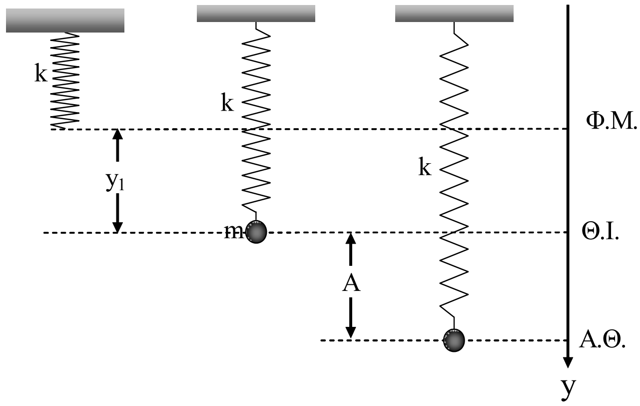


α. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης;

β. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου;

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της μάζας από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο, αν για t = 0 διέρχεται από τη θέση y = + 0,1 *m* κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση y είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και $g = 10\ m/s^2$.

<u>Λύση</u>



Υπολογίζουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου εξ αιτίας του βάρους του σώματος. Θ.Ι.: ΣF = 0 ➔ $mg - ky_1 = 0$ ➔ $y_1 = 0{,}1\ m$.

α. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $U = \frac{1}{2}Dy^2$.

Στο σύστημα μάζα – ελατήριο, για τη σταθερά επαναφοράς γνωρίζουμε ότι ισούται με τη σταθερά k του ελατηρίου, δηλαδή D = k. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης αντιστοιχεί στις θέσεις μέγιστης απομάκρυνσης από τη Θ.Ι, δηλαδή στις θέσεις $y = \pm A$. Με αντικατάσταση:

$$U_{max} = \frac{1}{2}k(\pm A)^2 \Rightarrow U_{max} = \frac{1}{2}50\frac{N}{m}(0{,}2m)^2 \Rightarrow \qquad \boxed{U_{max} = 1\,J}$$

β. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση $U_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$, όπου το $\Delta\ell$ το μετράμε από τη θέση στην οποία αντιστοιχεί στο ΦΥΣΙΚΟ ΜΗΚΟΣ του ελατηρίου. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου αντιστοιχεί σε θέση μέγιστης παραμόρφωσής του. Οι δύο ακραίες θέσεις της τροχιάς του σώματος είναι οι δύο πιθανές θέσεις μέγιστης παραμόρφωσης. Η κάτω ακραία θέση (y = + A) αντιστοιχεί σε επιμήκυνση $\Delta\ell_1 = y_1 + A = 0{,}3\ m$ και η πάνω ακραία θέση (y = -A) αντιστοιχεί σε επιμήκυνση $\Delta\ell_2 = y_1 - A = -0{,}1\ m$ δηλαδή συσπείρωση. Προφανώς είναι $\Delta\ell_1^2 > \Delta\ell_2^2$, άρα η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας αντιστοιχεί στην κάτω ακραία θέση. Είναι

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2}k(y_1 + A)^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2}50\frac{N}{m}(0{,}3m)^2 \Rightarrow \boxed{U_{ελ,max} = 2{,}25\,J}$$

γ. Για να γράψουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης y = A ημ(ω t + φ_0) πρέπει να προσδιορίσουμε τα ω και φ_0. Για τη γωνιακή συχνότητα ω ισχύει:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \overset{(S.I.)}{=} \sqrt{\frac{50}{0{,}5}} \Rightarrow \omega = 10\ rad/s$. Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης εργαζόμαστε όπως στα παραδείγματα 1.3 και 1.4.

Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 είναι y = 0,1 m δηλαδή είναι $y = \frac{A}{2}$ και υ < 0.

$$\left.\begin{matrix} y = Aημ(\omega t + \varphi_0) \\ υ = \omega Aσυν(\omega t + \varphi_0) \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{A}{2} = Aημ\varphi_0 \\ \omega Aσυν\varphi_0 < 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{matrix} ημ\varphi_0 = \frac{1}{2} \\ συν\varphi_0 < 0 \end{matrix}\right\rangle \overset{2^o}{\Rightarrow} \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$$

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη στην y = A ημ(ω t + φ_0) και παίρνουμε $\boxed{y = 0{,}2\cdot ημ\left(10\cdot t + \frac{5\pi}{6}\right)\ (S.I.)}$

Γ. Ρυθμοί μεταβολής.

<u>Ρυθμός μεταβολής ή ταχύτητα μεταβολής</u> ενός μεγέθους Χ, το οποίο εξαρτάται από το χρόνο, ονομάζεται η πρώτη παράγωγος του Χ ως προς το χρόνο και τον συμβολίζουμε με $\frac{dX}{dt}$. Προσοχή: Το πηλίκο της μεταβολής ΔΧ του μεγέθους Χ προς το χρονικό διάστημα Δt στο οποίο συνέβη η παραπάνω μεταβολή, δηλαδή το $\frac{\Delta X}{\Delta t}$ εκφράζει τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής και είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής μόνο αν το μέγεθος Χ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου t. (Χ = αt + β).

✓ **<u>Ρυθμός μεταβολής της ΟΡΜΗΣ</u>**: Σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο σώμα και έχει την κατεύθυνσή της. $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}}$ (1.14)

✓ **<u>**Ρυθμός μεταβολής της ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ:</u>**

$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m\left(\vec{\upsilon}^2\right)' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cdot\cancel{2}\vec{\upsilon}\circ\vec{\upsilon}' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = m\cdot\vec{\upsilon}\circ\vec{a} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\circ\vec{\upsilon}$ ή

$\frac{dK}{dt} = \left|\Sigma\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της ΣF και της υ.

✓ **<u>**Ρυθμός μεταβολής της ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ:</u>**

α. <u>Βαρυτικής δυναμικής ενέργειας U_g</u>: $\frac{dU_g}{dt} = -mg\upsilon_y\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου υ_y είναι το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος και θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της συνιστώσας υ_y και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g. Προφανώς θ = 0 ή θ = π.

β. <u>Ελαστικής Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου</u> $U_{\varepsilon\lambda}$: $\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}k\left(x^2\right)' \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}k\cdot\cancel{2}\vec{x}\circ\left(\vec{x}\right)'$

$\Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = k\cdot\vec{x}\circ\vec{\upsilon}$ ή $\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = k\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ όπου x είναι το <u>διάνυσμα θέσης με αρχή τη θέση του Φυσικού Μήκους του ελατηρίου και πέρας τη θέση του σώματος</u> και υ η ταχύτητα του σώματος στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Η γωνία θ είναι η γωνία μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων και προφανώς θ = 0 ή θ = π.

γ. <u>Δυναμικής Ενέργειας Ταλάντωσης U_T</u> : $\frac{dU_T}{dt} = \frac{1}{2}D\left(x^2\right)' \Rightarrow \frac{dU_T}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}D\cdot\cancel{2}\vec{x}\circ\left(\vec{x}\right)' \Rightarrow$

$\frac{dU_T}{dt} = D\cdot\vec{x}\circ\vec{\upsilon}$ ή $\frac{dU_T}{dt} = D\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου x είναι το <u>διάνυσμα θέσης με αρχή τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και πέρας τη θέση του σώματος</u> και υ η ταχύτητα του σώματος. Η γωνία θ είναι η γωνία μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων. Και εδώ προφανώς θ = 0 ή θ = π.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Τα σημειωμένα με 2 αστεράκια, μπορούν να παραληφθούν, τουλάχιστον μέχρι να διδαχθούν οι παράγωγοι στα μαθηματικά.

2. ΑΝ διατηρείται η μηχανική ενέργεια, τότε επειδή $E_{ΜΗΧ} = K + U_g + U_{ελ}$ = σταθερή, προκύπτει ότι $\frac{dE_{ΜΗΧ}}{dt} = 0$ και επομένως

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU_g}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_g}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dK}{dt}.$$

3. Στην αρμονική ταλάντωση $E = K + U_T$ = σταθερή, άρα $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU_T}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dU_T}{dt} = -\frac{dK}{dt}.$$

Ρυθμός παραγωγής έργου: (ΙΣΧΥΣ ΔΥΝΑΜΗΣ)

$P_F = \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow P_F = \frac{\vec{F} \circ d\vec{x}}{dt} \Rightarrow \quad P_F = \vec{F} \circ \vec{\upsilon}$ ή $P_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{\upsilon}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$, όπου θ η γωνία των διανυσμάτων της δύναμης $\vec{F}$ και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$.

Παράδειγμα 1.13. Αναφερόμαστε στο παράδειγμα 1.12 και ζητάμε τη χρονική στιγμή t = 0 να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής

α. της ορμής του σώματος.

β. της κινητικής ενέργειας του σώματος.

γ. της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.

δ. της δυναμικής ενέργειας του ελατήριου.

ε. της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση, τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα διέρχεται από τη θέση y = + 0,1 *m* με ταχύτητα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την εξίσωσή της υ = ωΑσυν(ωt + φ₀). Είναι Α = 0,2 *m*, ω = 10 *rad/s* και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$. Για t = 0 ;παίρνουμε

$\upsilon = 10 \cdot 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \upsilon = -\sqrt{3}\ m/s$.

α. $\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -k \cdot y \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -50 \cdot 0{,}1\ N \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = -5\ N}$

β. $\frac{dK}{dt} = |\Sigma\vec{F}| \cdot |\vec{\upsilon}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{dK}{dt} = ky_1 \cdot |\vec{\upsilon}| \cdot \sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 50 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{3}\ J/s \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = +5\sqrt{3}\ J/s}$

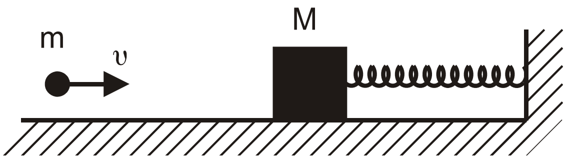
γ. $\frac{dU_T}{dt} = k|\vec{y}| \cdot |\vec{\upsilon}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{dU_T}{dt} = 50 \bullet 0{,}1 \cdot \sqrt{3} \times \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \boxed{\frac{dU_T}{dt} = -5\sqrt{3}\ J/s}$

δ. $\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = k|\vec{y}_1 + \vec{y}| \cdot |\vec{\upsilon}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 50 \cdot (0{,}1 + 0{,}1) \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \boxed{\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -10\sqrt{3}\ J/s}$

ε. $\frac{dU_g}{dt} = -mg\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{dU_g}{dt} = -0{,}5 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \boxed{\frac{dU_g}{dt} = +5\sqrt{3}\ J/s}$.

Σχόλιο: Επαληθεύσετε την ισχύ των προτάσεων 2 και 3 της προηγούμενης παρατήρησης.

Παράδειγμα 1.14. Ένα ακίνητο σώμα μάζας Μ = $9 \cdot 10^{-2}$ *kg* βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 1000 *N/m*.



Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Ένα βλήμα μάζας m = $1 \cdot 10^{-2}$ *kg* που κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα υ, συγκρούεται με το ακίνητο σώμα μάζας Μ και σφηνώνεται σ' αυτό.
Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α = 0,1 *m*.
Α. Να υπολογίσετε:

α. την περίοδο Τ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
β. την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση.
γ. την ταχύτητα υ, με την οποία το βλήμα προσκρούει στο σώμα μάζας Μ.
Β. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας σα χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή της κρούσης. [Εσπερινό Λύκειο 2002]

Λύση

Η κρούση είναι ΠΛΑΣΤΙΚΗ και ο άξονας του ελατηρίου ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΣ. Συνεπώς το συσσωμάτωμα θα έχει θέση ισορροπίας τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας Μ, δηλαδή στη θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου.

α. Η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος μάζα – ελατήριο δίνεται από τη σχέση 1.9:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} T = 2\pi\sqrt{\frac{9\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-2}}{1000}}\,s \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-1}}{10^{3}}}\,s \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 2\pi\cdot10^{-2}\,s}$$

β. Επειδή η θέση στην οποία έγινε η κρούση είναι και η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος, η ταχύτητά του είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης: $υ_{max}$ = ω Α

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 100\ rad/s$ και Α = 0,1 m. Άρα $υ_{max}$ = 100•0,1 *m/s* ➔ $\boxed{υ_{συσ} = 10\ m/s}$.

[Σημ. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την αρμονική ταλάντωση του συσσωματώματος.]

γ. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. για την κρούση: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\cdot\vec{υ} + \vec{0} = (M+m)\cdot\vec{υ}_{συσ}$

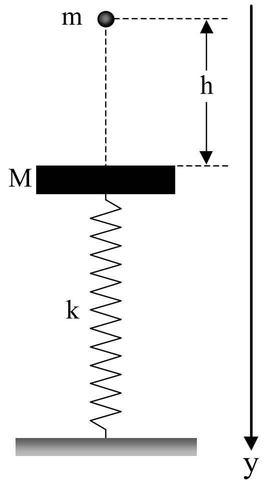
Θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας του βλήματος, παίρνουμε:

$$υ = \frac{M+m}{m}\cdot υ_{συσ} \Rightarrow υ = \frac{9\cdot\cancel{10^{-2}}\ \cancel{kg} + 1\cdot\cancel{10^{-2}}\ \cancel{kg}}{1\cdot\cancel{10^{-2}}\ \cancel{kg}}\cdot 10\,m/s \Rightarrow \boxed{υ = 100\,m/s}$$

Β. Τη χρονική στιγμή t = 0 είναι x = 0 και υ > 0.
Υπολογίζουμε την αρχική φάση [βλ. Παράδειγμα 1.3]. Είναι $φ_0$ = 0.Άρα

$\boxed{x = 0{,}1\cdot ημ(100\cdot t) \text{ στο S.I.}}$.

Παράδειγμα 1.15. Ένας δίσκος μάζας Μ = 4 *kg* είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\,N/m$, του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο του δαπέδου και εκτελεί κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους $A = \frac{\pi}{10} m$.



Από ύψος $h = \frac{\pi^2}{20} m$ πάνω από τη θέση ισορροπίας του δίσκου αφήνεται να πέσει ελεύθερο ένα σφαιρίδιο μάζας m = 4 *kg*, το οποίο συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά, τη στιγμή που ο δίσκος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του κινούμενος προς τα πάνω. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

α. Να προσδιορίσετε τη θέση του δίσκου τη στιγμή κατά την οποία αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

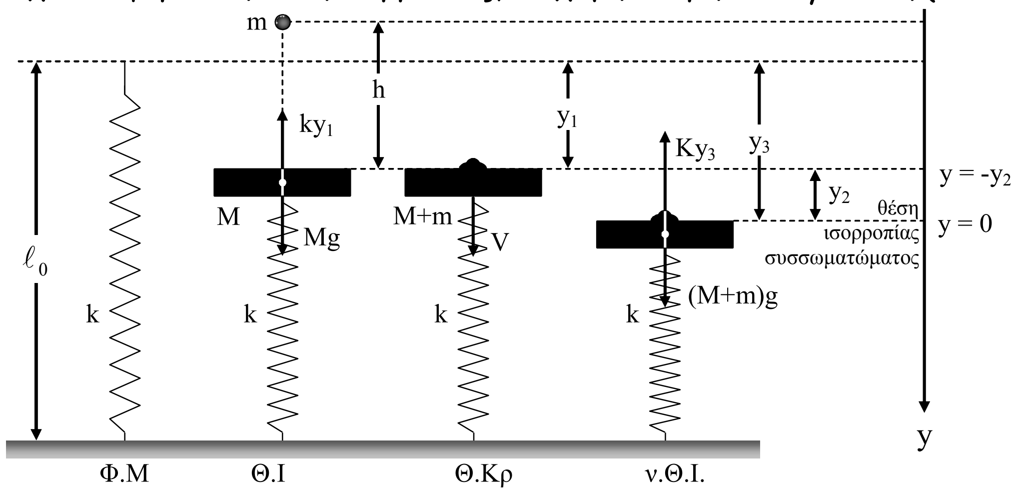
γ. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αν σαν χρονική στιγμή t = 0 θεωρηθεί η στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m.

Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση y είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και ότι ο κατακόρυφος άξονας y έχει θετική φορά προς τα κάτω και αρχή (y = 0) τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Δίνονται: *g* = 10 *m/s²* και $\sqrt{2} = 1{,}4$.

Λύση

Η κρούση είναι πλαστική και το ελατήριο κατακόρυφο. Το συσσωμάτωμα που θα δημιουργηθεί θα έχει διαφορετική θέση ισορροπίας, σε χαμηλότερη κατά y_2 θέση (ν.Θ.Ι.).



Μπορούμε να υπολογίσουμε τα y_1 και y_2, εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας στις δύο θέσεις ισορροπίας:

Θ.Ι: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \Rightarrow Mg = ky_1$ (1.15.1)

$$\Rightarrow y_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow y_1 = 0{,}1\ m$$

ν.Θ.Ι: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (M+m)g - ky_3 = 0 \overset{y_3=y_1+y_2}{\Rightarrow} \cancel{Mg} + mg = \cancel{ky_1} + ky_2 \overset{1.15.1}{\Rightarrow} y_2 = \frac{mg}{k} \Rightarrow y_2 = 0{,}1\ m$

Η άσκηση αναφέρεται σε συνάντηση «κινητών». Επειδή συνάντηση σημαίνει ότι τα κινητά βρέθηκαν στην ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ (στη Θ.Ι. που είναι η θέση Κρούσης) την ΙΔΙΑ χρονική ΣΤΙΓΜΗ, πρέπει να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή της συνάντησης.

Στη συνέχεια, για να μπορέσουμε να μελετήσουμε την πλαστική κρούση, πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος m και την ταχύτητα του δίσκου ΛΙΓΟ πριν συγκρουστούν.

Τα δύο από αυτά, χρόνος και ταχύτητα του σώματος m, μπορούν να προσδιοριστούν με τις εξισώσεις κίνησης του σώματος m, το οποίο κάνει ελεύθερη πτώση.

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{100}}s \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{10}s \qquad (1.15.2)$$

$$\upsilon_1 = gt_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 10 \cdot \frac{\pi}{10} m/s \Rightarrow \upsilon_1 = \pi\ m/s.$$

Ο δίσκος λίγο πριν συγκρουστεί με το m, στη θέση ισορροπίας του, έχει ταχύτητα μέγιστου μέτρου, που υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon_{max} = \omega A = \upsilon_2$. (1.15.3)

Η γωνιακή συχνότητα ω είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{400}{4}}\ rad/s \Rightarrow \omega = 10\ rad/s$. (1.15.4)

Από τη σχέση 1.15.3 παίρνουμε $\upsilon_2 = 10 \cdot \frac{\pi}{10}\ m/s \Rightarrow \upsilon_2 = \pi\ \ m/s$.

α. Ο χρόνος μέχρι να φτάσει το m στη θέση ισορροπίας του δίσκου και να συγκρουστεί μαζί του είναι όπως υπολογίστηκε από τη σχέση 1.15.2 $t_1 = \frac{\pi}{10}s$. Η περίοδος της ταλάντωσης του δίσκου είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{1.15.4}{\Rightarrow} T = \frac{\pi}{5}s$. Παρατηρούμε ότι $t_1 = \frac{T}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι μέχρι να φτάσει το σώμα m στη θέση κρούσης (Θ. Κρ.), ο δίσκος έκανε μισή ταλάντωση για να φτάσει και αυτός εκεί. Συνεπώς τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα, ο δίσκος πέρναγε από τη θέση ισορροπίας του κινούμενος προς τα κάτω. Δηλαδή τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα, για την ταλάντωση του δίσκου ίσχυαν:

$$\boxed{y = -y_2 \ \text{ και } \upsilon > 0} \qquad (1.15.5)$$

(Θεωρούμε σαν αρχή του άξονα y (y = 0) τη θέση που αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος, όπως φαίνεται και στο σχήμα).

β. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για λίγο πριν και λίγο μετά την πλαστική κρούση στη Θ.Ι., θεωρώντας σα θετική φορά, αυτή του βάρους: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + M\vec{\upsilon}_2 = (M+m)\vec{V}_{συσ} \Rightarrow$

$$m\upsilon_1 - M\upsilon_2 = (M+m)V_{συσ} \Rightarrow V_{συσ} = \frac{m\upsilon_1 - M\upsilon_2}{M+m} \Rightarrow V_{συσ} = \frac{4\pi - 4\pi}{8} m/s \Rightarrow \boxed{V_{συσ} = 0}$$

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση σταματάει στιγμιαία. Επειδή η θέση αυτή ΔΕΝ είναι η θέση ισορροπίας του, θα είναι η ακραία θέση της ταλάντωσής του.

γ. Το πλάτος A' της νέας ταλάντωσης θα είναι η απόσταση της ακραίας θέσης από τη νέα θέση ισορροπίας, δηλαδή θα είναι $A' = y_2 \Rightarrow A' = 0{,}1\ m$.

δ. Το συσσωμάτωμα δημιουργείται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{10}s$. Η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωσή του είναι η $y = A'\eta\mu(\omega' t + \varphi_0)$, με $t \geq t_1$, όπου

$\omega' = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} = \sqrt{\dfrac{400}{8}}\, rad/s \Rightarrow \omega' = 5\sqrt{2}\, rad/s \Rightarrow \;\; \omega' = 7\ rad/s$. Τη χρονική στιγμή t_1 που συμβαίνει η κρούση είναι y = - A΄ (πάνω ακραία θέση, θετική φορά προς τα κάτω). Άρα

$$-A' = A'ημ(ω' t_1 + \varphi_0) \Rightarrow ημ(ω' t_1 + \varphi_0) = -1 \Rightarrow ω' t_1 + \varphi_0 = 2nπ + \frac{3π}{2} \Rightarrow$$

$$7\cdot\frac{π}{10} + \varphi_0 = 2nπ + \frac{3π}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2ηπ + \frac{3π}{2} - \frac{7π}{10} \Rightarrow \varphi_0 = 2ηπ + \frac{4π}{5}.$$

$$0 \le φ_0 < 2π \Rightarrow 0 \le 2n\cancel{π} + \frac{4\cancel{π}}{5} < 2\cancel{π} \Rightarrow 0 \le 2n + \frac{4}{5} < 2 \Rightarrow 0 \le 2n + 0{,}8 < 2 \Rightarrow$$

$$-0{,}8 \le 2n < 1{,}2 \Rightarrow -0{,}4 \le n < 0{,}6 \Rightarrow n = 0.$$

Άρα $\varphi_0 = \dfrac{4\pi}{5}$ Επομένως για την αρμονική ταλάντωση του συσσωματώματος ισχύει:

$$\boxed{y = 0{,}1\cdot ημ\left(7t + \frac{4\pi}{5}\right)\ (S.I.),\ t \ge \frac{\pi}{10} s}$$

<u>Σχόλιο 1.</u> Ένας άλλος, περισσότερο σύντομος, τρόπος είναι ο εξής: Με αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο το σώμα μάζας m, τη στιγμή t το συσσωμάτωμα θα έχει ταλαντωθεί για χρόνο $\Delta t = t - \dfrac{\pi}{10}s,\ t \ge \dfrac{\pi}{10}s$. Η εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση y του συσσωματώματος από τη Θ.Ι του είναι $y = A'ημ(\omega'\cdot\Delta t + \varphi_0)$.

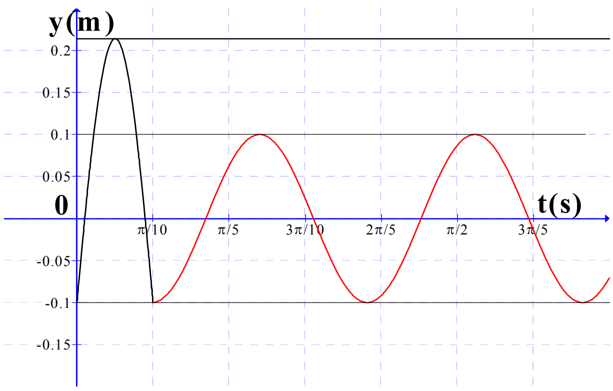
Για Δt = 0 είναι y = - A΄. Συνεπώς $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}$. Για τη φάση της απομάκρυνσης έχουμε

$$\Phi(t) = \omega'\left(t - \frac{\pi}{10}s\right) + \frac{3\pi}{2} = 7\cdot t - \frac{7\pi}{10} + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Phi(t) = 7\cdot t + \frac{4\pi}{5}.$$

Συνεπώς $\boxed{y = 0{,}1\cdot ημ\left(7t + \frac{4\pi}{5}\right)\ (S.I.),\ t \ge \frac{\pi}{10} s}$

**<u>Σχόλιο 2.</u> Πριν τη χρονική στιγμή t_1, ταλάντωση έκανε μόνο δίσκος. Τη χρονική στιγμή t = 0, για το δίσκο ήταν y = - y_2 και υ > 0.

Η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{10}s\right)$ είναι y - y_0 = A ημ(ω t+$θ_0$), όπου y_0 είναι η θέση του δίσκου τη χρονική στιγμή t = 0 και $θ_0$ η αρχική φάση της ταλάντωσης. Υπολογίζουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης: (Είναι y_0 = -y_2 και την ίδια στιγμή είναι υ > 0.)



$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 + Aημ(\omega\cdot t + \theta_0) \\ \upsilon = \omega A\cdot συν(\omega\cdot t + \theta_0) \end{array}\right\rangle \overset{t=0}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} -y_2 = -y_2 + Aημ\theta_0 \\ \omega A\cdot συν\theta_0 > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ημ\theta_0 = 0 \\ συν\theta_0 > 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \theta_0 = 0.$$ Άρα

$$y = -0{,}1 + \frac{\pi}{10}\cdot ημ(10\cdot t)\ (S.I.)\ με\ 0 \le t < \frac{\pi}{10}s$$

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης y από τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος, του δίσκου και του συσσωματώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1.1. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι κίνηση

α. ευθύγραμμη ομαλή.
β. ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη.
γ. ομαλή κυκλική.
δ. ευθύγραμμη περιοδική.

1.2. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του είναι

α. ανάλογη του χρόνου.
β. αρμονική συνάρτηση του χρόνου.
γ. ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.
δ. ομόρροπη με τη δύναμη επαναφοράς.

1.3. Η ταχύτητα υ σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση

α. είναι μέγιστη κατά μέτρο στη θέση x = 0.
β. έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση x.
γ. είναι μέγιστη στις θέσεις $x = \pm A$.
δ. έχει την ίδια φάση με τη δύναμη επαναφοράς.

1.4. Η επιτάχυνση α σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση

α. είναι σταθερή.
β. είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης x.
γ. έχει την ίδια φάση με την ταχύτητα.
δ. γίνεται μέγιστη στη θέση x = 0.

1.5. Η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί σε σημειακό αντικείμενο το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση

α. είναι σταθερή.
β. έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση x.
γ. είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης.
δ. είναι ανάλογη της ταχύτητας υ.

1.6. Η φάση της απομάκρυνσης στην αρμονική ταλάντωση

α. αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.
β. είναι σταθερή.
γ. ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.
δ. είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.

1.7. Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_\upsilon - \varphi_x$ μεταξύ ταχύτητας υ και απομάκρυνσης x στην αρμονική ταλάντωση είναι

α. $-\frac{\pi}{2}$ **β.** π **γ.** $\frac{\pi}{2}$ **δ.** 0.

1.8. Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_\alpha$ μεταξύ απομάκρυνσης x και επιτάχυνσης α στην αρμονική ταλάντωση είναι

α. 0 **β.** $-\frac{\pi}{2}$ **γ.** $\frac{\pi}{2}$ **δ.** – π

1.9. Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_\alpha - \varphi_\upsilon$ μεταξύ επιτάχυνσης α και ταχύτητας υ στην αρμονική ταλάντωση είναι

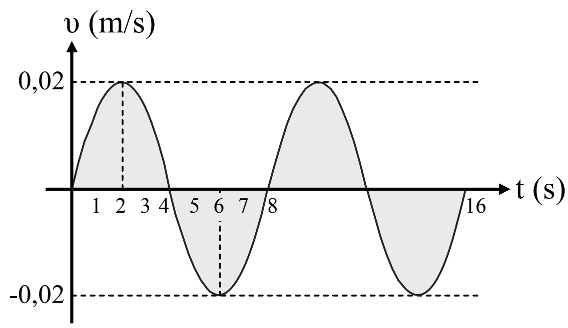
α. $-\frac{\pi}{2}$ **β.** $\frac{\pi}{2}$ **γ.** 0 **δ.** $\frac{3\pi}{2}$

1.10. Σύστημα μάζας - ελατηρίου εκτελεί ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι

α. $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ **γ.** $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

β. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$ **δ.** $f = 2\pi\sqrt{k \cdot m}$

1.11. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α. Τη χρονική στιγμή t = 4 *s* το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι μέγιστο.

β. Τη χρονική στιγμή t = 2 *s*, το αντικείμενο βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

γ. Τη χρονική στιγμή t = 14 *s* η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.

δ. Τη χρονική στιγμή t = 10 *s* το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι μέγιστο.

1.12. Στην αρμονική ταλάντωση ενός σημειακού αντικειμένου η εξίσωση x = Αημωt, ισχύει με την προϋπόθεση ότι στην αρχή των χρόνων, ο ταλαντωτής

α. πέρναγε από την αρχή των αξόνων κινούμενος είτε προς το θετικό είτε προς τον αρνητικό ημιάξονα.

β. είχε μηδενική ταχύτητα.

γ. βρισκόταν σε ακραία θέση της ταλάντωσης.

δ. πέρναγε από τη θέση ισορροπίας κινούμενος προς το θετικό ημιάξονα.

1.13. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Επιλέγουμε σαν αρχή μέτρησης των χρόνων μια χρονική στιγμή τέτοια ώστε η εξίσωση που περιγράφει τη θέση του να είναι η $x = 3\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ $(x\, \sigma\varepsilon\, cm,\, t\, \sigma\varepsilon\, s)$. ($\pi^2 = 10$)

α. Στην αρχή των χρόνων ο ταλαντωτής κατευθυνόταν προς τον αρνητικό ημιάξονα.
β. Στην αρχή των χρόνων ο ταλαντωτής απείχε από τη θέση ισορροπίας του 2 *cm*.
γ. Σε μισό δευτερόλεπτο μετακινείται από το ένα άκρο της ταλάντωσης μέχρι το άλλο.
δ. Τη χρονική στιγμή t = 1/12 *s* η επιτάχυνση του ταλαντωτή είναι – 4,8 m/s^2.

1.14. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή η δυναμική του ενέργεια
α. έχει τη μέγιστη τιμή της στη θέση ισορροπίας.
β. είναι ίση με την ολική του ενέργεια στις θέσεις $x = \pm A$.
γ. έχει πάντοτε μεγαλύτερη τιμή από την κινητική του ενέργεια.
δ. έχει αρνητική τιμή στις θέσεις $-A \le x \le 0$.

1.15. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή η κινητική του ενέργεια
α. στη θέση x = 0 είναι ίση με την ολική του ενέργεια.
β. είναι πάντοτε μεγαλύτερη από τη δυναμική του ενέργεια.
γ. εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης της μάζας m.
δ. παίρνει μηδενική τιμή μια φορά στη διάρκεια μιας περιόδου.

1.16. Σύστημα ελατήριο – μάζα εκτελεί κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση με ολική ενέργεια Ε. Τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η επιτάχυνση της μάζας είναι ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της, η κινητική της ενέργεια είναι ίση με

α. $\frac{1}{2}E$ **β.** $\frac{1}{4}E$ **γ.** $\frac{3}{2}E$ **δ.** $\frac{3}{4}E$

1.17. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή η ολική του ενέργεια
α. μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.
β. είναι πάντοτε μικρότερη από τη δυναμική του ενέργεια.
γ. είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την κινητική του ενέργεια.
δ. καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης Α και τη μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{\max}$.

1.18. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή στη διάρκεια μιας περιόδου
α. η δυναμική του ενέργεια παίρνει τη μέγιστη τιμή της μόνο μια φορά.
β. η δυναμική του ενέργεια είναι ίση με την κινητική του μόνο μια φορά.
γ. η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή.
δ. η κινητική του ενέργεια παίρνει τη μέγιστη τιμή της μόνο μια φορά.

1.19. Όταν διπλασιάσουμε το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή, τότε θα διπλασιαστεί και
α. η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας.
β. η ολική ενέργεια.
γ. η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς.
δ. η σταθερά επαναφοράς.

1.20. Διαθέτουμε ένα ελατήριο και ένα μικρό σώμα κρεμασμένο έτσι ώστε το ελατήριο να είναι κατακόρυφο. Δίνουμε στο σύστημα ενέργεια 2 *J* και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι 10 *cm* και η συχνότητα $\frac{20}{\pi}Hz$.

α. Η σταθερά του ελατηρίου είναι 100 *N/m*.
β. Η μάζα του σφαιριδίου είναι 200 *g*.
γ. Αν είχαμε δώσει ενέργεια 4 *J* η συχνότητα θα ήταν $\frac{40}{\pi}Hz$.
δ. Αν είχαμε δώσει ενέργεια 8 *J*, το πλάτος της ταλάντωσης θα ήταν 20 *cm*.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

1.21. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη περιοδική κίνηση.

1.22. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη κίνηση, ομαλά μεταβαλλόμενη.

1.23. Η απομάκρυνση σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του, όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

1.24. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του και η επιτάχυνσή του α συνδέονται με την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 x$.

1.25. Στην αρμονική ταλάντωση η φάση της απομάκρυνσης x προηγείται της φάσης της ταχύτητας υ κατά $\frac{\pi}{2}$.

1.26. Στην αρμονική ταλάντωση η δύναμη F και η απομάκρυνση x είναι μεγέθη συμφασικά.

1.27. Στην αρμονική ταλάντωση η φάση της απομάκρυνσης x καθυστερεί της φάσης της επιτάχυνσης α κατά π.

1.28. Στην αρμονική ταλάντωση η φάση της ταχύτητας υ προηγείται της φάσης της επιτάχυνσης α κατά $\frac{\pi}{2}$.

1.29. Όταν σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση, ισχύει η συνθήκη $\Sigma F_x = -Dx$.

1.30. Η τιμή της σταθεράς επαναφοράς D σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που ταλαντώνεται.

1.31. Η σταθερά επαναφοράς δεν επηρεάζει την περίοδο του ταλαντευόμενου συστήματος.

1.32. Στην αρμονική ταλάντωση το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο στη θέση $x = 0$.

1.33. Στην αρμονική ταλάντωση το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ελάχιστο στις θέσεις $x = \pm A$.

1.34. Στην αρμονική ταλάντωση τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$ είναι πάντα αντίρροπα.

1.35. Στην αρμονική ταλάντωση η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι διανύσματα συγγραμμικά και ομόρροπα.

1.36. Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος μάζας - ελατηρίου δίνεται από την εξίσωση $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

1.37. Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή καθορίζει τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} και το πλάτος της ταλάντωσης A.

1.38. Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ίση με την κινητική του ενέργεια στη θέση $x = 0$.

1.39. Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ίση με τη δυναμική του ενέργεια στις θέσεις $x = \pm A$.

1.40. Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

1.41. Στη διάρκεια μιας περιόδου η δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή γίνεται ίση με την κινητική του ενέργεια μόνο μια φορά.

1.42. Στη διάρκεια μιας περιόδου η δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι συνεχώς μικρότερη από την ολική του ενέργεια.

1.43. Στη διάρκεια μιας περιόδου η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι συνεχώς μεγαλύτερη από την κινητική του ενέργεια.

1.44. Στον απλό αρμονικό ταλαντωτή έχουμε περιοδική μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντιστρόφως.

1.45. Στο σύστημα ελατήριο – μάζα, η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας της μάζας, είναι $K_{max} = \frac{1}{2}kA^2$.

1.46. Στον απλό αρμονικό ταλαντωτή η μέγιστη τιμή της δυναμικής του ενέργειας είναι $U_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2$.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

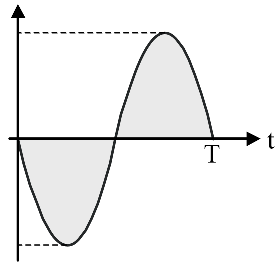
Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

1.47. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu\omega t$.

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς.

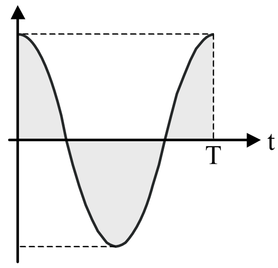
Α. x

1.



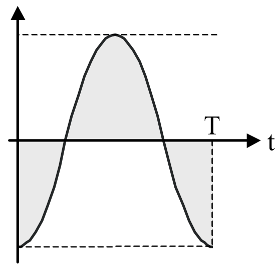
Β. υ

2.

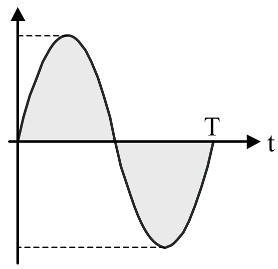


Γ. α

3.



4.

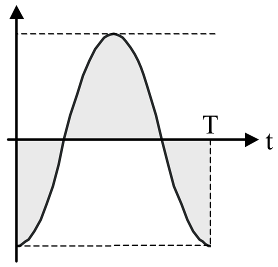


1.48. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς.

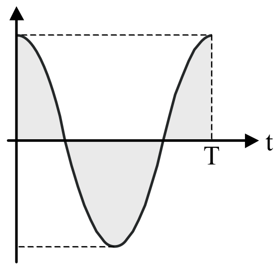
Α.x

1.



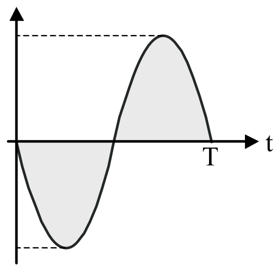
Β.υ

2.

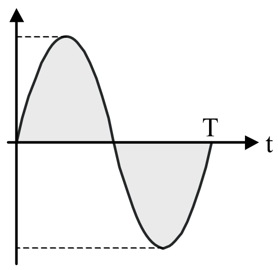


Γ.F

3.



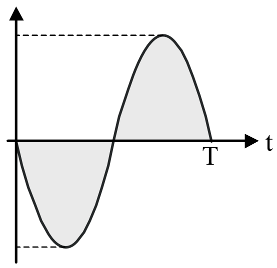
4.



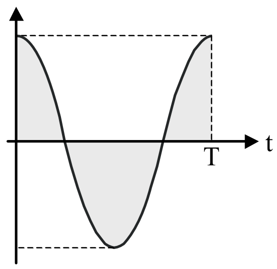
1.49. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η αλγεβρική τιμή της δύναμης επαναφοράς μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $F = F_{max}\eta\mu\omega t$.

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς.

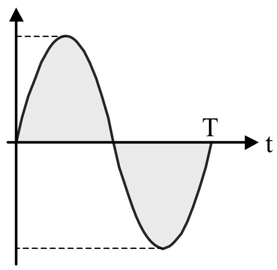
Α.F

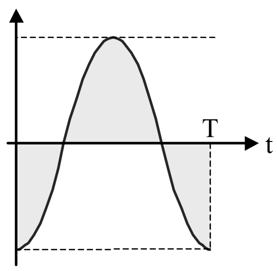
1.


Β.x

2.


Γ.υ

3.


4.


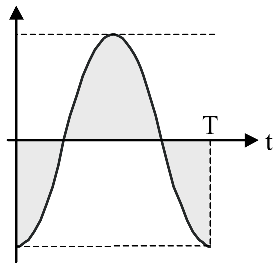
1.50. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η ταχύτητά του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_{max}\eta\mu\omega t$. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς.

Α. υ

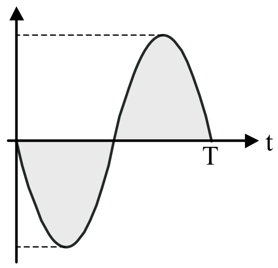
Β. x

Γ. α

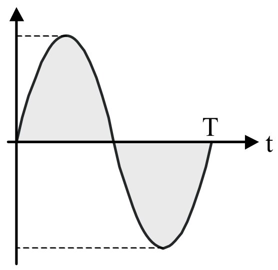
1.



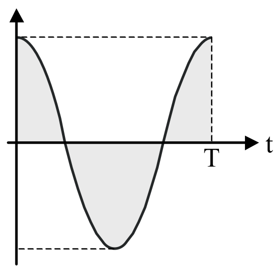
2.



3.



4.



1.51. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

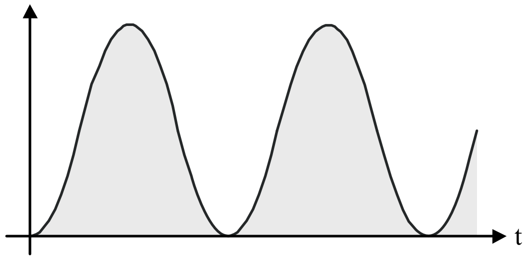
Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς.

Α. U

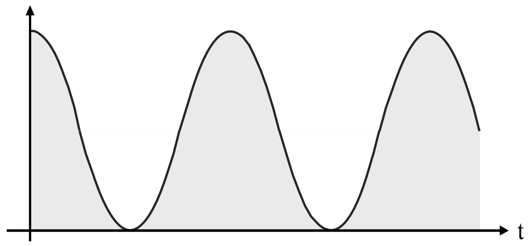
Β. K

Γ. E

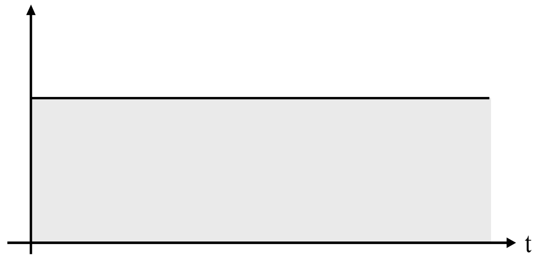
1.



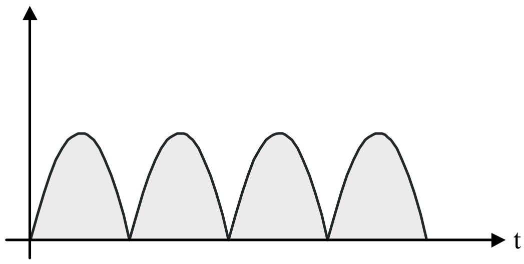
2.



3.

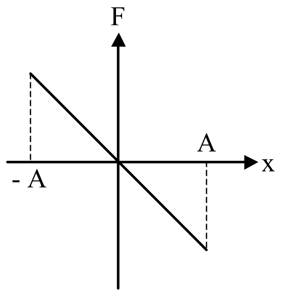


4.

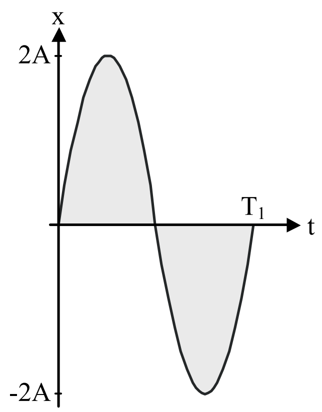


1.52. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η δύναμη επαναφοράς μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x όπως δείχνουν τα σχήματα Α και Β. Για κάθε γραφική παράσταση F - x της αριστερής στήλης να βρείτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση x - t της δεξιάς στήλης.

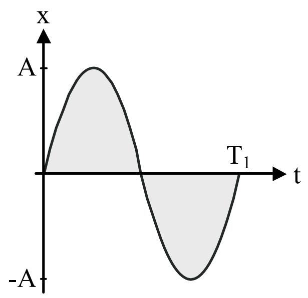
Α.



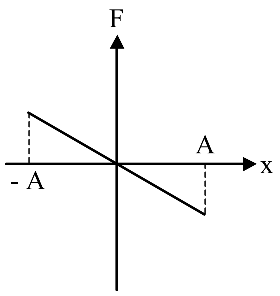
1.



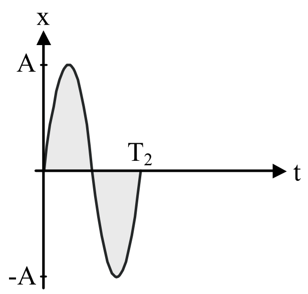
2.



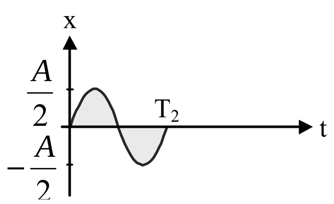
Β.



3.

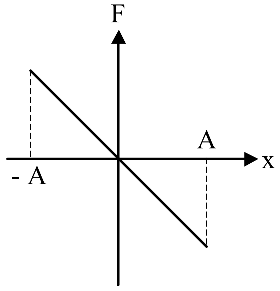


4.

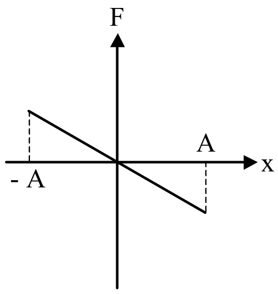


1.53. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η δύναμη επαναφοράς μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x όπως δείχνουν τα σχήματα Α και Β. Για κάθε γραφική παράσταση F - x της αριστερής στήλης να βρείτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση U - x της δεξιάς στήλης.

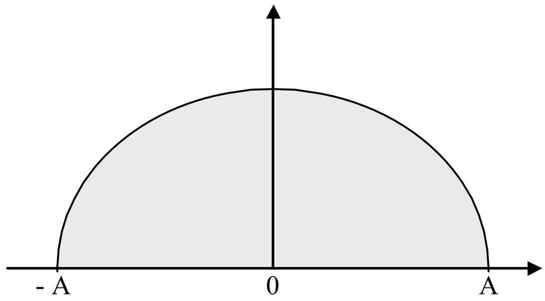
Α.



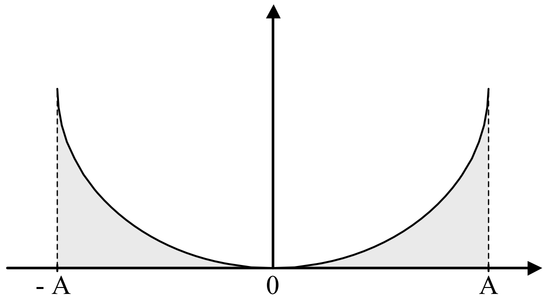
Β.



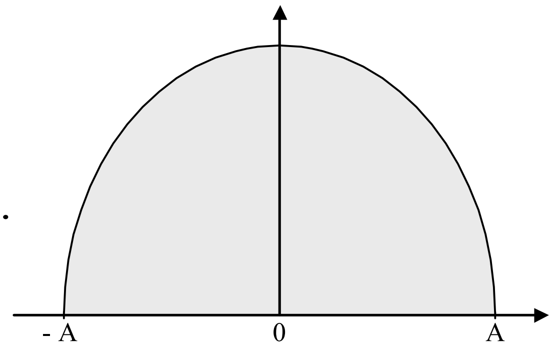
1.



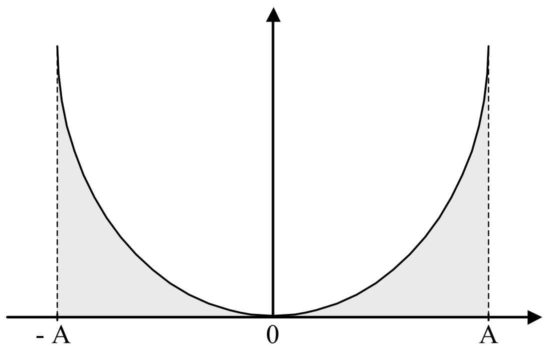
2.



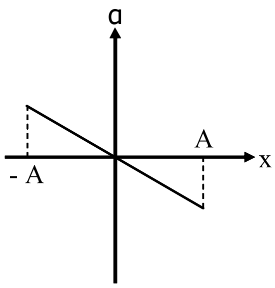
3.



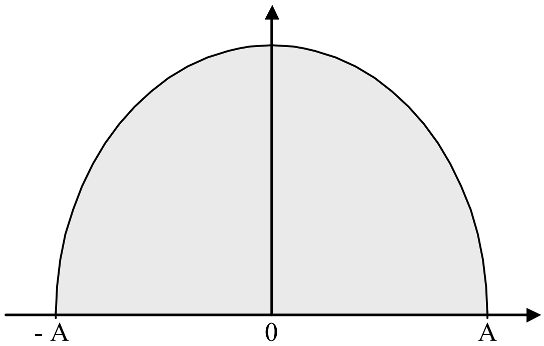
4.



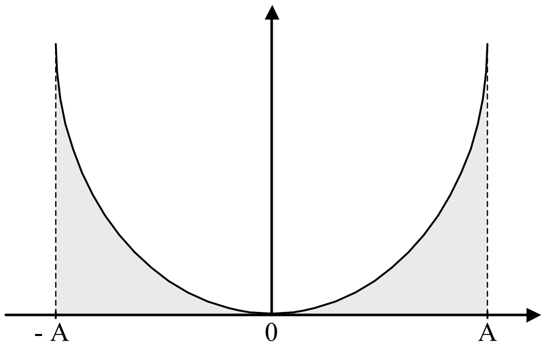
1.54. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η επιτάχυνση μεταβάλλεται για την απομάκρυνση x όπως δείχνουν τα σχήματα Α και Β. Για κάθε γραφική παράσταση α - x της αριστερής στήλης να βρείτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση K - x της δεξιάς στήλης.



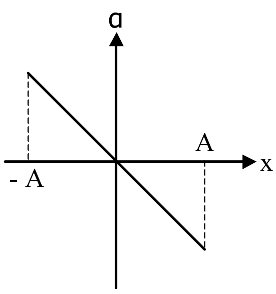
A.



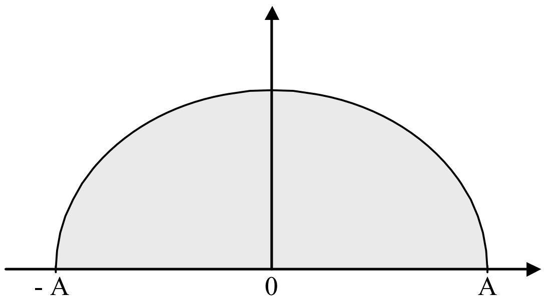
1.



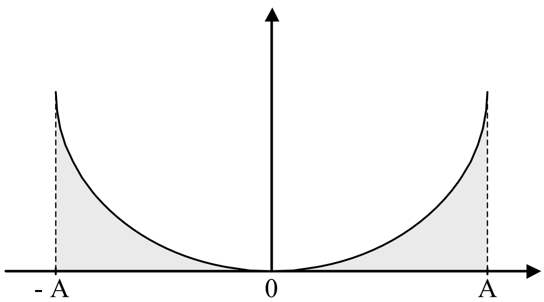
2.



B.



3.



4.

1.55. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση.
Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα στοιχεία της δεξιάς.

Α.	υ_{max}	**1.**	$x = \pm A$
Β.	a_{max}	**2.**	$x = 0$
Γ.	$U_T = K$	**3.**	$x = \pm \frac{A}{2}$
		4.	$x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

1.56. Ποια κίνηση λέγεται περιοδική; Να αναφέρετε τρία παραδείγματα περιοδικών κινήσεων.

1.57. Ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση; Να αναφέρετε δύο παραδείγματα.

1.58. Ποια κίνηση ονομάζεται
i) γραμμική ταλάντωση;
ii) απλή αρμονική ταλάντωση;
Να αναφέρετε ένα σύστημα που θα μπορούσε να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση.

1.59. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ περνάει από τη θέση x = 0 κινούμενο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.
α. Να γράψετε τις εξισώσεις x = f (t), υ = f (t), α = f (t), F = f (t).
β. Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα των παραπάνω εξισώσεων.

1.60. Τι ονομάζουμε φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης; Να παραστήσετε γραφικά τη μεταβολή της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

1.61. Τι σημαίνει ο όρος «αρχική φάση»; Πώς γράφονται οι εξισώσεις x = f (t), υ = f (t), α = f (t) της αρμονικής ταλάντωσης όταν υπάρχει αρχική φάση;

1.62. Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ
i) απομάκρυνσης - ταχύτητας,
ii) απομάκρυνσης - επιτάχυνσης,
iii) ταχύτητας - επιτάχυνσης,
ενός σημειακού αντικειμένου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση;

1.63. Ποια είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα σημειακό αντικείμενο το οποίο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση;

1.64. Τι ονομάζουμε σταθερά επαναφοράς; Από τι εξαρτάται και τι εκφράζει;

1.65. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίου με κατάλληλη διέγερση εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

1.66. **α.** Τι ονομάζουμε ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή;

β. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ορισμένη ολική ενέργεια να υπολογίσετε σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x τη δυναμική, την κινητική και την ολική του ενέργεια. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $U_T = f(x)$, $K = f(x)$, και $E = f(x)$ σε κοινό διάγραμμα.

1.67. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ορισμένη ολική ενέργεια να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το χρόνο t τη δυναμική, την κινητική και την ολική του ενέργεια. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $U_T = f\ (t)$, $K = f\ (t)$, $\mathrm{E} = f\ (t)$ σε κοινό διάγραμμα.

1.68. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = A\eta\mu(\omega t + \phi)$.

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε και γιατί;

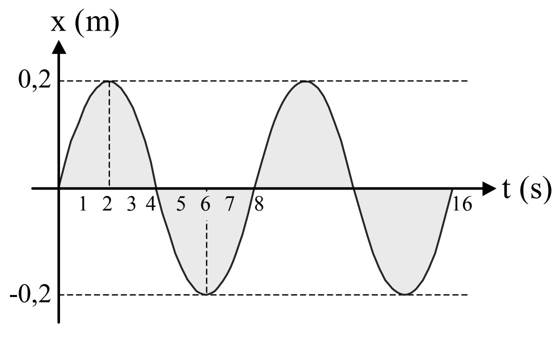
α. Για τη συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο αντικείμενο ισχύει η σχέση $\mathrm{F} = -\mathrm{m}\omega^2\mathrm{x}$.

β. Η φάση της ταχύτητας υ προηγείται της φάσης της απομάκρυνσης x κατά $\frac{\pi}{2}$.

γ. Η φάση της επιτάχυνσης α προηγείται της φάσης της απομάκρυνσης x κατά π.

δ. Η ταχύτητα υ και η δύναμη F είναι μεγέθη συμφασικά.

1.69. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο σχήμα. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;



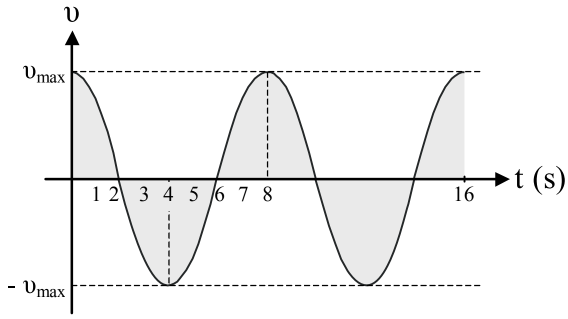
α. Το μέτρο της ταχύτητας έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 0, 4 *s* και 8 *s*.

β. Το μέτρο της επιτάχυνσης έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 2 *s* και 6 *s*.

γ. Τη χρονική στιγμή t = 4 *s* το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\alpha = \frac{\alpha_{max}}{2}$.

δ. Τη χρονική στιγμή 7 *s* το μέτρο της ταχύτητας είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή 2 *s*.

1.70. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές, ποιες είναι λανθασμένες και γιατί;



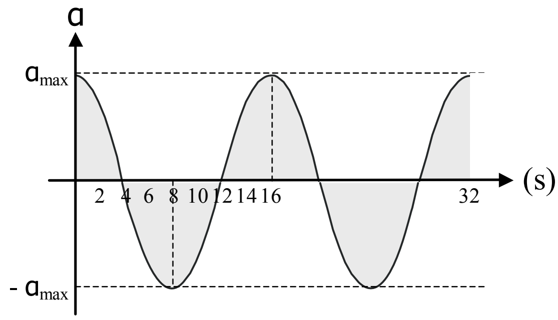
α. Τις χρονικές στιγμές 0, 4 *s* και 8 *s* το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

β. Τις χρονικές στιγμές 2 *s* και 6 *s* το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο.

γ. Στο χρονικό διάστημα από 6 *s* μέχρι 8 *s* τα διανύσματα $\vec{υ}$ και $\vec{F}$ (συνισταμένη δύναμη) είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.

δ. Στο χρονικό διάστημα 0 μέχρι 2 *s* το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.

1.71. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο σχήμα.



Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

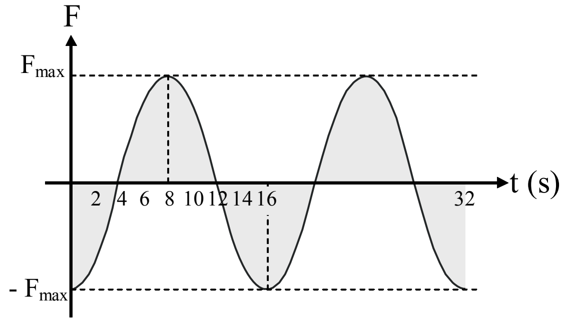
α. Τις χρονικές στιγμές 0, 8 *s* και 16 *s* η ταχύτητα του αντικειμένου είναι ίση με μηδέν.

β. Τη χρονική στιγμή t = 14 *s* το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.

γ. Τις χρονικές στιγμές 4 *s* και 12 *s* το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου έχει τη μέγιστη τιμή του.

δ. Η ταχύτητα του αντικειμένου κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από την εξίσωση $υ = υ_{max} ημ(ωt + π)$.

1.72. Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο σχήμα.



Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

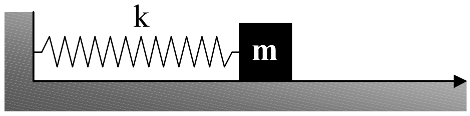
α. Τις χρονικές στιγμές 0, 8 *s* και 16 *s* η ταχύτητα του αντικειμένου είναι ίση με μηδέν.

β. Τη χρονική στιγμή t = 6 *s* το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.

γ. Τις χρονικές στιγμές 4 *s* και 12 *s* το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου έχει τη μέγιστη τιμή του.

δ. Η απομάκρυνση x του αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από την εξίσωση $x = Aημωt$.

1.73. Το σύστημα μάζας - ελατηρίου του σχήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Τη χρονική στιγμή t = 0 η μάζα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x της μάζας από τη θέση ισορροπίας της είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;



α. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ η επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή $\alpha = \frac{\alpha_{max}}{\sqrt{2}}$.

β. Η ταχύτητα της μάζας καθορίζεται κάθε στιγμή από την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_{max}$συνωt.

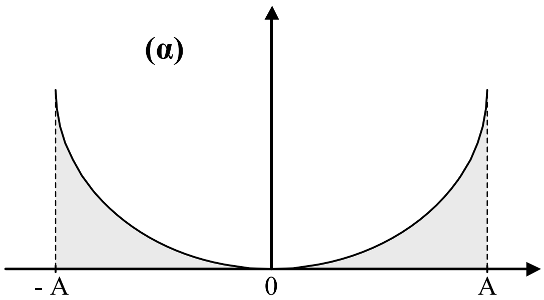
γ. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{8}$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την κινητική του.

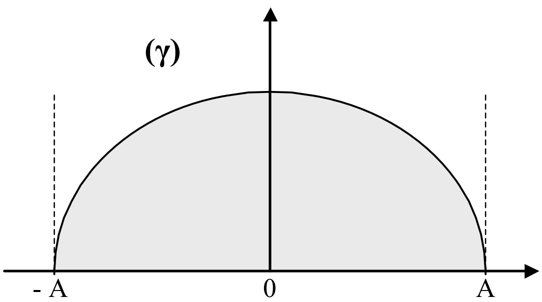
δ. Η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος δίνεται από την εξίσωση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

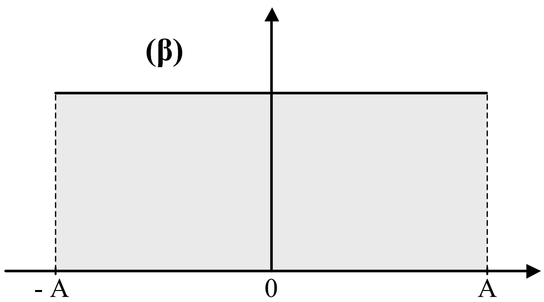
1.74. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ορισμένη ολική ενέργεια να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις συναρτήσεις

i) $U_T = f(x)$, ii) $K = f(x)$ και

iii) $\mathrm{E} = f(x)$ με τη γραφική της παράσταση. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.







1.75. Απλός αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί ταλάντωση πλάτους Α Αν το πλάτος ταλάντωσης διπλασιαστεί, τότε

α. η περίοδος ταλάντωσης διπλασιάζεται.

β. το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς διπλασιάζεται.

γ. η ολική ενέργεια του συστήματος τετραπλασιάζεται.

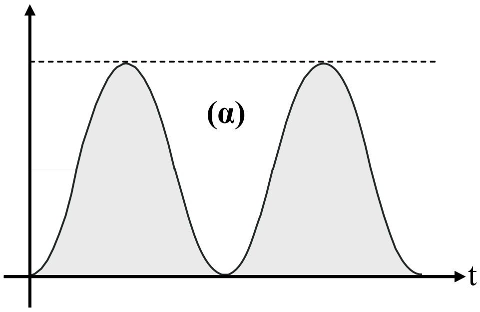
δ. το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας τετραπλασιάζεται.

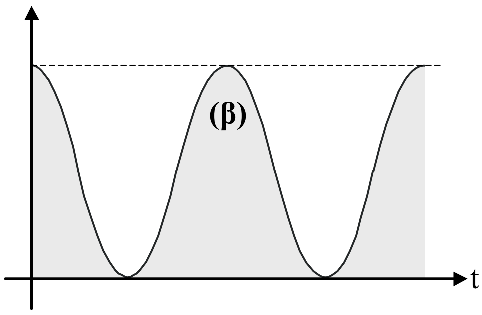
Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε και γιατί;

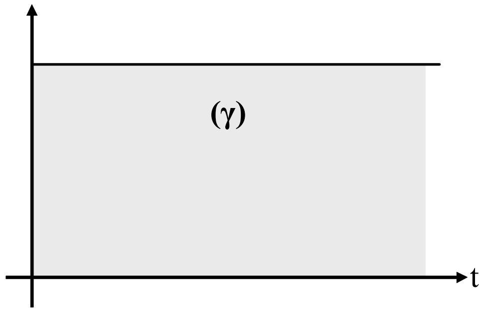
1.76. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ορισμένη ολική ενέργεια η απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις συναρτήσεις

i) $U_T = f(t)$, ii) $K = f(t)$ και iii) $E = f(t)$

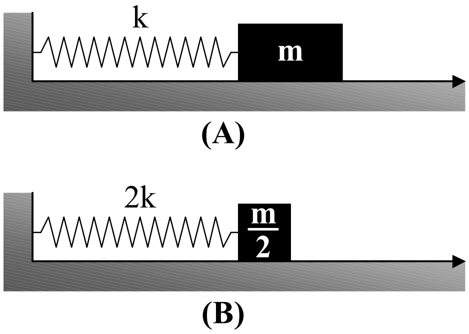
με τη γραφική της παράσταση. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.







1.77. Στους δύο απλούς αρμονικούς ταλαντωτές (Α) και (Β) δίνουμε την ίδια ολική ενέργεια. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;



α. Οι ταλαντωτές εκτελούν αρμονική ταλάντωση ίδιου πλάτους.

β. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς στον ταλαντωτή (Α) είναι διπλάσιο του μέτρου της μέγιστης δύναμης επαναφοράς στον ταλαντωτή (Β).

γ. Οι ταλαντωτές ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα.

δ. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας $\upsilon_{max,B}$ του ταλαντωτή (Β) είναι $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας $\upsilon_{max,A}$ του ταλαντωτή (Α).

1.78. Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής του σχήματος εκτελεί ταλάντωση πλάτους Α. Διατηρούμε σταθερό το πλάτος ταλάντωσης και διπλασιάζουμε τη μάζα του σώματος. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Η περίοδος της ταλάντωσης διπλασιάζεται.

β. Η ολική ενέργεια του συστήματος διπλασιάζεται.

γ. Το μέτρο υ_{max} της μέγιστης ταχύτητας του σώματος γίνεται ίσο με $\frac{\upsilon_{max}}{\sqrt{2}}$.

δ. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σώματος υποδιπλασιάζεται.

1.79. Με ποια από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε και γιατί;

α. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή γίνεται μέγιστη μία μόνο φορά.

β. Η Ενέργεια του ταλαντωτή μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

γ. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή γίνεται ίση με την κινητική του ενέργεια σε δύο χρονικές στιγμές.

δ. Η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η επιτάχυνσή του είναι μηδέν.

1.80. Σημειακό αντικείμενο μάζας m εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t + \phi)$.

α. Να αποδείξετε ότι

i) $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$.

ii) $a = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$.

β. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x

i) την επιτάχυνση του σημειακού αντικειμένου.

ii) τη δυναμική, την κινητική και την ολική του ενέργεια σε κοινό διάγραμμα.

1.81. Να χαρακτηρίσετε με το γράμμα Σ όσες από τις παρακάτω προτάσεις κρίνετε σωστές και με το γράμμα Λ όσες κρίνετε λανθασμένες.
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
Ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας εκτελεί αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, πλάτους Α. Τη χρονική στιγμή που η μάζα βρίσκεται στη μέγιστη θετική της απομάκρυνση, προσκολλάται σ' αυτήν με μηδενική ταχύτητα, ένα κομμάτι πλαστελίνης με τριπλάσια μάζα από του σώματος.

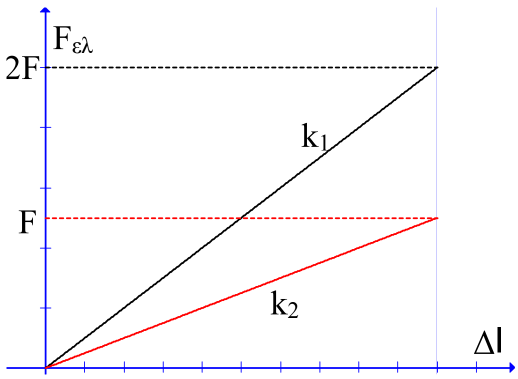
α. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έμεινε σταθερή.

β. Η ενέργεια ταλάντωσης έμεινε σταθερή.

γ. Για το λόγο των μέγιστων ταχυτήτων μετά και πριν την προσκόλληση της πλαστελίνης, ισχύει $\frac{\upsilon'_{max}}{\upsilon_{max}} = 2$.

δ. Για το λόγο των μέγιστων επιταχύνσεων μετά και πριν την προσκόλληση της πλαστελίνης, ισχύει $\frac{a'_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{4}$.

1.82. Η ασκούμενη δύναμη F σε συνάρτηση με την παραμόρφωση Δl για δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα δύο ελατήρια στηρίζονται στο πάνω άκρο τους από οροφή και στο κάτω άκρο τους στερεώνονται μάζες m_1 και m_2, αντίστοιχα, ώστε να προκαλούνται ίσες παραμορφώσεις.



Προσφέρουμε και στα δύο συστήματα ίσα ποσά ενέργειας, οπότε αυτά τίθενται σε αρμονική ταλάντωση.

α. Για το λόγο των πλατών των δύο ταλαντώσεων ισχύει $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

β. Για το λόγο των συχνοτήτων των δύο ταλαντώσεων ισχύει $\frac{f_1}{f_2} = 1$.

γ. Για το λόγο των μέγιστων ταχυτήτων ισχύει $\frac{\upsilon_{1,\max}}{\upsilon_{2,\max}} = 2$.

δ. Για το λόγο των μέγιστων επιταχύνσεων ισχύει $\frac{a_{1,\max}}{a_{2,\max}} = 2$.

Να χαρακτηρίσετε με το γράμμα Σ όσες από τις παραπάνω προτάσεις κρίνετε σωστές και με το γράμμα Λ όσες κρίνετε λανθασμένες.
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

1.83. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}2\ m$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 20\ rad/s$. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

Να γράψετε την εξίσωση σε συνάρτηση με το χρόνο για την απομάκρυνση x, αν δίνεται ότι για $t_0 = 0$ είναι

α. x = 0 και υ > 0

β. x = 0 και υ < 0 [Απ. (α) $x = 0{,}2ημ20t$ (SI) (β) $x = 0{,}2ημ(20t + \pi)$ (SI)]

1.84. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και περνάει από δύο σημεία της τροχιάς του Κ και Λ που απέχουν απόσταση $d = 20\sqrt{2}$ cm, με την ίδια ταχύτητα. Για τη μετάβαση από το σημείο Κ στο Λ απαιτείται χρονικό διάστημα $t_1 = 4\ s$. Μετά το πέρασμά του από το Λ το σημειακό αντικείμενο χρειάζεται χρονικό διάστημα $t_2 = 4\ s$ για να περάσει πάλι από το σημείο Λ κινούμενο με αντίθετη φορά. Να υπολογίσετε

α. την περίοδο της ταλάντωσης.

β. το πλάτος της ταλάντωσης. [Απ. (α) 16 *s* ή 16/3 *s* (β) 20 *cm*]

1.85. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Όταν η απομάκρυνσή του έχει τιμές x_1, x_2, η ταχύτητά του έχει αντίστοιχες τιμές υ_1, υ_2. Να υπολογίσετε

α. την περίοδο της ταλάντωσης.

β. το πλάτος της ταλάντωσης.

<u>Εφαρμογή:</u> $x_1 = 0{,}16\ m$, $x_2 = 0{,}12\ m$, $\upsilon_1 = 1{,}2\ m/s$, $\upsilon_2 = 1{,}6\ m/s$

[Απ. (α) $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$, $T = 0{,}2\pi\ s$ (β) $A = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 x_2^2 - \upsilon_2^2 x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$, $A = 0{,}2\ m$]

1.86. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t + \phi)$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των μεγεθών A, ω, ϕ αν γνωρίζετε ότι απόσταση των ακραίων θέσεων του σημειακού αντικειμένου είναι d = 0,2 *m* και για $t_0 = 0$ είναι x = 0,05 *m* και $\upsilon = -\sqrt{3}\ m/s$.

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ την επιτάχυνση του σημειακού αντικειμένου.

γ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σημειακό αντικείμενο, αν η μάζα του είναι m = 0,1 *kg*.

[Απ. (α) $A = 0{,}1\,m$, $\omega = 20\ rad/s$, $\phi = \frac{5\pi}{6}$ (β) $\alpha = -20\ m/s^2$ (γ) ευθεία]

1.87. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m = 0,01 *kg* εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}2\,m$, περιόδου T = π *s* και μηδενικής αρχικής φάσης.

α. Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το σημειακό αντικείμενο από τη θέση $x_1 = 0{,}1\,m$ στη θέση $x_2 = -0{,}1\,m$, αν δίνεται ότι το σημειακό αντικείμενο περνάει από τη θέση x_1 κινούμενο

i) προς τη θετική κατεύθυνση.

ii) προς την αρνητική κατεύθυνση.

β. Πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σημειακού αντικειμένου όταν αυτό περνάει από τις θέσεις x_1 και x_2;

[Απ. (α) i) $\frac{\pi}{2}\,s$ ii) $\frac{\pi}{6}\,s$ (β) $-4\cdot10^{-3}\ N,\quad 4\cdot10^{-3}\ N$]

1.88. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή t = 0 το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι 4 *cm* και η συχνότητα 2 *Hz*. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη ταχύτητά (κατά μέτρο) του και τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία αυτό θα αποκτήσει αυτήν την ταχύτητα για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

γ. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη επιτάχυνσή (κατά μέτρο) και τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία την αποκτά για πρώτη φορά μετά τη στιγμή $t_0 = 0$.

δ. Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διάνυσε το αντικείμενο από τη στιγμή $t_0 = 0$ ως τη στιγμή t = 1,25 *s*.

[Απ. (α) $x = 4\cdot10^{-2}\eta\mu 4\pi t$ (SI) (β) 0,16π *m/s*, 0,25 *s* γ) $0{,}64\pi^2\ m/s^2$, $\frac{1}{8}\,s$ (δ) 0,4 *m*]

1.89. Σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος 40 *cm* και περίοδο 8 *s*. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης και κινείται προς τις αρνητικές απομακρύνσεις. Να υπολογίσετε

α. την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t = 1 *s*.

β. το χρόνο που πρέπει να περάσει για να βρεθεί το σώμα σε απομάκρυνση x_1 = - 20$\sqrt{2}$ *cm* για τρίτη φορά.

1.90. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνσή του x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(20\pi t + \phi)$ (SI).

α. Για ποιες τιμές της απομάκρυνσης x η δυναμική του ενέργεια U_T είναι ίση με το 50% της ολικής του ενέργειας E;

β. Να υπολογίσετε την τιμή της αρχικής φάσης ϕ, αν δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει κινητική ενέργεια ίση με τα $\frac{3}{4}$ της ολικής ενέργειας ταλάντωσης με x > 0 και υ < 0.

[Απ. (α) – 0,2 m, 0,2 m (β) $\frac{5\pi}{6}$]

1.91. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας 10^{-2} *kg* εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους 0,2 *m*. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ περνάει από τη θέση x = 0,1 *m* κινούμενο κατά τη θετική κατεύθυνση, ενώ τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{2}{3}\,s$ περνάει για πρώτη φορά από την ίδια θέση κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

β. Να γράψετε για την ταλάντωση που εκτελεί το σημειακό αντικείμενο τις εξισώσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

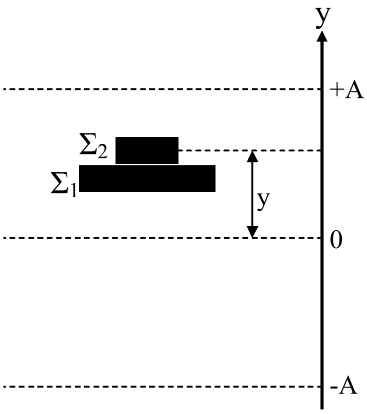
i) της απομάκρυνσης x. ii) της ταχύτητας υ. iii) της επιτάχυνσης α.

γ. Κατά το χρονικό διάστημα της κίνησης από $t_0 = 0$ μέχρι $t_2 = \frac{1}{3}\,s$, να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένη δύναμης που ενεργεί στο σημειακό αντικείμενο.

$(\pi^2 = 10)$. [Απ. (α) 2 s (β) i) $x = 0,2\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ ii) $\upsilon = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI)

iii) $\alpha = -2\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI) (γ) $-15 \cdot 10^{-4}$ J]

1.92. Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 που δείχνει το σχήμα είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο και εκτελούν κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση με περίοδο 2 *s* και πλάτος $0{,}25\ \text{m}$. Το σώμα Σ_2 έχει μάζα 0,2 *kg*.



α. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το σώμα Σ_2 στο σώμα Σ_1 στις θέσεις

i) $y = 0$.

ii) $y = -0{,}25$ *m*.

iii) $y = +0{,}25$ *m*.

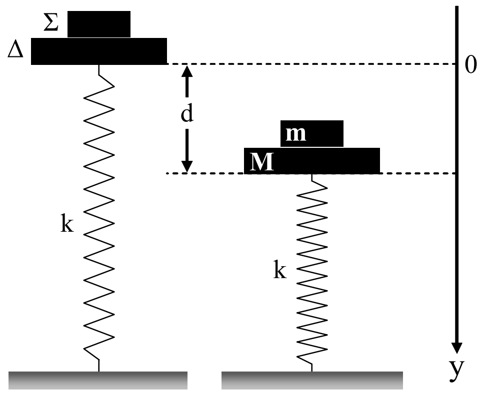
β. Για ποια τιμή του πλάτους ταλάντωσης το σώμα Σ_2 θα εγκαταλείψει το σώμα Α, όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι 2 *s*;

γ. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα της ταλάντωσης για την οποία το σώμα Σ_2 δε θα εγκαταλείψει το σώμα Σ_1, όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,25 *m*;

Δίνονται $g = 10$ *m/s²* και $\pi^2 = 10$.

[Απ. (α) i) –2 *N* ii) –2,5 *N* iii) –1,5 *N* (β) 1 *m* (γ) 1 *Hz*]

1.93. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\ N/m$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο άλλο άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένος δίσκος Δ μάζας Μ = 1,5 *kg*. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένο σώμα Σ μάζας m = 0,5 *kg*. Το σύστημα ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d = \frac{\sqrt{5}}{10} m$ και το αφήνουμε ελεύθερο.



α. Να δείξετε ότι το σώμα Σ θα εγκαταλείψει το δίσκο Δ.

β. Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Σ τη στιγμή που εγκαταλείπει το δίσκο;

γ. Σε πόσο ύψος θα φθάσει το σώμα Σ πάνω από τη θέση στην οποία εγκαταλείπει το δίσκο;

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10$ *m/s²*.

[Απ. (α) εγκαταλείπει στη θέση $y_1 = -0{,}1\ m$ (β) $\upsilon = -2\, m/s$, $\alpha = 10\ m/s^2$ (γ) h = 0,2 *m*]

1.94. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας 0,1 *kg* εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους 0,1 *m* με περίοδο 2 *s*. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημειακό αντικείμενο περνάει από τη θέση $x = 5\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\ m$ κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$ να υπολογίσετε για το σημειακό αντικείμενο

i) τη δυναμική του ενέργεια.

ii) την κινητική του ενέργεια.

iii) το ρυθμό μεταβολής της ορμής του.

Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και $\pi^2 \cong 10$.

[Απ. (α) $x = 0{,}1\eta\mu\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ (SI) (β) i) $1{,}25 \cdot 10^{-3}\ J$ ii) $3{,}75 \cdot 10^{-3}\ J$ iii) $5 \cdot 10^{-2}\ N$]

1.95. Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m = 0,01 *kg* εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η ολική του ενέργεια είναι $E = 32 \cdot 10^{-4}$ J. Η απομάκρυνση x του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και η επιτάχυνσή του α συνδέεται με την απομάκρυνσή του x από τη θέση ισορροπίας του με τη σχέση α = –16x (στο SI).

α. Να υπολογίσετε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με το χρόνο, αν για $t_0 = 0$ το σημειακό αντικείμενο έχει $U_T = K$ και κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση.

[Απ. α. $T = \frac{\pi}{2}$ s , $A = 0{,}2\ m$ β. i) $x = 0{,}2\eta\mu\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ (SI) ii) $x = 0{,}2\eta\mu\left(4t + \frac{7\pi}{4}\right)$ (SI)]

1.96. Ένα σώμα μάζας 1 *kg* εξαρτάται από το κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 400 *N/m*. Το ελατήριο είναι στερεωμένο στην οροφή ανελκυστήρα και κρέμεται ακίνητο (σε σχέση με τον ανελκυστήρα) καθώς αυτός ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\sqrt{2}\ m/s$. Σε μια στιγμή ο ανελκυστήρας σταματάει απότομα.

Α. Ποιο θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει η μάζα m, αν

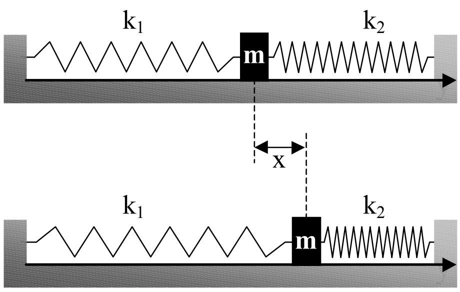
α. το ελατήριο ήταν παραμορφωμένο εξαιτίας του βάρους του σώματος.

β. συγκρατούμε ακίνητο το σώμα ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος.

Β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης y της μάζας m από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο για την περίπτωση (α). Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση y είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και t = 0 όταν ο ανελκυστήρας σταματάει. Να θεωρήσετε την κατεύθυνση προς τα κάτω θετική και $g = 10\ m/s^2$.

[Απ. Α. (α) $\frac{\sqrt{2}}{20}\ m$ (β) 0,075 *m* Β. $y = \frac{\sqrt{2}}{20}\eta\mu(20t + \pi)$ (SI)]

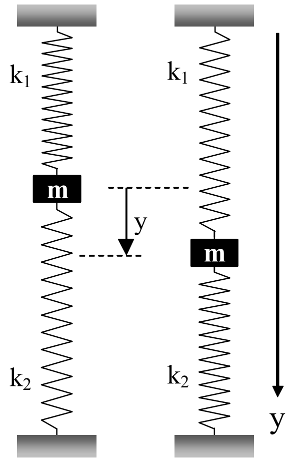
1.97. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος και έχουν σταθερές $k_1 = 300\ N/m$ και $k_2 = 100\ N/m$. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη.



α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίων θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο T.

β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης αν το πλάτος είναι $A = 0{,}2\ m$;

[Απ. (α) $\frac{\pi}{10}$ s (β) 8 *J*]



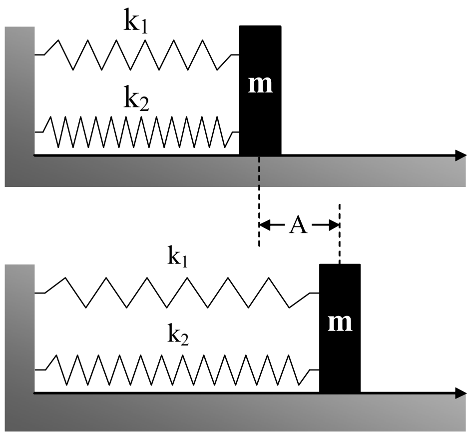
1.98. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* ισορροπεί συνδεδεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σταθερές των δύο ελατηρίων είναι k_1 = 250 *N/m* και k_2 = 150 *N/m*, αντίστοιχα. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίστε την περίοδο T.

β. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι A = 0,2 *m*, πόση είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας m; (g = 10 m/s^2).

Να θεωρήσετε ότι στη θέση που η μάζα ισορροπεί το ελατήριο σταθεράς k_1 είναι τεντωμένο και το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι συσπειρωμένο.

[Απ. (α) $\frac{\pi}{10}$ s (β) 8 J]



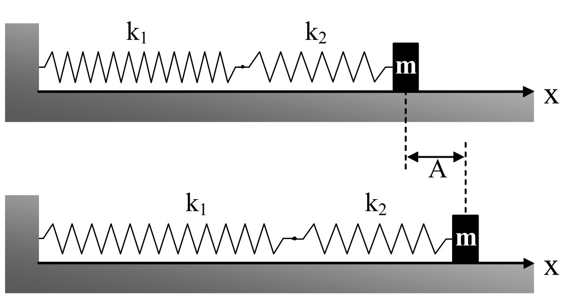
1.99. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο συνδεδεμένο στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι αντίστοιχα k_1 = 220 *N/m* και k_2 = 180 *N/m*. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά A = 0,2 *m* και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίων θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο T.

β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης;

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο, αν για $t = 0$ η μάζα διέρχεται από τη θέση $x = -0{,}1\,m$ κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση. Η απομάκρυνση x είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

[Απ. (α) $\frac{\pi}{10}\,s$ (β) 8 *J* (γ) $x = 0{,}2\eta\mu\left(20t + \frac{7\pi}{6}\right)$(SI)]



1.100. Δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 = 200 *N/m* και k_2 = 300 *N/m* συνδέονται σε σειρά. Το ένα άκρο του συστήματος που προκύπτει συνδέεται ακλόνητα με κατακόρυφο τοίχο και το άλλο συνδέεται με σώμα μάζας m = 0,3 *kg*. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά A = 0,2 *m* και την αφήνουμε ελεύθερη.

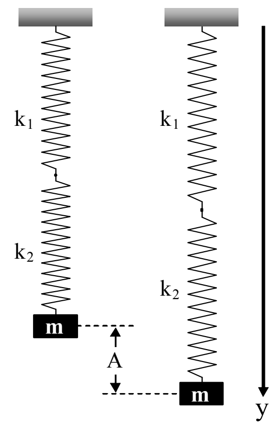
α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίων θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης;

γ. Ποιο ποσοστό επί τοις % της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι κινητική ενέργεια της μάζας, όταν διέρχεται από τη θέση x = 0,1 *m*;

[Απ. (α) $0{,}1\pi$ s (β) 2,4 *J* (γ) 75%]

1.101. Δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 = 150 *N/m* και k_2 = 300 *N/m* συνδέονται σε σειρά. Το ένα άκρο του συστήματος που προκύπτει συνδέεται ακλόνητα με οροφή και το άλλο συνδέεται με σώμα μάζας m = 1 *kg*. Το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά *A* = 0,2 *m* και την αφήνουμε ελεύθερη.



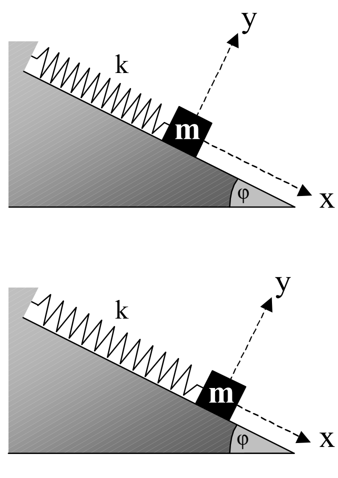
α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας - ελατηρίων θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης;

γ. Ποιο ποσοστό επί τοις % της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι κινητική ενέργεια της μάζας όταν διέρχεται από τη θέση με $y = -\frac{\sqrt{3}}{10}\text{m}$; $(g = 10\text{m/s}^2)$.

[Απ. (α) $\frac{\pi}{5}$s (β) 2 *J* (γ) 25%]

1.102. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* ισορροπεί πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο θεωρείται ιδανικό με σταθερά k = 100 *N/m*. Η γωνία κλίσης του πλάγιου επιπέδου είναι φ = 30°. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου κατά *A* = 0,05 *m* και το αφήνουμε ελεύθερο.



α. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Όταν το σώμα βρίσκεται στις θέσεις $x = \pm 0{,}05\ m$ να υπολογίσετε

i) τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

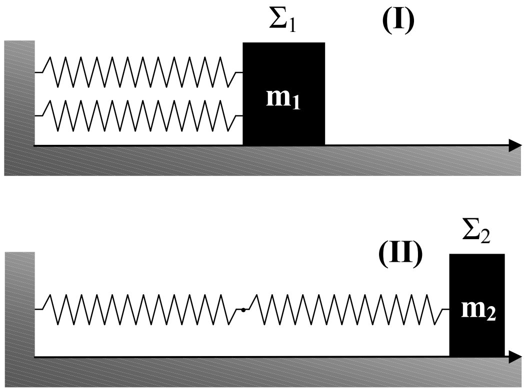
ii) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

iii) το ρυθμό μεταβολής της ορμής του.

[Απ. (α) $\frac{\pi}{5}$s (β) i) 0,125 *J* ii) 0,5 *J*, 0 iii) -5 *N*, 5 *N*]

1.103. **α.** Ένα ιδανικό ελατήριο έχει φυσικό μήκος ℓ_0 και σταθερά k. Κόβουμε το ελατήριο σε N κομμάτια ίσου μήκους. Να βρείτε τη σταθερά καθενός από τα N όμοια ελατήρια που προκύπτουν.

β. Χρησιμοποιούμε δύο από τα όμοια ελατήρια και συναρμολογούμε τις διατάξεις των σχημάτων (Ι) και (ΙΙ). Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ των μαζών των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ώστε τα δύο συστήματα να ταλαντώνονται με την ίδια περίοδο. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.



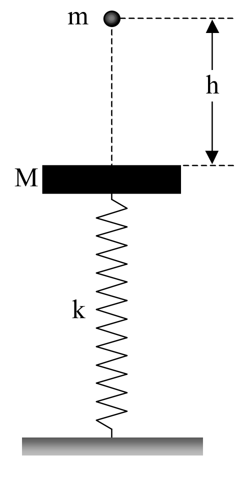
[Απ. (α) $N\cdot k$ (β) $\frac{m_1}{m_2}=4$]

1.104. Ένας δίσκος μάζας M = 3,75 *kg* είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 400 *N/m* του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο του δαπέδου. Από ύψος h = 0,75 *m* πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερο ένα σφαιρίδιο μάζας m = 0,25 *kg*, το οποίο συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αν για t = 0 δίνεται y = 0 και υ < 0.

Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση y είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου $(g=10\,m/s^2)$.



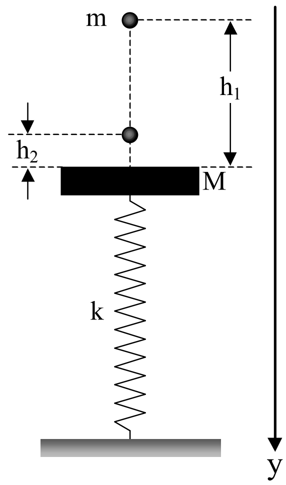
[Απ. (α) $25\cdot10^{-3}m$ (β) $y=25\cdot10^{-3}\eta\mu(10t+\pi)$ (SI)]

1.105. Μία σφαίρα μάζας m = 1 *kg* αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος $h_1=5m$ πάνω από δίσκο μάζας M = 10 *kg*, ο οποίος ισορροπεί συνδεδεμένος στη μια άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 1000 *N/m*, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με το δίσκο και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Μετά την κρούση της με το δίσκο η σφαίρα φθάνει σε ύψος $h_2=1,25\,m$. Να υπολογίσετε

α. τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας και του δίσκου αμέσως μετά την κρούση.

β. το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου.

γ. το ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του. $(g=10\,m/s^2)$.



[Απ. (α) 5 *m/s*, 1,5 *m/s* (β) 0,15 *m* (γ) –150 *N*, 150 *N*]

1.106. Ένα σώμα μάζας M = 0,2 *kg*, αμελητέων διαστάσεων, ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατήριου σταθεράς k = 10 *N/m*, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητο. Δεύτερο σώμα μάζας m = 0,1 *kg*, επίσης αμελητέων διαστάσεων, αφήνεται να πέσει από θέση που βρίσκεται κατά h = 0,45 *m* ψηλότερα από το πρώτο και στην ίδια κατακόρυφο με αυτό. Η σύγκρουση των δύο σωμάτων είναι πλαστική.

α. Να δειχθεί ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση

β. Να βρεθεί το πλάτος και η συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης.

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως χρονική στιγμή t=0 τη στιγμή της σύγκρουσης και σαν θετική τη φορά του βάρους.

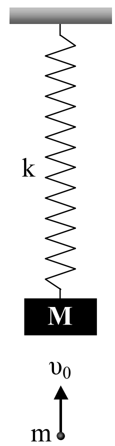
δ. Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το συσσωμάτωμα περνάει για πρώτη και για δεύτερη φορά από τη θέση ισορροπίας του.

ε. Να γίνει η γραφική παράσταση Φ=f(t) της φάσης της ταλάντωσης με το χρόνο.

(g = 10 *m/s²*) Απ.[**β.** $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}=0{,}92Hz$, $A=\dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kh}{(M+m)g}}=0{,}2m$,

γ. $x=0{,}2\eta\mu\left(5{,}78t+\dfrac{11\pi}{6}\right)(S.I)$ **δ.**t_1=0,09 *s*, t_2=0,634 *s*]

1.107. Ένας ξύλινος κύβος μάζας M ισορροπεί συνδεδεμένος στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οροφή. Ένα βλήμα μάζας m κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_0, όπως φαίνεται στο σχήμα.

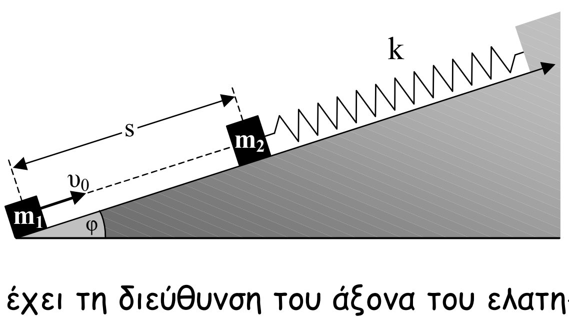


α. Το βλήμα διαπερνά τον κύβο και εξέρχεται με ταχύτητα $\upsilon=\lambda\cdot\upsilon_0$ (λ <1). Η διάρκεια κίνησης του βλήματος μέσα στον κύβο είναι αμελητέα. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο κύβος;

β. Το βλήμα σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του κύβου. Πόσο είναι στην περίπτωση αυτή το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος;

[Απ. (α) $A=(1-\lambda)m\upsilon_0\sqrt{\dfrac{1}{kM}}$ (β) $A=\dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{k\upsilon_0^2}{(M+m)g^2}}$]

1.108. Από την κορυφή λείου πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi=30^o$ στερεώνεται δια μέσου ιδανικού ελατηρίου σώμα μάζας $m_2=3\,kg$ και το σύστημα ισορροπεί πάνω στο πλάγιο επίπεδο. Από τη βάση του πλάγιου επιπέδου κινείται προς τα πάνω σώμα μάζας $m_1=1\,kg$ και αρχικής ταχύτητας $\upsilon_0=5\,m/s$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



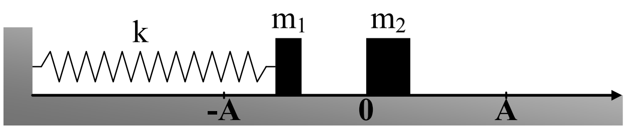
Η αρχική απόσταση των σωμάτων είναι s = 0,9 *m* και η σταθερά του ελατηρίου $k = 300\ N/m$. Τα σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε

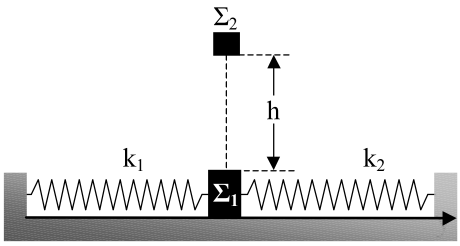
α. το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β. τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος. $(g = 10\ m/s^2)$. [Απ. (α) $\frac{7}{60}\ m$ (β) $\frac{11}{60}\ m$ (επιμήκυνση)]

1.109. Ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\ kg$ είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 400 *N/m* και εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,1\ m$ κατά μήκος λείου οριζόντιου επιπέδου. Όταν το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του συγκρούεται με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\ kg$. Η κρούση είναι μετωπική και πλαστική και η διάρκειά της είναι αμελητέα. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελείται. [Απ. 0,05 m]



1.110. Το σώμα Σ_1 του σχήματος μάζας $m_1 = 1\ kg$ μπορεί να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση. Το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο και τα ελατήρια ιδανικά με σταθερές k_1 = 150 *N/m* και k_2 = 50 *N/m*. Εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του στη θέση A = +0,24 *m* και τη χρονική στιγμή t = 0 το αφήνουμε ελεύθερο.



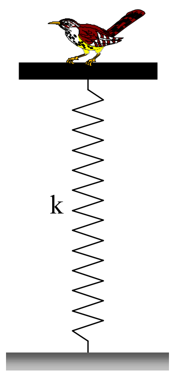
Ταυτόχρονα από ύψος h πάνω από τη θέση ισορροπίας αφήνεται να πέσει ελεύθερα σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 0,44 *kg*.

α. Να υπολογίσετε το ύψος h ώστε το σώμα Σ_2 να συναντήσει το Σ_1 όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του.

β. Αν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά στη θέση 0, να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Η διάρκεια της κρούσης αμελητέα. $(g = 10\ m/s^2, \pi^2 = 10)$. [Απ. (α) $\frac{1}{16}\ m$ (β) 0,2 *m*]

1.111. Ένας δίσκος μάζας $M = 1\ kg$ είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\ N/m$, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο δίσκο κάθεται ένα πουλί μάζας $m = 0,2\ kg$ και κάποια στιγμή εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon = 2\ m/s$. Να υπολογίσετε



α. το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά ο δίσκος.

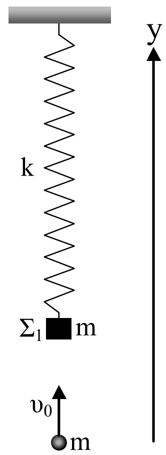
β. το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου.

γ. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

δ. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
$(g = 10\ m/s^2)$. [Απ. (α) 0,4 *m/s* (β) 0,03 *m* (γ) 0,09 *J* (δ) 0,64 *J*]

1.112. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $20\ N/m$ είναι στερεωμένο σε οροφή. Στο άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο σώμα Σ_1 μάζας $0,2\ kg$ το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $0,2\ m$. Κάποια στιγμή, που θεωρούμε ως αρχή του χρόνου $t_0 = 0$, ενώ το σώμα βρίσκεται στο μισό του πλάτους κατερχόμενο προς τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται μετωπικά με σώμα Σ_2 ίσης μάζας, που έχει αντίθετη ταχύτητα. Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος Σ_1 αν η κρούση είναι πλαστική. Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφος με φορά προς τα κάτω. $(g = 10\ m/s^2)$. [Απ. $y = 0{,}2\eta\mu\left(5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)]

1.113. Ένα σώμα Σ_1 μάζας m = 1 *kg* ισορροπεί συνδεδεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m* του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε οροφή. Ένα βλήμα Σ_2 ίσης μάζας με το Σ_1 κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{6}\ m/s$, μετωπικά και πλαστικά με το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$

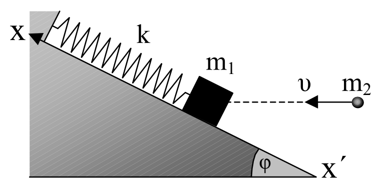


α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
β. Μετά πόσο χρόνο από τη στιγμή της κρούσης $t_0 = 0$, η ταχύτητα του συσσωματώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά;
γ. Να υπολογίσετε για το χρονικό διάστημα του ερωτήματος (β),το έργο της δύναμης του ελατηρίου.
δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος
i) αμέσως μετά την κρούση.
ii) όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της κίνησής του.

Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας για την ταλάντωση είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου. $(g = 10\ m/s^2)$.

[Απ. (α) 0,2 *m* (β) $\frac{\sqrt{2}\pi}{30}$ s (γ) 0,5 *J* (δ) i) –10 *N* ii) –20 *N*, 20 *N*]

1.114. Από την κορυφή λείου πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30° εξαρτάται ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\ N/m$ και στο κάτω ελεύθερο άκρο του συνδέεται σώμα μάζας $m_1 = 2\ kg$. Το σύστημα ισορροπεί πάνω στο πλάγιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας $m_2 = 2\ kg$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2\ m/s$ και συγκρούεται ακαριαία, μετωπικά και πλαστικά με το σώμα μάζας m_1. Το συσσωμάτωμα δεν αναπηδά.



α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β. Θεωρούμε αρχή μέτρησης του χρόνου $t_0 = 0$ τη στιγμή της κρούσης και άξονα $x'x$ με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x για την ταλάντωση είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

γ. Μετά πόσο χρόνο από τη στιγμή $t_0 = 0,$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά;

δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά τη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου

i) αμέσως μετά την κρούση.

ii) όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της κίνησής του. $(g = 10m/s^2)$.

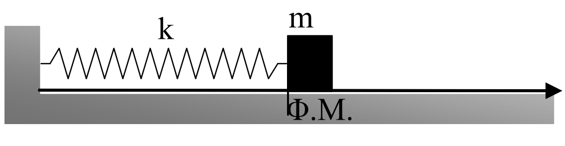
[Απ. (α) 0,2 *m* (β) $x = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$(SI) (γ) $\frac{\pi}{15}$ s (δ) i) -10 *N* ii) -20 *N*, 20 *N*]

1.115. Σημειακό θετικό φορτίο Q είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντια μονωτική επιφάνεια. Στην ίδια κατακόρυφο και σε κάποια απόσταση ισορροπεί ένα άλλο σημειακό θετικό φορτίο q μάζας m. Απομακρύνουμε ελάχιστα πάνω στην κατακόρυφο το φορτίο q από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο. Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{4k_C Qq}{mg^3}}$.

1.116. Σώμα βρίσκεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια που εκτελεί αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα $\frac{2}{\pi}$ *Hz*. Αν ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ σώματος και επιφάνειας είναι 0,8 να υπολογίσετε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης ώστε το σώμα να μην ολισθαίνει πάνω στην οριζόντια επιφάνεια. (g=10 *m/s²*) [Απ. $A_{\max} = \frac{\mu_s \cdot g}{4\pi^2 \cdot f^2} = 0{,}5\,m$]

<u>**ΥΠΟΔΕΙΞΗ:**</u> Για το σώμα, το ρόλο της δύναμης επαναφοράς παίζει η στατική τριβή $\mathfrak{I}_s$. Πρέπει $\mathfrak{I}_s \le \mu_s \cdot N$.

1.117. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* είναι δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 400 *N/m*, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F = 80 *N*, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, ώστε το ελατήριο να αρχίσει να επιμηκύνεται.



α. Να υπολογίσετε την επιμήκυνση το ελατηρίου όταν το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που θα αποκτήσει το σώμα.

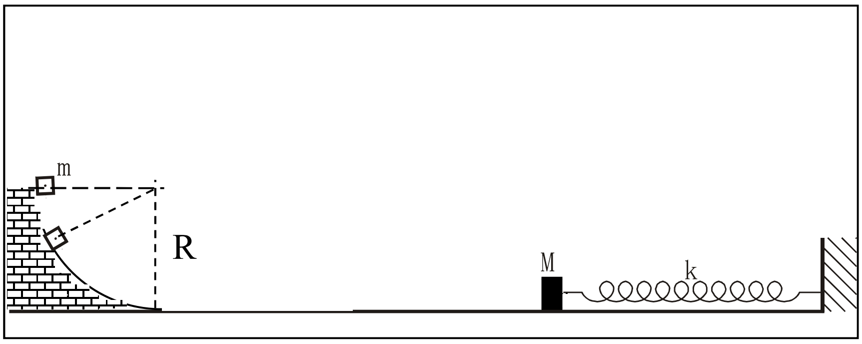
γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

δ. Να αποδείξετε ότι το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

ε. Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης.

στ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του κινητού από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

1.118. Ένα σώμα μάζας m = 1 *kg* αφήνεται από το ψηλότερο σημείο ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R = 5 *m* να ολισθήσει χωρίς τριβές. Το σώμα φτάνει στο λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά με το ακίνητο σώμα μάζας Μ = 10 *kg* που είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k = 250 *N/m* και στη συνέχεια επιστρέφει στο τεταρτοκύκλιο και σταματά στιγμιαία σε σημείο του, στο οποίο η ακτίνα σχηματίζει με την κατακόρυφη ακτίνα γωνία φ με συνφ = 0,75.



Α. Να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα που θα έχει το m όταν φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο.

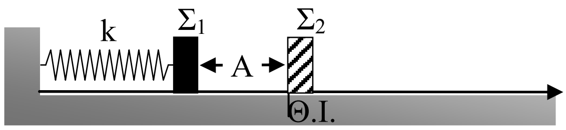
β. την ταχύτητα των σωμάτων m και Μ αμέσως μετά την κρούση τους.

γ. το πλάτος και την περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης του σώματος Μ.

Β. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του Μ, θεωρώντας σα χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή της κρούσης. Δίνεται g = 10 m/s^2.

[Απ. α. 10 *m/s*, β. 5 *m/s*, 1,5 *m/s*, γ. 0,3 *m*, 0,4π *s*, Β. x= 0,3ημ5t (S.I)]

1.119. Το σώμα $Σ_1$ έχει μάζα m = 2 *kg* και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 200 *N/m*. Το σώμα συγκρατείται ακίνητο σε θέση όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 0,4 *m*. Στη θέση ισορροπίας βρίσκεται ακίνητο σώμα $Σ_2$ ίδιας μάζας με το $Σ_1$. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Τη χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε το $Σ_1$ ελεύθερο να κινηθεί και τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του συγκρούεται μετωπικά με το $Σ_2$. Εξαιτίας της σύγκρουσης το $Σ_1$ χάνει το 84% της αρχικής του ενέργειας.



α. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση τους.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το σώμα $Σ_1$.

[Απ. α. 2,4 *m/s*, 1,6 *m/s*, β. x = Α΄ ημ(10t+3π/2) (S.I.), όπου Α΄=0,4 *m* για t < 0,05π *s* και Α΄= 0,16 *m* για t > 0,05π *s*]

1.120. Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1$ kg είναι δεμένο στη μία άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητη στερεωμένη σε οροφή. Η θέση ισορροπίας του $Σ_1$ απέχει από το οριζόντιο έδαφος απόσταση $h = 4$ m. Το $Σ_1$ εκτελεί κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_1 = 0{,}8$ m. Από το σημείο του εδάφους, το οποίο βρίσκεται στην προέκταση του άξονα του ελατηρίου, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα $υ_0 = 10$ m/s .ένα σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 2$ kg, το οποίο συγκρούεται μετωπικά με το $Σ_1$, καθώς το $Σ_2$ ανεβαίνει. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική και τελείως ανελαστική και η διάρκειά της θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα στιγμιαία σταματάει. Θεωρούμε σα θετική τη φορά του βάρους και ότι $g = 10$ m/s^2.

Α. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση και του συσσωματώματος.

Β. Να προσδιορίσετε την απόσταση από το έδαφος του σημείου που έγινε η κρούση.

Γ. Να υπολογίσετε το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Δ. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, αν θεωρήσουμε σα χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που έγινε η κρούση.

1.3. Φθίνουσες - Εξαναγκασμένες Μηχανικές Ταλαντώσεις

✓ <u>Ορισμοί</u>:

- **<u>Αμείωτη</u>** ονομάζεται η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό, δηλαδή όταν η ενέργεια ταλάντωσης είναι σταθερή με την πάροδο του χρόνου.

- **<u>Ελεύθερη</u>** ονομάζεται η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν του προσφέρουμε μία φορά ενέργεια και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί.

- **<u>Ιδιοσυχνότητα</u>** (f_0) ονομάζουμε τη συχνότητα της αμείωτης ελεύθερης ταλάντωσης.

Η ιδιοσυχνότητα εξαρτάται μόνο από τα στοιχεία του ταλαντωτή.

- **<u>Εξαναγκασμένη</u>** ονομάζουμε την ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν ασκούμε μια εξωτερική περιοδική δύναμη στο ίδιο σημείο στο οποίο ασκείται και η ελαστική δύναμη επαναφοράς.

- **<u>Φθίνουσα</u>** ονομάζεται η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται με την πάροδο του χρόνου μέχρι να μηδενιστεί.

  Η φθίνουσα ταλάντωση μπορεί να είναι ελεύθερη ή εξαναγκασμένη.

Στην πράξη, αν διεγείρουμε ένα σύστημα σε ταλάντωση και το αφήσουμε ελεύθερο, μετά από κάποιο μικρό ή μεγάλο χρονικό διάστημα θα δούμε ότι θα σταματήσει να ταλαντώνεται. Αυτό συμβαίνει εξ αιτίας των διαφόρων δυνάμεων αντίστασης (τριβής) που ασκούνται στο σώμα. Το αποτέλεσμα της επίδρασης αυτών των δυνάμεων είναι ότι μέσω του έργου τους αφαιρούν από το σύστημα ενέργεια και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται μέχρι που τελικά μηδενίζεται.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που η δύναμη αντίστασης έχει μέτρο που είναι ανάλογο στο μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης κάθε χρονική στιγμή και φορά αντίρροπη από τη φορά της στιγμιαίας ταχύτητας, δηλαδή όταν είναι της μορφής:

$$\boxed{\vec{F} = -b \cdot \vec{\upsilon}} \qquad (1.14)$$

όπου b είναι μια θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά απόσβεσης ή συντελεστής απόσβεσης και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο κινείται ο ταλαντωτής και από την κατασκευή του ταλαντωτή (σχήμα – μέγεθος). <u>Μονάδα του συντελεστή απόσβεσης στο S.I. είναι το</u> $1\frac{kg}{s}$.

Για ένα σύστημα που εκτελεί ελεύθερη φθίνουσα ταλάντωση και στο οποίο εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{αντ} = -b\upsilon$, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής γράφεται: $\Sigma F = ma \Rightarrow F_{επ} + F_{αντ} = ma \Rightarrow -Dx - b\upsilon = ma$

ή

$$\boxed{ma + b\upsilon + Dx = 0}. \qquad (1.15)$$

Η εξίσωση αυτή, για μικρές τιμές της σταθεράς απόσβεσης b, δέχεται σαν λύση, την

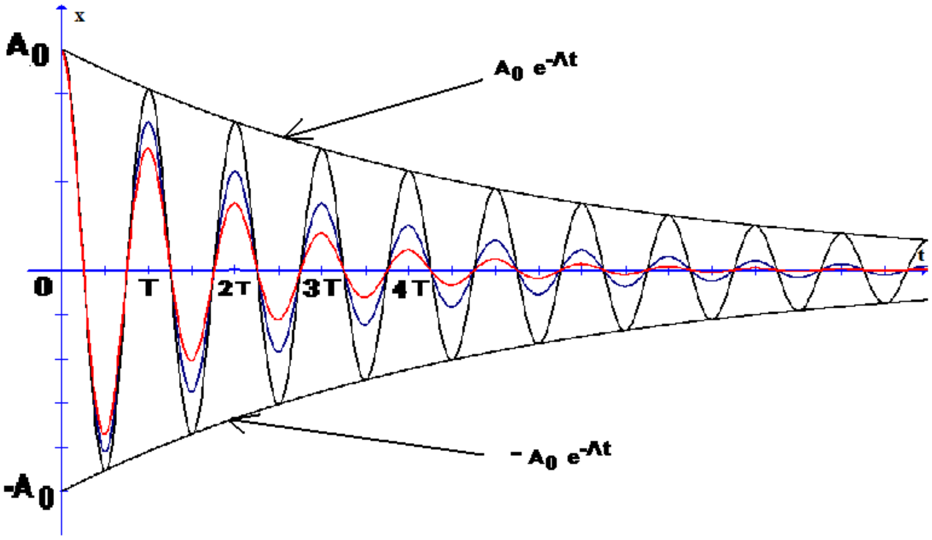
$$x = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \varphi_0) \qquad (t \geq 0) \qquad (1.16)$$

Στην εξίσωση αυτή τα A_0, φ_0 είναι αυθαίρετες σταθερές, τις οποίες υπολογίζουμε από τις αρχικές συνθήκες, και Λ μια θετική σταθερά <u>που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντωτή.</u> Μονάδα στο S.I. έχει το 1 s^{-1} $\left[\Lambda = \dfrac{b}{2m}\right]$

Μπορούμε στην παραπάνω σχέση 1.16 να ονομάσουμε πλάτος A το $A_0\, e^{-\Lambda t}$, αρκεί βέβαια ο χρόνος t να παίρνει τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου Τ. Δηλαδή

$\boxed{A = A_0 e^{-\Lambda t}}$ t = nT (με n = 0, 1, 2…) (1.17)

Αν η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη τότε η λύση που προκύπτει από την εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής (εξίσωση 1.15) δεν παίρνει πραγματικές τιμές. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση δεν είναι περιοδική και το σώμα θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του, χωρίς να την ξεπεράσει.



<u>Σχήμα:</u> Γραφική παράσταση της 1.16 για διαφορετικές τιμές της σταθεράς απόσβεσης b, θεωρώντας ότι η περίοδος, για μικρές τιμές της σταθεράς b, είναι σταθερή.

❖ Αν οι τιμές της σταθεράς απόσβεσης μεγαλώσουν λίγο, ώστε να εξακολουθεί να ισχύει η εξίσωση 1.16, η περίοδος της ταλάντωσης μεγαλώνει λίγο. <u>Αυτή η μικρή αύξηση της περιόδου θεωρείται συνήθως αμελητέα.</u>

[Σημείωση: Η σχέση από την οποία υπολογίζεται η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης και η εξάρτησή της από τη σταθερά απόσβεσης είναι

$$\omega_{\phi\theta} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (1.18)$$

όπου ω_0 είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.]

❖ <u>Η αύξηση στην τιμή της σταθεράς b, έχει σαν αποτέλεσμα και την αύξηση του ρυθμού ελάττωσης του πλάτους της ταλάντωσης.</u>

[Σημείωση: Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση 1.17.

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = -\Lambda A_0 e^{-\Lambda t} \text{ ή } \boxed{\frac{dA}{dt} = -\Lambda \cdot A}.$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους είναι ανάλογος με το πλάτος της ταλάντωσης εκείνη τη χρονική στιγμή, αρκεί βέβαια να αναφερόμαστε σε χρονική στιγμή που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου]

❖ <u>Στη διάρκεια μιας φθίνουσας ταλάντωσης, με ορισμένη τιμή της σταθεράς b, η περίοδος διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη του πλάτους.</u>

❖ <u>Για μεγάλες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b η κίνηση είναι **απεριοδική**.</u>

➢ Η Ενέργεια στη φθίνουσα ταλάντωση

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εξ αιτίας του έργου της δύναμης αντίστασης, η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Η σχέση από την οποία υπολογίζουμε την ενέργεια του ταλαντωτή κάθε χρονική στιγμή είναι

$$E = U + K \Rightarrow E = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \text{όπου } x = A_0 e^{-\Lambda t} \sigma\upsilon\nu\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) \tag{1.19}$$

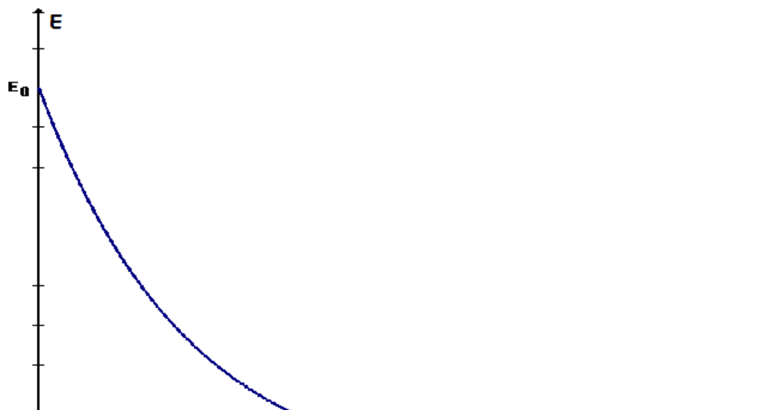
Από τη σχέση που δίνει την ενέργεια ταλάντωσης σε συνάρτηση με το πλάτος της (σχέση 1.13), με αντικατάσταση της σχέσης 1.17, παίρνουμε:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } E = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t} \tag{1.20}$$

Η Ενέργεια που υπολογίζεται από την 1.20 συμπίπτει με την ενέργεια που υπολογίζεται από την 1.19 μόνο σε χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ημιπεριόδου (t=n T/2, n = 0, 1, 2, …).

Η εξίσωση 1.20 δίνει τη μέση τιμή της ενέργειας την τυχαία χρονική στιγμή t, γύρω από μια οσοδήποτε μικρή περιοχή. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η <u>**μέση τιμή** της ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.</u>

Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η εκθετική μείωση της μέσης τιμής της ενέργειας.



- **<u>Χρόνος υποδιπλασιασμού ή χρόνος ημιζωής ($T_{1/2}$)</u>**

Ονομάζεται ο χρόνος που πρέπει να περάσει, ώστε ένα μέγεθος το οποίο μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, να μειωθεί στο <u>μισό</u> της αρχικής του τιμής.
Για $t = T_{1/2}$ η 1.17 δίνει $A = A_0 / 2$. Άρα

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow e^{-\Lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \Lambda T_{1/2} = \ell n2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ell n2}{\Lambda}$$

Από τη 1.17 για $t = n\ T_{1/2}$ με $n = 0, 1, 2, \ldots$ προκύπτει $A = A_0 e^{-\Lambda \cdot n T_{1/2}} \Rightarrow A = A_0\left(e^{-\Lambda T_{1/2}}\right)^n$

$$\Rightarrow A = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \qquad \boxed{A = \frac{A_0}{2^n}} \qquad (1.21)$$

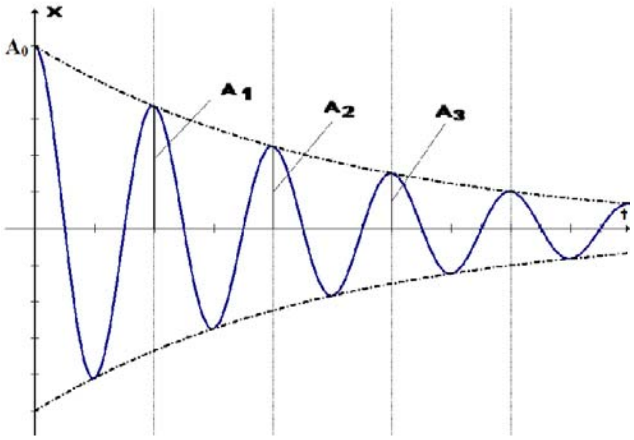
- **<u>Λόγος διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση</u>**

Από την 1.17 για δύο διαδοχικές του ακέραιου n, π.χ για n = k και n = k+1, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= A_0 e^{-\Lambda \cdot kT} \\ A_{k+1} &= A_0 e^{-\Lambda (k+1)T} \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda \cdot kT}}{A_0 e^{-\Lambda \cdot kT} \cdot e^{-\Lambda T}} \Rightarrow \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T}$$

. Για k = 0, 1, 2, 3… παίρνουμε

$$\boxed{\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = e^{\Lambda T}}$$



Παράδειγμα 1.16. Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ με Λ θετικό αριθμό. Μετά από 20 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος του γίνεται $\frac{A_0}{5}$. Να βρείτε μετά από πόσες ταλαντώσεις το πλάτος του θα γίνει $\frac{A_0}{125}$.

Λύση

Τη χρονική στιγμή t = 20T, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης, το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_1 = \frac{A_0}{5}$. Τη χρονική στιγμή t = nT, όπου n ο ζητούμενος θετικός ακέραιος αριθμός των ταλαντώσεων, το πλάτος έχει γίνει $A_2 = \frac{A_0}{125}$. Είναι

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda 20T} \Rightarrow \frac{\cancel{A_0}}{5} = \cancel{A_0} e^{-\Lambda 20T} \Rightarrow e^{-\Lambda 20T} = \frac{1}{5} \tag{1.16.1}$$

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda nT} \Rightarrow \frac{\cancel{A_0}}{125} = \cancel{A_0} e^{-\Lambda nT} \Rightarrow e^{-\Lambda nT} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \overset{(1.16.1)}{\Rightarrow} e^{-\Lambda nT} = \left(e^{-\Lambda 20T}\right)^3 \Rightarrow e^{-\Lambda nT} = e^{-\Lambda 60T} \Rightarrow$$

$$-n\cancel{\Lambda T} = -60\cancel{\Lambda T} \Rightarrow n = 60.$$

Παράδειγμα 1.17. Το πλάτος μίας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης ελαττώνεται σύμφωνα με την σχέση : $A = A_0 \cdot e^{-t\frac{\ell n 2,5}{100}}$. Μετά από 25 ταλαντώσεις έχουν μετατραπεί σε θερμότητα τα $\frac{84}{100}$ της αρχικής ενέργειας.

α. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το A_0, μετά από 25 πλήρεις ταλαντώσεις.

β. Να βρείτε την περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης.

Λύση

α. Αν E_0 είναι η αρχική ενέργεια του ταλαντωτή, τη χρονική στιγμή t = 25T, η ενέργεια του θα είναι $E = E_0 - \frac{84}{100}E_0 \Rightarrow E = \frac{16}{100}E_0$. Από τη σχέση που δίνει την ολική ενέργεια της ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}DA^2$, για t = nT, έχουμε $\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{D}A^2 = \frac{16}{100}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{D}A_0^2 \Rightarrow A = \frac{4}{10}A_0$ (1.17.1)

β. Για t = 25T, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης, ισχύει: $A = A_0 e^{-25T\frac{\ell n 2,5}{100}} \Rightarrow A = A_0 e^{-T\frac{\ell n 2,5}{4}}$

$$\overset{1.17.1}{\Rightarrow} \frac{4}{10}\cancel{A_0} = \cancel{A_0} e^{-T\frac{\ell n 2,5}{4}} \Rightarrow e^{-T\frac{\ell n 2,5}{4}} = \frac{2}{5} \Rightarrow e^{T\frac{\ell n 2,5}{4}} = 2,5 \Rightarrow \ell n\left(e^{T\frac{\ell n 2,5}{4}}\right) = \ell n 2,5 \Rightarrow T\frac{\ell n 2,5}{4} = \ell n 2,5$$

$$\Rightarrow T = 4\,s$$

Παράδειγμα 1.18. Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις. Για την πρώτη περίοδο είναι γνωστό ότι x = 16·συν20πt (*cm*) και η δύναμη αντίστασης υπακούει στο νόμο $F_{αντ}$ = - 0,5υ (S.I). Η μάζα του ταλαντωμένου συστήματος είναι $\frac{6,25}{\ell n 2}kg$ και $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μετά από 250 ταλαντώσεις (κατά την διάρκεια της 251ης περιόδου).

β. Να βρείτε τις συναρτήσεις x = f(t), υ = f(t) κατά την διάρκεια της 251ης περιόδου.

γ. Να υπολογίσετε την τιμή της δύναμης της αντίστασης τη χρονική στιγμή t = 25,025 *s*.

Να θεωρήσετε ότι κατά την διάρκεια μιας περιόδου το πλάτος διατηρείται σταθερό και ίσο με την τιμή που έχει στην έναρξη της περιόδου.

Λύση

Είναι b = 0,5 *kg/s*, $\Lambda = \dfrac{0,5}{2\cdot\dfrac{6,25}{\ell n2}}s^{-1} \Rightarrow \Lambda = \dfrac{\ell n2}{25}s^{-1}$, A_0 = 16 *cm*, ω = 20π *rad/s*, T = 0,1 *s*.

α. Η μείωση του πλάτους ακολουθεί τον εκθετικό νόμο (εξίσωση 1.17), αλλά θεωρούμε ότι το πλάτος είναι σταθερό κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Έτσι αν πχ, την t = 0 είναι A_0 = 16 *cm* τότε στο [0, T) (δηλαδή κατά τη διάρκεια της 1ης περιόδου) είναι συνεχώς 16 *cm*, ενώ κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου, στο [T, 2T) για t = T, θα είναι συνεχώς $A_1 = A_0 e^{-\frac{\ell n2}{25}T} \Rightarrow A_1 = 16e^{-\frac{\ell n2}{25}\cdot 0,1}\,cm$.

Έτσι κατά τη διάρκεια της 251ης περιόδου, δηλαδή στο [250T, 251T), για t = 250T = = 25 *s* είναι $A_{250} = A_0 e^{-\frac{\ell n2}{25}25} = A_0 e^{-\ell n2} \Rightarrow A_{250} = 16\cdot\dfrac{1}{2}cm \Rightarrow A_{250} = 8cm$.

β. Η περίοδος στη φθίνουσα ταλάντωση είναι σταθερή, άρα και ω = 20π *rad/s*. Θα είναι x = 8 συν20πt (x σε *cm*) και υ = - 20π•8 ημ20πt ή υ = - 1,6π ημ20πt (υ σε *m/s*). (1.18.1)

γ. Είναι $\dfrac{t}{T} = \dfrac{25,025}{0,1} = 250,25 \Rightarrow t = 250,25\cdot T \Rightarrow 250\cdot T < t < 251\cdot T$, δηλαδή η χρονική στιγμή 25,025 *s* ανήκει στην 251η περίοδο, στην οποία η ταχύτητα περιγράφεται από την εξίσωση 1.18.1. Άρα

$$F_{αντ} = -0,5\cdot\left(-1,6\pi\cdot ημ\left(20\pi\cdot 25,025\right)\right) = +0,8\pi\cdot ημ(500,5\pi) \Rightarrow F_{αντ} = 0,8\pi\cdot ημ\left(\cancel{500\pi} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$\boxed{F_{αντ} = 0,8\pi\,\mathrm{N}}$.

Παράδειγμα 1.19. Ένα μηχανικό σύστημα μάζας m = 1 *kg*, εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις, των οποίων το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ με Λ θετικό αριθμό. Τη χρονική στιγμή t = 0 το πλάτος της ταλάντωσης είναι 36 *cm*, ενώ μετά από δύο περιόδους, που διαρκούν 4 *s*, το πλάτος γίνεται 25 *cm*. Να υπολογίσετε

α. την τιμή της σταθεράς Λ.

β. την απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι του τη χρονική στιγμή t = 2 *s*.

γ. το έργο της δύναμης αντίστασης στη διάρκεια της 2ης περιόδου.

Θεωρήστε ότι η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Δίνονται: $\ell n1,2 = 0,182\ \ και\ \ \pi^2 = 10$.

Λύση

Δίνονται A_0 = 36 *cm*, A_2 = 25 *cm*, 2T = 4 *s* ➔ T = 2 *s*.

α.

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2T} \Rightarrow 25 = 36e^{-4\Lambda} \Rightarrow e^{4\Lambda} = \frac{36}{25} = 1,44 \Rightarrow e^{4\Lambda} = 1,2^2 \Rightarrow \ell ne^{4\Lambda} = 2\ell n1,2 \Rightarrow 4\Lambda = 0,364 \Rightarrow$$

$\boxed{\Lambda = 0,091s^{-1}}$

β. Για τη χρονική στιγμή t = T = 2 *s* ισχύει: $A_1 = A_0 e^{-\Lambda T} \Rightarrow A_1 = 36e^{-2\Lambda}$. Επειδή όμως $e^{4\Lambda} = 1,2^2 \Rightarrow e^{2\Lambda} = 1,2 \Rightarrow e^{-2\Lambda} = \dfrac{1}{1,2}$, είναι $A_1 = 36 \cdot \dfrac{1}{1,2} cm \Rightarrow \boxed{A_1 = 30\,cm}$

γ. Το έργο της δύναμης αντίστασης εκφράζει τη μετατροπή της ενέργειας ταλάντωσης σε θερμική. Στην αρχή της 2ης περιόδου (t = T) είχε ενέργεια $E_1 = \dfrac{1}{2} D A_1^2$, ενώ στο τέλος της είχε ενέργεια $E_2 = \dfrac{1}{2} D A_2^2$, με $D = m \cdot \omega^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T^2} = 1\dfrac{40}{4} rad/s \Rightarrow D = 10\,N/m$.

Επομένως $W_{\alpha\nu\tau} = E_2 - E_1 = \dfrac{1}{2} D\left(A_2^2 - A_1^2\right) = \dfrac{1}{2} 10\left(25^2 - 30^2\right)10^{-4}\,J \Rightarrow W_{\alpha\nu\tau} = -0,1375\,J$.

✓ Εξαναγκασμένες Μηχανικές Ταλαντώσεις

- **Εξαναγκασμένη** ονομάζουμε την ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν ασκούμε μια εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγείρουσα δύναμη) στο ίδιο σημείο στο οποίο ασκείται και η ελαστική δύναμη επαναφοράς.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία ο διεγέρτης ασκεί στον ταλαντωτή περιοδική δύναμη της μορφής $F = F_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega_\delta t)$, όπου ω_δ η κυκλική συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης.

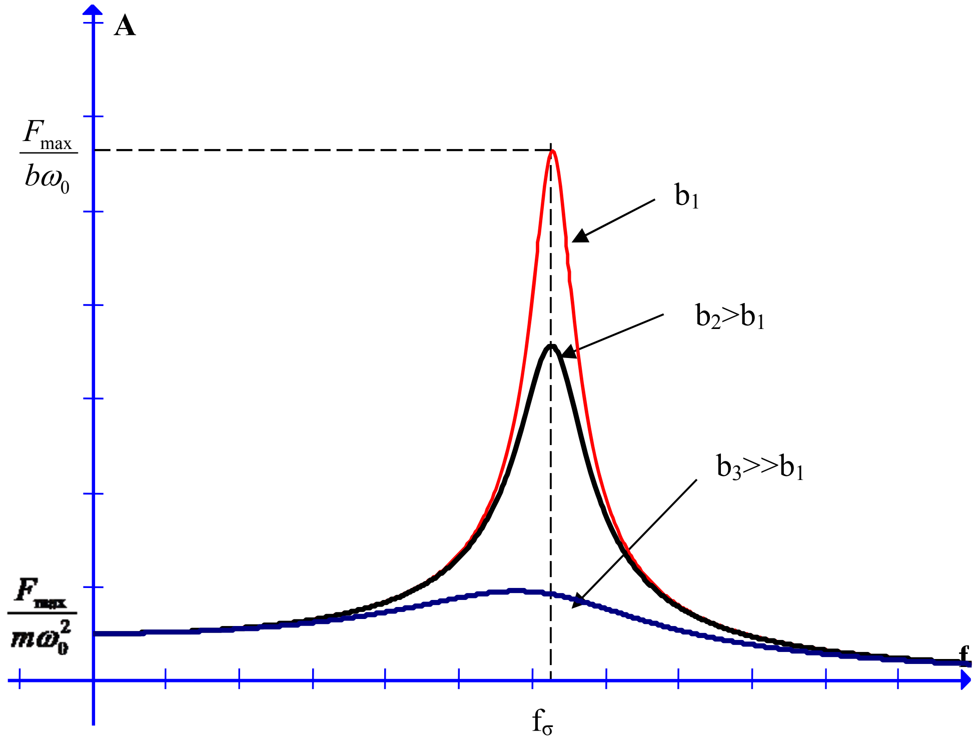
Στην περίπτωση αυτή στον ταλαντωτή, εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς, ασκούνται η δύναμη αντίστασης και η διεγείρουσα δύναμη. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής γράφεται: $\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = ma \Rightarrow -Dx - b\upsilon + F_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega_\delta t) = ma \Rightarrow$ $ma + b\upsilon + Dx = F_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega_\delta t)$. Η εξίσωση αυτή, στην μόνιμη κατάσταση, στην οποία το πλάτος έχει σταθεροποιηθεί, έχει σαν λύση την $\boxed{x = A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega_\delta t - \varphi_0\right)}$ όπου η σταθερά φ_0 υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες. [φ_0 είναι η διαφορά φάσης απομάκρυνσης - διεγείρουσας δύναμης με $0 \le \varphi_0 \le \pi$.]

Παρατηρούμε ότι:

α. <u>Η ταλάντωση έχει πλάτος που είναι ανεξάρτητο από το χρόνο</u>. Το <u>πλάτος</u> A όμως <u>εξαρτάται</u> από την τιμή της F_{max}, τη σταθερά b, τη μάζα m του ταλαντωτή (και τα άλλα φυσικά του χαρακτηριστικά) καθώς και <u>από την κυκλική συχνότητα του διεγέρτη</u>.

β. <u>Το σώμα ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα ίση με την κυκλική συχνότητα ω_δ της διεγείρουσας δύναμης</u>.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της μεταβολής του πλάτους στην εξαναγκασμένη ταλάντωση (μόνιμη κατάσταση) σε συνάρτηση με τη συχνότητα f_δ της διεγείρουσας δύναμης, για τρεις διαφορετικές τιμές της σταθεράς απόσβεσης b.



Σχήμα: Καμπύλες συντονισμού

Παρατηρήσεις:

α. Για ορισμένη τιμή της σταθεράς b, καθώς η συχνότητα του διεγέρτη αυξάνεται αρχίζοντας από πολύ μικρές τιμές, το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται μέχρι μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί (για πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας του διεγέρτη).

[Η συχνότητα του διεγέρτη, για την οποία το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο, δίνεται από τη σχέση: $\omega_\sigma = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$ *ή* $\omega_\sigma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$ *.]*

Το φαινόμενο της μεγιστοποίησης του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης για ορισμένη τιμή της συχνότητας f_σ του διεγέρτη, ονομάζεται **συντονισμός**. (η f_σ ονομάζεται συχνότητα συντονισμού.)

β. Όταν αυξάνει η σταθερά απόσβεσης το μέγιστο πλάτος μειώνεται και η συχνότητα στην οποία παρατηρείται ο συντονισμός μικραίνει. [Για μικρές τιμές της σταθεράς b θα θεωρούμε προσεγγιστικά ότι η συχνότητα συντονισμού είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Δηλαδή ότι $f_\sigma \approx f_0$.] (1.22)

Αν η σταθερά b είναι πολύ μεγάλη τότε είναι δυνατό να μην παρατηρηθεί το φαινόμενο του συντονισμού. Αντίθετα όσο η σταθερά b τείνει προς το μηδέν το φαινόμενο είναι περισσότερο έντονο, ενώ στην οριακή περίπτωση που b = 0 το πλάτος απειρίζεται και το σύστημα καταστρέφεται.

γ. Για οποιαδήποτε τιμή της σταθεράς απόσβεσης, οι καμπύλες συντονισμού τέμνουν τον άξονα του πλάτους στο ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό εκφράζει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας που προκαλεί μια επιπλέον σταθερή δύναμη ίση με F_{max}.

δ. Το μέγιστο πλάτος, στην κατάσταση συντονισμού εξαρτάται από την τιμή της μέγιστης δύναμης, τη σταθερά b, τη μάζα m του ταλαντωτή και τα φυσικά του χαρακτηριστικά.

[Η σχέση από την οποία υπολογίζεται το μέγιστο πλάτος στην κατάσταση συντονισμού, είναι $A_{\max} = \dfrac{F_{\max}}{b \cdot \omega_{\varphi\theta}}$

Όπως όμως είδαμε, για μικρές τιμές της σταθεράς b, είναι $\omega_{\varphi\theta} = \omega_0$, άρα $A_{\max} = \dfrac{F_{\max}}{b \cdot \omega_0} = \dfrac{F_{\max}}{b} \cdot \sqrt{\dfrac{m}{D}}$ *.]*

ε. <u>Θεωρητικά</u>, όταν το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι μέγιστο (συντονισμός πλάτους), η ενέργεια ταλάντωσης δεν είναι μέγιστη. Αυτό είναι προφανές γιατί η ενέργεια δεν εξαρτάται μόνο από το πλάτος αλλά και από τη γωνιακή συχνότητα ω. Μέγιστη ενέργεια (συντονισμός ενέργειας) στην εξαναγκασμένη ταλάντωση έχουμε όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή. *<u>Κατά το συντονισμό ενέργειας, ο ρυθμός (μέση τιμή) με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το διεγέρτη στον ταλαντωτή, είναι μέγιστος.</u>*
Σύμφωνα όμως με τη σχέση 1.22 και εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις, μπορούμε, κατά προσέγγιση, να δεχτούμε ότι οι δύο αυτοί συντονισμοί συμβαίνουν ταυτόχρονα, όταν δηλαδή $\boxed{f_\delta = f_0}$.

Παράδειγμα 1.20. Ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου ενώ ταλαντώνεται ελεύθερα σύμφωνα με την σχέση $x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 30\pi t$ (*cm*) δέχεται την επίδραση περιοδικής εξωτερικής δύναμης της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση $F = F_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 50\pi t$, (t σε *s*) οπότε αποκαθίσταται εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους 4 *cm.*

α. Να βρείτε την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

β. Να βρείτε τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που αποκαταστάθηκε.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις x = f(t), υ = f(t) για την εξαναγκασμένη ταλάντωση.

δ. Να σχεδιάσετε την καμπύλη συντονισμού του συστήματος μάζας-ελατηρίου αν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι 10 *cm.*

<u>Λύση</u>

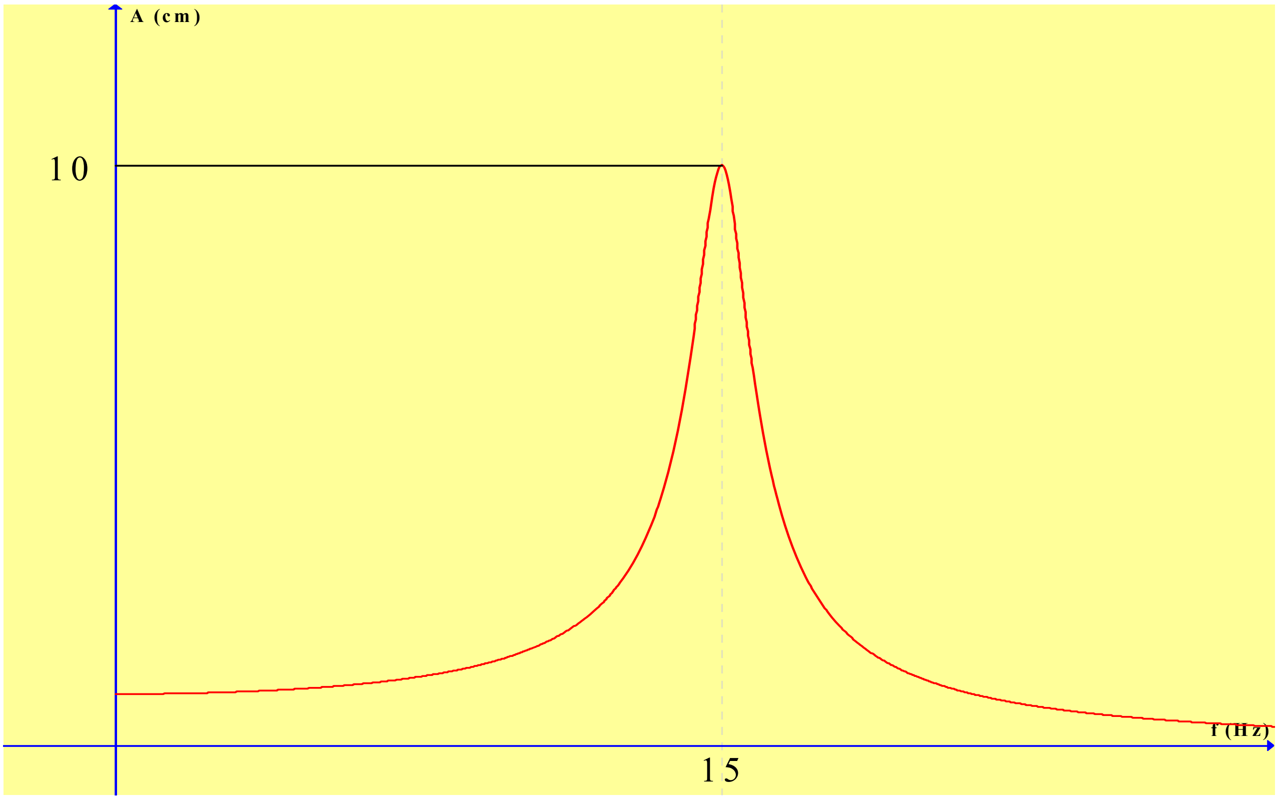
α. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι η συχνότητα της ελεύθερης αμείωτης ταλάντωσης. Είναι $\omega_0 = 30\pi$ *rad/s*, άρα $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{30\pi}{2\pi} \Rightarrow f_0 = 15\,Hz$.

β. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίση πάντα με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης, δηλαδή $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{50\pi}{2\pi} \Rightarrow f = 25\,Hz$.

γ. Είναι $A = 4$ *cm* και $\upsilon_{\max} = 50\pi \cdot 0{,}04$ *m/s* ή $\upsilon_{\max} = 2\pi$ *m/s.*

$x = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(50\pi t\right)$ σε cm και $\upsilon = 2\pi\sigma\upsilon\nu\left(50\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ σε m/s .

δ.



Παράδειγμα 1.21. Ένας αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση σταθερού πλάτους, σε συντονισμό με τη διεγείρουσα δύναμη, και η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας περιγράφεται από την εξίσωση x = 0,2 ημ50t (S.I.). Η δύναμη αντίστασης που ενεργεί στον ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση F = - 10 υ (S.I.). Να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t=\frac{T}{3}$, όπου T η περίοδος της εξωτερικής περιοδικής δύναμης.

β. το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια προσφέρεται από το διεγέρτη στον ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t=\frac{T}{3}$.

Λύση

α. ω = 50 *rad/s* και $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{50}s$. Είναι

$$\upsilon=\omega\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t\right)\Rightarrow\upsilon=\omega\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{3}\right)\Rightarrow\upsilon=50\cdot0,2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\upsilon=10\left(-\frac{1}{2}\right)m/s\Rightarrow\upsilon=-5\,m/s$$

β. Ο ρυθμός με τον οποίο η ενέργεια ταλάντωσης μετατρέπεται σε θερμότητα είναι

$$\frac{dW_{\alpha\nu\tau}}{dt}=\left|F_{\alpha\nu\tau}\right|\cdot\left|\upsilon\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\pi=10\cdot\left|\upsilon\right|\cdot\left|\upsilon\right|\cdot\left(-1\right)\overset{(S.I.)}{=}-10\cdot\upsilon^2=-10\left(-5\right)^2\Rightarrow\frac{dW_{\alpha\nu\tau}}{d\tau}=-250\,J/s\,.$$

Επειδή η ταλάντωση είναι αμείωτη, ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται η ενέργεια από τον ταλαντωτή μέσω του έργου της δύναμης αντίστασης, προσφέρεται με ίδιο ρυθμό από το διεγέρτη. Άρα $\boxed{\frac{dW_F}{dt} = 250\,J/s}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1.121. Αν στον αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$, με b = σταθερό (b > 0), το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση (για Λ > 0)

α. $A = A_0 - bt$ **β.** $A = A_0 e^{\Lambda t}$

γ. $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ **δ.** $A = \frac{A_0}{\Lambda t}$

1.122. Σε αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$. Όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b, η περίοδος της ταλάντωσης

α. αυξάνεται.
β. ελαττώνεται.
γ. μένει σταθερή.
δ. αυξάνεται μέχρι να αποκτήσει ορισμένη τιμή και κατόπιν ελαττώνεται.

1.123. Το πλάτος, προς την ίδια κατεύθυνση, φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Στην εξίσωση αυτή ο χρόνος t παίρνει

α. οποιαδήποτε τιμή.
β. τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T.
γ. μόνο τιμές που είναι άρτια πολλαπλάσια της περιόδου T.
δ. μόνο τιμές που είναι περιττά πολλαπλάσια της περιόδου T.

1.124. Ένα σύστημα ελατηρίου – μάζας ταλαντώνεται μέσα σε δοχείο, στο οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε την πίεση του αέρα. Η σταθερά απόσβεσης της φθίνουσας ταλάντωσης του συστήματος εξαρτάται

α. μόνο από τις ιδιότητες του μέσου.
β. μόνο από το σχήμα του σώματος που ταλαντώνεται.
γ. μόνο από το μέγεθος του σώματος που ταλαντώνεται.
δ. από τις ιδιότητες του μέσου, το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που ταλαντώνεται.

1.125. Σε αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$. Σε χρόνο t_1 το πλάτος μειώνεται από $\frac{A_0}{2}$ σε $\frac{A_0}{4}$ και σε χρόνο t_2 από $\frac{A_0}{6}$ σε $\frac{A_0}{12}$. Η σχέση μεταξύ των χρονικών διαστημάτων t_1 και t_2 είναι

α. $t_1 = t_2$ **β.** $t_1 = \frac{t_2}{2}$ **γ.** $t_1 = 3\,t_2$ **δ.** $t_1 = 4\,t_2$

1.126. Σε αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$. Με την πάροδο του χρόνου

α. το πλάτος μειώνεται και η περίοδος διατηρείται σταθερή.
β. το πλάτος διατηρείται σταθερό και η περίοδος μειώνεται.
γ. το πλάτος και η περίοδος μειώνονται.
δ. το πλάτος και η περίοδος παραμένουν σταθερά.

1.127. Σε αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b_1\upsilon$. Όταν η σταθερά απόσβεσης αυξάνεται από την τιμή b_1 στην τιμή b_2, χωρίς να γίνει μεγάλη, τότε

α. ο ρυθμός μείωσης του πλάτους γίνεται μικρότερος.
β. η περίοδος της ταλάντωσης μειώνεται.
γ. ο ρυθμός μείωσης της (μέσης) ολικής ενέργειας γίνεται μεγαλύτερος.
δ. η κίνηση γίνεται απεριοδική.

1.128. Σε σύστημα μάζας - ελατηρίου εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί δύναμη αντίστασης $F_1 = -b\upsilon$. Αν διπλασιάσουμε το αρχικό πλάτος A_0 της ταλάντωσης

α. η περίοδος της ταλάντωσης δε μεταβάλλεται.
β. η περίοδος της ταλάντωσης θα αυξηθεί.
γ. ο ρυθμός μείωσης του πλάτους δε μεταβάλλεται.
δ. η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα ανά περίοδο θα μειωθεί.

1.129. Σε σύστημα μάζας - ελατηρίου εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργούν δύναμη αντίστασης $F_1 = -b\upsilon$ και περιοδική δύναμη $F = F_{max}\eta\mu 2\pi ft$ με συχνότητα f που μπορεί να μεταβάλλεται. Τότε

α. το σύστημα ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του f_0.
β. το πλάτος ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο της συχνότητας f.
γ. η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι ίση με τη συχνότητα της περιοδικής δύναμης.
δ. όταν αυξάνεται η συχνότητα της περιοδικής δύναμης, το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει πάντοτε.

1.130. Η ιδιοσυχνότητα ενός ταλαντωτή εξαρτάται

α. από το πλάτος της ταλάντωσης.
β. από τη σταθερά απόσβεσης.
γ. από την αρχική φάση.
δ. από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος.

1.131. Συντονισμό ονομάζουμε την κατάσταση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή, στην οποία

α. η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική.
β. η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι διπλάσια από την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.
γ. η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι περίπου ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.
δ. το πλάτος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης.

1.132. Οι μεγάλες τεχνικές κατασκευές (κρεμαστές γέφυρες, καμινάδες κλπ) φτιάχνονται έτσι ώστε

α. να μην κάνουν εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν φυσά άνεμος.
β. να αποφεύγεται το φαινόμενο του συντονισμού.
γ. να απορροφούν από το διεγέρτη (άνεμο) μέγιστα ποσά ενέργειας.
δ. να έχουν σταθερά απόσβεσης ίση με μηδέν.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

1.133. Ελεύθερη ταλάντωση εκτελεί ένας ταλαντωτής όταν του δοθεί μια φορά ενέργεια και κατόπιν αφεθεί ελεύθερος.

1.134. Το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης ενός ταλαντωτή διατηρείται πάντα σταθερό.

1.135. Αν στον αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$, με b > 0, το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.

1.136. Αν στον αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$, (b > 0), τότε η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης διατηρείται σταθερή.

1.137. Αν στον αρμονικό ταλαντωτή εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί και δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$, με μεγάλη σταθερά απόσβεσης, η κίνηση γίνεται απεριοδική.

1.138. Στη φθίνουσα αρμονική ταλάντωση ο ρυθμός με τον οποίο ελαττώνεται το πλάτος δεν εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης.

1.139. Στις κρεμαστές γέφυρες επιδιώκεται η απόσβεση των ταλαντώσεων να είναι ελάχιστη.

1.140. Το πλάτος φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, αν η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής F = – bυ. (Λ, b > 0)

1.141. Στην εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ που δίνει τη μεταβολή του πλάτους φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης με το χρόνο, ο χρόνος t παίρνει οποιαδήποτε θετική τιμή. (Λ > 0)

1.142. Στην εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ που δίνει τη μεταβολή του πλάτους φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης με το χρόνο, ο χρόνος t παίρνει τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T. (Λ >0)

1.143. Εξαναγκασμένη ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση που εκτελεί ένας ταλαντωτής, όταν ενεργεί σ' αυτόν εκτός από τη δύναμη επαναφοράς και μια περιοδική δύναμη.

1.144. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι πάντα ίση με την ιδιοσυχνότητά του.

1.145. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι ίση με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης.

1.146. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αρμονικού ταλαντωτή δεν εξαρτάται από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης.

1.147. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μάζας - ελατηρίου είναι ίση με $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

1.148. Η κατάσταση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή στην οποία η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι διπλάσια από την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, ονομάζεται συντονισμός.

1.149. Η συχνότητα $f_{\varepsilon\xi}$ της διεγείρουσας δύναμης γύρω από την οποία παρουσιάζεται μεγιστοποίηση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αρμονικού ταλαντωτή, διαφέρει λίγο από την ιδιοσυχνότητά του f_0, αν η απόσβεση είναι μικρή.

1.150. Κατά το συντονισμό ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας που προσφέρεται από την εξωτερική διέγερση γίνεται μέγιστος.

1.151. Όταν η απόσβεση είναι πολύ μεγάλη, το φαινόμενο του συντονισμού δεν παρατηρείται ή γίνεται ελάχιστα αντιληπτό.

1.152. Για να διατηρείται σταθερό το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης πρέπει ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα απορροφάει ενέργεια να είναι διπλάσιος του ρυθμού με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα.

1.153. Κατά το συντονισμό όταν η σταθερά απόσβεσης είναι b = 0, το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται θεωρητικά άπειρο.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

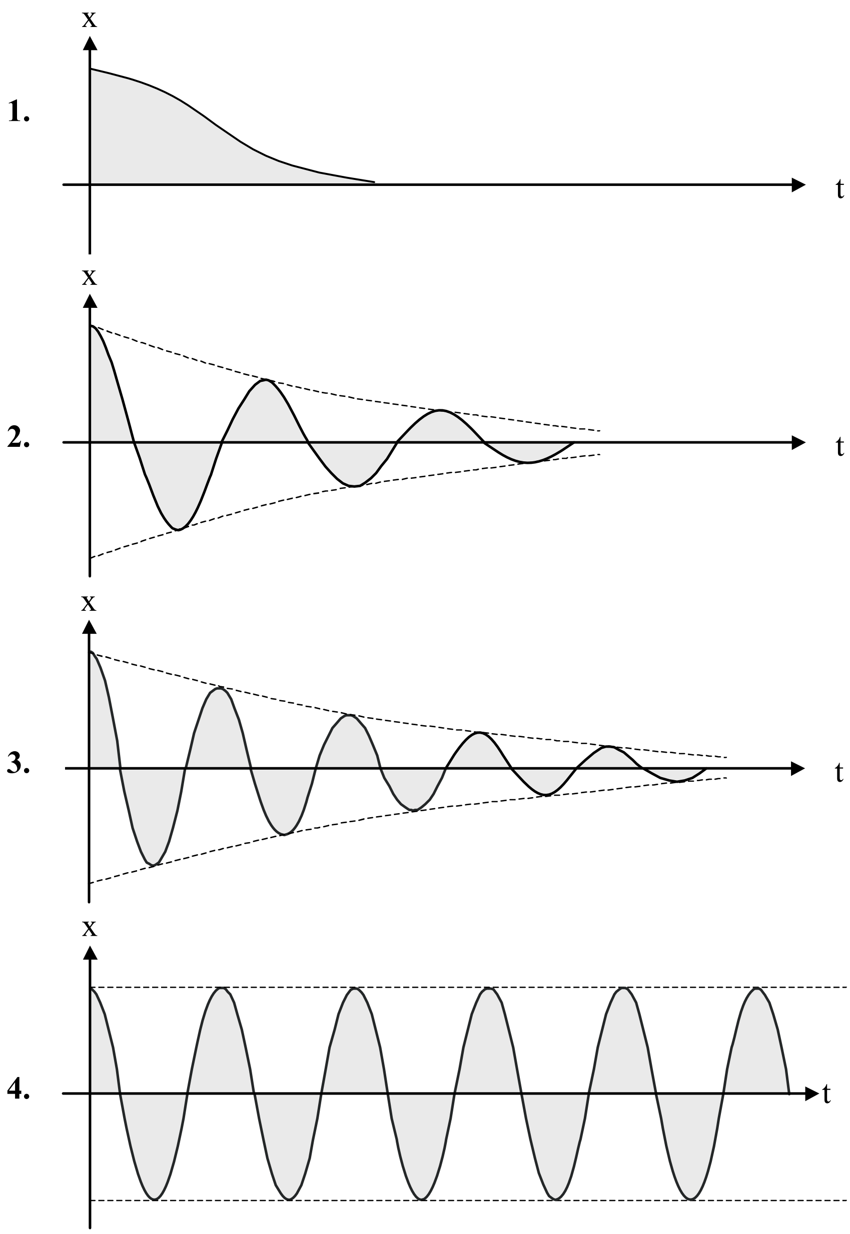
Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και τα κατάλληλα ζεύγη γραμμάτων - αριθμών.

1.154. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τα διαγράμματα της δεξιάς στήλης.

Α. Αμείωτη αρμονική ταλάντωση

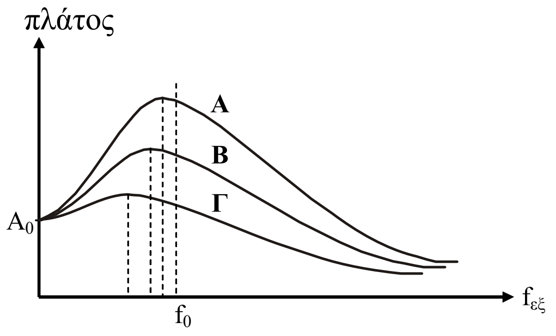
Β. Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με μικρή απόσβεση

Γ. Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με μεσαία απόσβεση



1.155. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση του πλάτους εξαναγκασμένης ταλάντωσης αρμονικού ταλαντωτή σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης.

Να αντιστοιχίσετε στις καμπύλες συντονισμού τις τιμές του συντελεστή απόσβεσης της δεξιάς στήλης.



1. $b_1 = 0$

2. $b_2 = 4 \cdot 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m}$

3. $b_3 = 5 \cdot 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m}$

4. $b_4 = 3 \cdot 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m}$

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

1.156. Ποια ταλάντωση ονομάζεται

α. ελεύθερη;

β. αμείωτη;

γ. φθίνουσα;

1.157.α. Πως μπορούμε πειραματικά να μελετήσουμε τη φθίνουσα αρμονική ταλάντωση;

β. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο την απομάκρυνση x του ταλαντωτή που εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης.

γ. Ποια συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη των παραπάνω καμπυλών;

1.158. Ποιο τεχνικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ρυθμός με τον οποίο φθίνουν οι ταλαντώσεις;

1.159. Να αποδώσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο το πλάτος φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από αυτή τη γραφική παράσταση;

1.160. Να αναφέρετε παραδείγματα μεγεθών που μειώνονται εκθετικά με το χρόνο.

1.161. Τι ονομάζεται χρόνος ημίσειας ζωής ενός μεγέθους που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο; Να βρείτε το χρόνο ημίσειας ζωής κατά τη διάσπαση ραδιενεργών πυρήνων.

1.162.α. Ποια ταλάντωση ονομάζεται εξαναγκασμένη;

β. Τι ονομάζουμε ιδιοσυχνότητα ενός ταλαντωτή; Από τι εξαρτάται; Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μάζας - ελατηρίου;

1.163.α. Πότε ένας ταλαντωτής που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού;

β. Ποια είναι η επίδραση της απόσβεσης στο συντονισμό;

1.164.α. Που οφείλεται η μεγιστοποίηση του πλάτους κατά το συντονισμό;

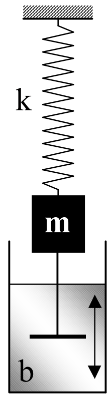
β. Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε από ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού;

1.165.α. Πως μπορούμε πειραματικά να μελετήσουμε την εξαναγκασμένη ταλάντωση του συστήματος μάζας - ελατηρίου;

β. Να παραστήσετε γραφικά το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης. Ποια συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη αυτών των καμπυλών;

1.166. Ένας λόχος στρατιωτών βαδίζει με «βήμα». Όταν πρόκειται να περάσει μια γέφυρα, ο επικεφαλής διατάζει τους στρατιώτες να βαδίσουν ελεύθερα. Γιατί;

1.167. Στον αρμονικό ταλαντωτή του σχήματος εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-kx$, ενεργεί και δύναμη αντίστασης $-b\upsilon$ όπου b η σταθερά απόσβεσης και υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της μάζας m.



Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Για τον ταλαντωτή θα ισχύει η εξίσωση $m\alpha + kx + b\upsilon = 0$.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.

γ. Ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους είναι σταθερός.

δ. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μειωθεί μια ορισμένη τιμή του πλάτους (π.χ. η A_0) στο μισό της είναι σταθερό.

1.168. Ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου Λ θετική σταθερά.

Α. Στο τέλος των 10 πρώτων ταλαντώσεων το πλάτος της ταλάντωσης έχει μειωθεί στο $\frac{1}{4}$ του αρχικού. Μετά από 10 ακόμη ταλαντώσεις το πλάτος θα ισούται με

α. $\frac{A_0}{8}$. **β.** $\frac{A_0}{16}$. **γ.** $\frac{A_0}{32}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Β. Αν E_0 είναι η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης, τότε μετά από τις 10 πρώτες ταλαντώσεις το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση του ταλαντωτή, ισούται με

α. $-\frac{E_0}{8}$. **β.** $+\frac{E_0}{16}$. **γ.** $-\frac{15E_0}{16}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

1.169. Ένα μηχανικό σύστημα εκτελεί αμείωτες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι 30 *Hz* και η εξωτερική περιοδική δύναμη που του ασκείται περιγράφεται από την εξίσωση F = 10 συν40t (S.I.).

Αυξάνουμε την κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης σε 50 *rad/s*.

Α. Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Β. Το πλάτος της ταλάντωσης

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Γ. Η συχνότητα της ταλάντωσης

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

1.170. Σε ταλαντούμενο σύστημα μάζας - ελατηρίου εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-kx$, ενεργούν

i) μια δύναμη αντίστασης – bυ, όπου b η σταθερά απόσβεσης και υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της μάζας m και

ii) περιοδική δύναμη $F = F_{\max}\eta\mu\omega t$ σταθερού πλάτους και μεταβλητής συχνότητας.

Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

α. Για τον ταλαντωτή θα ισχύει η εξίσωση $F_{\max}\eta\mu\omega t - kx - b\upsilon = m\cdot$α.

β. Αν η συχνότητα $f_{\varepsilon\xi}$ της περιοδικής δύναμης F είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή και αρχίσει να αυξάνεται συνεχώς, το πλάτος της ταλάντωσης συνεχώς θα αυξάνεται.

γ. Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι ίση με $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

δ. Όταν είναι $f_{\varepsilon\xi} < f_0$ το σύστημα ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του.

1.171. Ένα σώμα μάζας m εξαρτάται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης σταθερής συχνότητας f, με $f > f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Αν αυξήσουμε τη μάζα του σώματος, χωρίς να αλλάξει η σταθερά απόσβεσης, τότε

Α. η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Β. η συχνότητα της ταλάντωσης

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Γ. το πλάτος της ταλάντωσης

α. αυξάνεται **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** μειώνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

[Δίνεται ότι το πλάτος απομάκρυνσης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση συστήματος μάζας – ελατηρίου, υπό την επίδραση περιοδικής δύναμης γωνιακής συχνότητας ω, δίνεται από τη σχέση: $A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+b^2\omega^2}}$.]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.172. Η περίοδος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης είναι Τ και το πλάτος της ακολουθεί τον εκθετικό νόμο $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου Λ σταθερή ποσότητα.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης, προς την ίδια κατεύθυνση, είναι σταθερός.

β. Μετά από $\mathrm{N}_1 = 18$ πλήρεις ταλαντώσεις, που διαρκούν $t_1 = 13{,}86\,s$, το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $\frac{A_0}{2}$. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης, όταν γίνουν ακόμα $\mathrm{N}_2 = 72$ πλήρεις ταλαντώσεις.

γ. Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς Λ.

Δίνεται $\ell n2 = 0{,}693$ [Απ. (α) $\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T} = \sigma\tau\alpha\theta.$ (β) $\frac{A_0}{32}$ (γ) 0,05 s^{-1}]

1.173. Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης ακολουθεί τον εκθετικό νόμο $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος και Λ σταθερή ποσότητα.

α. Σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης θα γίνει $A = \frac{A_0}{2}$;

β. Αν για κάθε πλήρη ταλάντωση η επί τοις % ελάττωση της ολικής ενέργειας Ε της ταλάντωσης είναι 36%, να βρείτε την επί τοις % μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης. [Απ. (α) $\frac{\ell n2}{\Lambda}$ (β) –20% (ελάττωση)]

1.174. Σε ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή ενεργεί δύναμη αντίστασης F = – bυ, όπου b η σταθερά απόσβεσης. Να αποδείξετε ότι

α. η σταθερά b έχει μονάδες *kg/s*.

β. ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή είναι $\frac{dE}{dt} = -b\upsilon^2$.

1.175. Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης αρμονικού ταλαντωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι E_0.

α. Μετά πόσο χρόνο t_1 η ενέργεια του ταλαντωτή θα γίνει $E_1 = \frac{E_0}{2}$;

β. Πόση είναι η ενέργεια του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t_2 = 3t_1$;

[Απ. (α) $t_1 = \frac{\ell n2}{2\Lambda}$ (β) $\frac{E_0}{8}$]

1.176. Στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 *N/m* είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας m = 1 *kg* το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου κατά A_0 = 0,2 *m* και το αφήνουμε ελεύθερο.

Λόγω τριβών το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται κατά 20% μετά από κάθε πλήρη ταλάντωση.

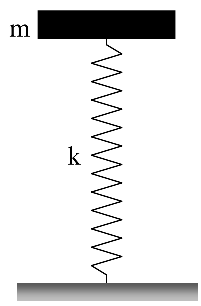
α. Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή;

β. Πόση ενέργεια αφαιρείται από τον ταλαντωτή μέσω του έργου των τριβών στη διάρκεια της πρώτης περιόδου;

γ. Πόση ενέργεια πρέπει να μεταφερθεί στον ταλαντωτή μέσω του έργου εξωτερικής αρμονικής δύναμης σε χρόνο t = 62,8 *s*, ώστε να εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις με συχνότητα f_0; [Απ. (α) $\frac{5}{\pi}Hz$ (β) 0,72 *J* (γ) 72 *J*]

1.177. Η απομάκρυνση σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση x = 0,5ημ20t *(S.I.)*. Αν η δύναμη τριβής που αντιστέκεται στην κίνηση δίνεται από τη σχέση F = -b·υ, όπου b = 10 *kg/s* η σταθερά απόσβεσης, να βρεθεί η ενέργεια που πρέπει να προσφέρεται μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης σε μία περίοδο, έτσι ώστε η ταλάντωση να διατηρείται αμείωτη. [Απ. 157 *J*]

1.178. Το σύστημα μάζα – ελατήριο του διπλανού σχήματος μπορεί να εκτελεί κατακόρυφες ταλαντώσεις. Το ελατήριο έχει σταθερά k = 100π^2 *N/m* και το σώμα μάζα m = 9 *kg*. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και τη χρονική στιγμή t = 0 το αφήνουμε ελεύθερο. Μετά από 30 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται το 1/3 του αρχικού.



Θεωρούμε ότι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος είναι ανάλογη στη στιγμιαία ταχύτητά του και ότι το σύστημα ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του.

α. Να βρείτε το αρχικό πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης του σώματος.

β. Να υπολογίσετε τη σταθερά Λ του συστήματος και να γράψετε πως μεταβάλλεται η μέγιστη απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να γράψετε την εξίσωση που δίνει την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο μετά από 30 πλήρεις ταλαντώσεις.

δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της δύναμης αντίστασης στη διάρκεια της 31^{ης} ταλάντωσης, αν ισχύει ότι Λ = b/2m.

ε. Να υπολογίσετε την ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε στο σύστημα ανά περίοδο ώστε η ταλάντωση να διατηρείται αμείωτη με πλάτος ίσο με το αρχικό.

Να θεωρήσετε ότι κατά τη διάρκεια μιας περιόδου το πλάτος διατηρείται σταθερό και ίσο με την τιμή που είχε στην αρχή της περιόδου.

Δίνονται: g = 10 *m/s^2* και π^2 = 10.

[Απ. α. 9 cm, β. $\Lambda = \frac{\ell n3}{18}s^{-1},\ A = 9e^{-\frac{\ell n3}{18}t}\ cm$, γ. $y = 3\eta\mu\frac{10\pi}{3}t\ \left(y\ \sigma\varepsilon\ cm,\ t\ \sigma\varepsilon\ s\right)$

δ. 10π *cm/s*, 0,1π ℓn3 *N*, ε. 0,27 ℓn3 *J*]

1.4. Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

➢ <u>Εισαγωγικές έννοιες (από τη φυσική της Β΄ Λυκείου)</u>

<u>Ο επίπεδος Πυκνωτής</u>

Ονομάζεται το σύστημα που αποτελείται από 2 παράλληλες επίπεδες μεταλλικές πλάκες, που λέγονται **οπλισμοί**.

Στον φορτισμένο πυκνωτή οι δύο οπλισμοί του είναι αντίθετα φορτισμένοι (+Q, -Q)

<u>Χωρητικότητα C</u> ενός πυκνωτή ονομάζουμε το σταθερό πηλίκο του φορτίου που φέρει ο θετικά φορτισμένος οπλισμός, προς τη διαφορά δυναμικού (τάση) V μεταξύ των οπλισμών του.

$$\boxed{C=\frac{Q}{V}} \qquad (1.23)$$

Μονάδα χωρητικότητας στο S.I είναι το $1\,farad=1\dfrac{coulomb}{volt}$: 1 *F* = 1 *C/V*.

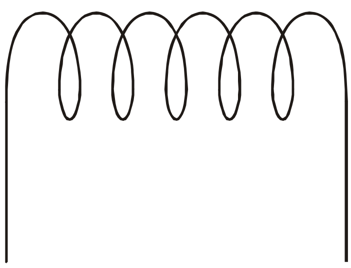
Υποπολλαπλάσια της μονάδας farad είναι το 1 mF = 10^{-3} *F*, το 1 *μF* = 10^{-6} *F*, το 1 *nF* = 10^{-9} *F* κλπ.

Ειδικά στον επίπεδο πυκνωτή η χωρητικότητα δίνεται και από τη σχέση: $\boxed{C=\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{A}{\ell}}$, όπου ε είναι η (σχετική) διηλεκτρική σταθερά του μονωτή που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών του, $\left[\varepsilon=\dfrac{C}{C_0},\quad(\varepsilon\geq 1)\right]$, ε_0 είναι η (απόλυτη) διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k_{\eta\lambda}}=8{,}825\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$, A είναι το εμβαδό του ενός οπλισμού του και ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του.

Στο χώρο μεταξύ των οπλισμών ενός φορτισμένου επίπεδου πυκνωτή δημιουργείται ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, του οποίου η ένταση δίνεται από τη σχέση $\boxed{E=\dfrac{V}{\ell}}$.

Ο φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη ενέργεια στο ηλεκτρικό του πεδίο που δίνεται από τις τρεις ισοδύναμες σχέσεις: $\boxed{U_E=\dfrac{1}{2}|Q|V,\quad U_E=\dfrac{1}{2}CV^2\quad U_E=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}}$.

<u>Το σωληνοειδές (πηνίο)</u>



Όταν το σωληνοειδές διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης Ι, στο εσωτερικό του δημιουργείται ομογενές μαγνητικό πεδίο, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση: $\boxed{B=\mu\mu_0 I\dfrac{N}{\ell}}$, όπου μ είναι η (σχετική) μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα, $\mu=\dfrac{B}{B_0}$, $\mu>0$, μ_0 είναι η (απόλυτη) μαγνητική διαπερατότητα του κενού $\left[\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\,\dfrac{N}{A^2}\right]$, N είναι ο αριθμός των σπειρών του και ℓ το μήκος του. Το N/ℓ εκφράζει τον αριθμό των σπειρών του σωληνοειδούς ανά μονάδα μήκους του, $n=\dfrac{N}{\ell}$.

Όταν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του σωληνοειδούς μεταβάλλεται, στο κύκλωμα επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη (Η.Ε.Δ.) που δίνεται από το νόμο της αυτεπαγωγής: $E_{αυτ} = -L\dfrac{di}{dt}$, όπου di/dt είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος και L ένας σταθερός συντελεστής αναλογίας, που ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής ή αυτεπαγωγή, και εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία του σωληνοειδούς και από τη μαγνητική διαπερατότητα μ του πυρήνα. Ισχύει $L = \mu\mu_0\dfrac{N^2A}{\ell}$, όπου Α το εμβαδό της μίας σπείρας του σωληνοειδούς.

Στο ρευματοφόρο σωληνοειδές υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια στο μαγνητικό του πεδίο, που υπολογίζεται από τη σχέση: $U_B = \dfrac{1}{2}L\cdot I^2$.

✓ Κύκλωμα αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων

Το κύκλωμα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από έναν επίπεδο πυκνωτή χωρητικότητας C και ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L. (Το ιδανικό πηνίο δεν παρουσιάζει αντίσταση) Οι αγωγοί σύνδεσης των οπλισμών του πυκνωτή με το πηνίο δεν παρουσιάζουν αντίσταση. Επίσης θεωρούμε αμελητέα την ενέργεια που εκπέμπεται λόγω ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Φορτίζουμε τον πυκνωτή, συνδέοντας τους οπλισμούς του μέσω αντιστάτη, με τους πόλους ηλεκτρικής πηγής με τη βοήθεια του μεταγωγού μ, ο οποίος παραμένει στη θέση 1 για ικανό χρόνο ώστε ο πυκνωτής να φορτιστεί με τάση V = $\mathcal{E}$ και φορτίο Q = C$\mathcal{E}$.

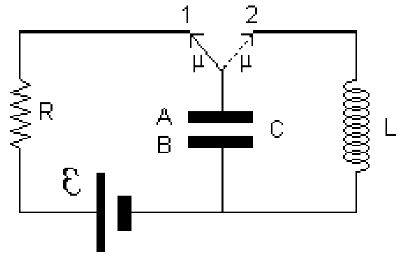
Τη χρονική στιγμή t = 0 φέρνουμε το μεταγωγό στη θέση 2. Τη στιγμή αυτή ο οπλισμός Α του πυκνωτή έχει μέγιστο θετικό φορτίο Q και στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή έχει αποθηκευτεί ηλεκτρική ενέργεια $\boxed{U_{E,\max} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}}$ (1.24)

Τη στιγμή αυτή, το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα.

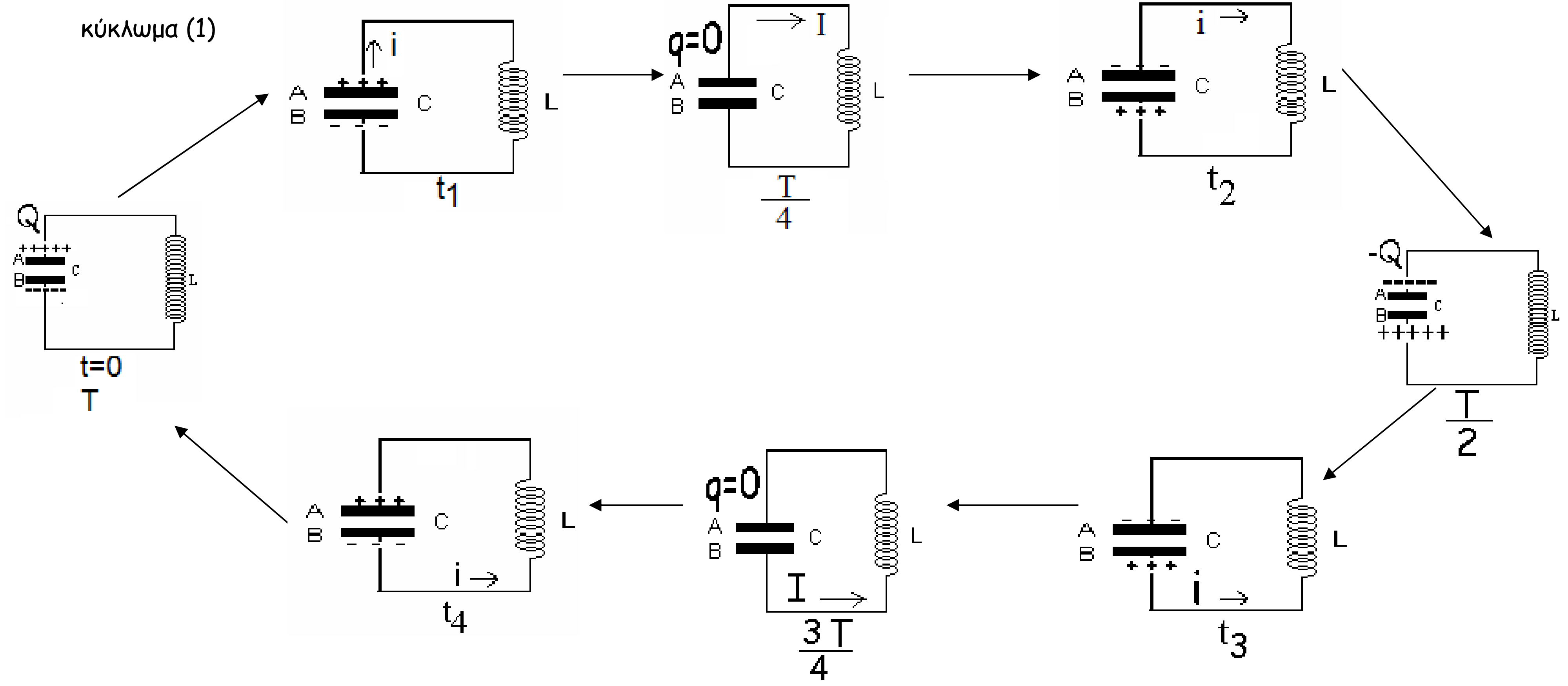
Ο πυκνωτής θα αρχίζει να εκφορτίζεται και το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα. Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στον πυκνωτή θα μεταφέρεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου εξ αιτίας του ηλεκτρικού ρεύματος. Μέχρι να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος θα αυξάνει και θα πάρει τη μέγιστη τιμή της Ι όταν όλη η ενέργεια του πυκνωτή μεταφερθεί στο πηνίο, τη χρονική στιγμή t = T/4. Η ενέργεια στο πηνίο τη χρονική στιγμή αυτή είναι $\boxed{U_{B,\max} = \dfrac{1}{2}L\cdot I^2}$ (1.25)

Το ρεύμα εξ αιτίας του φαινομένου της αυτεπαγωγής δε μηδενίζεται αμέσως μετά την εκφόρτιση του πυκνωτή. Το κύκλωμα συνεχίζει να διαρρέεται από ρεύμα με ίδια φορά μέχρι όλη η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου να μεταφερθεί στον πυκνωτή, τη χρονική στιγμή T/2. Τη στιγμή αυτή ο πυκνωτής φορτίζεται πλήρως με αντίθετη όμως πολικότητα, και το ρεύμα στο κύκλωμα μηδενίζεται. Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται αντίστροφα, μέχρι τη χρονική στιγμή Τ που ο πυκνωτής επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η διαδικασία σε κάθε κύκλο.



κύκλωμα (1)



Συμβολίζουμε με $υ_C$ τη στιγμιαία τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή ($υ_C = υ_A - υ_B$) και με $υ_L$ τη στιγμιαία τάση λόγω αυτεπαγωγής στο πηνίο. Ισχύει ότι $υ_C = υ_L$ άρα $\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$

(1.26)

Η λύση της εξίσωσης 1.26 με τις αρχικές συνθήκες που περιγράψαμε παραπάνω είναι η

$$q = Q \cdot συν(\omega \cdot t) \quad (1.27)$$

> Στη σχέση αυτή το q παριστάνει την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος.

Έτσι αν ο οπλισμός αυτός είναι θετικά φορτισμένος τότε q > 0, διαφορετικά q < 0.

Η ένταση i του ηλεκτρικού ρεύματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση ορισμού της $i = \frac{dq}{dt}$. Αντικαθιστούμε την 1.27 και με τη βοήθεια της παραγώγου βρίσκουμε ότι

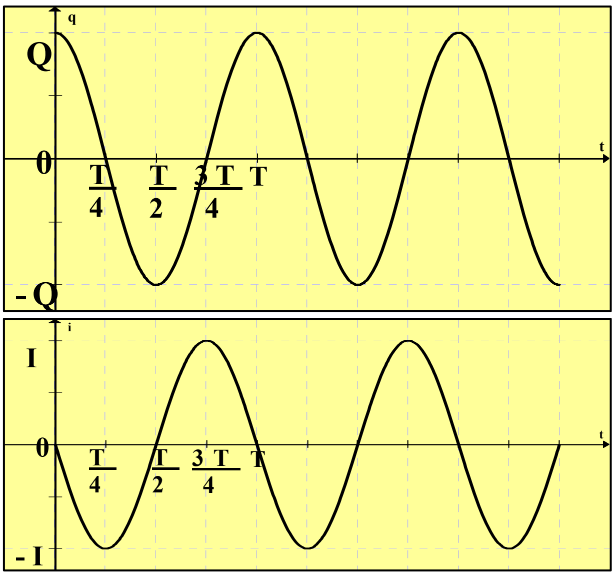
$$i = -\omega \cdot Q \cdot ημ(\omega \cdot t) \quad (1.28)$$

> Αν η αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος (οπλισμός Α), αυξάνεται τότε θεωρούμε i > 0, διαφορετικά είναι i < 0.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος είναι

$$I = \omega Q \quad (1.29)$$

Αν τη χρονική στιγμή t = 0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και όλη η ενέργεια του κυκλώματος είναι αποθηκευμένη στο πηνίο, τότε το πηνίο διαρρέεται από μέγιστο ρεύμα, ο οπλισμός του πυκνωτή προς τον οποίο κατευθύνεται το ρεύμα θα αποκτήσει 1ος θετικό φορτίο και το i είναι θετικό



Γραφικές παραστάσεις της μεταβολής της αλγεβρικής τιμής του φορτίου του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή ήταν θετικά φορτισμένος, και της αλγεβρικής τιμής της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο. (Εξισώσεις 1.27 και 1.28)

Η ενέργεια του ιδανικού κυκλώματος L – C είναι χρονικά σταθερή και είναι ίση με τη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή ή τη μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο. Ισχύει $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \text{ ή } E = \frac{1}{2}LI^2}$

Επειδή δεν παρατηρούνται απώλειες στην ενέργεια είναι $U_{E,max} = U_{B,max}$, άρα

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{(1.29)} \frac{Q^2}{C} = L\omega^2 Q^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad (1.30)$$

Από την 1.30 μπορούμε να υπολογίσουμε και την περίοδο των ηλεκτρικών ταλαντώσεων

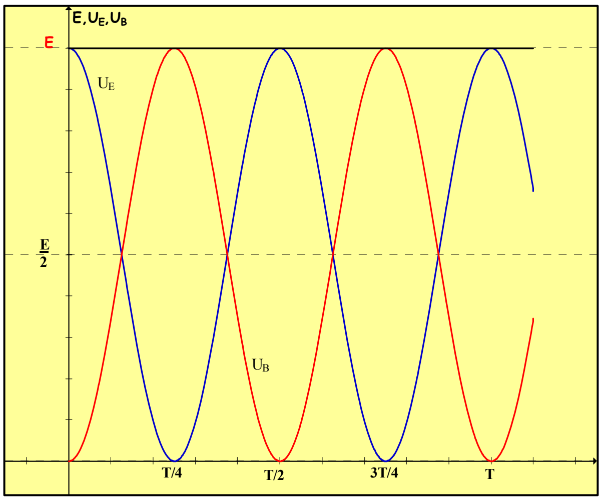
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad (1.31)$$

- Κάθε στιγμή η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και του μαγνητικού πεδίου του πηνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε το άθροισμά τους $U_E + U_B$ να είναι σταθερό.

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \xrightarrow{1.27} U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t}{C} \Rightarrow \boxed{U_E = E\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t} \qquad (1.32)$$

$$U_B\frac{1}{2}Li^2 \xrightarrow[1.29]{1.28} U_B = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t \Rightarrow \boxed{U_B = E\cdot\eta\mu^2\omega t} \qquad (1.33)$$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση των ενεργειών σε ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων.



<u>Παρατήρηση</u>: Η εξίσωση 1.28 για την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος γράφεται και στη μορφή $i = I\cdot\eta\mu(\omega t + \pi)$, ενώ η εξίσωση 1.27 για την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή γράφεται στη μορφή $q = Q\cdot\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Η διαφορά φάσης

$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_q$ μεταξύ έντασης και φορτίου είναι $\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}}$, δηλαδή η ένταση προηγείται του φορτίου κατά π/2.

ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Ηλεκτρικού φορτίου: Από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι
$$\frac{dq}{dt} = i$$

2. Έντασης ηλεκτρικού ρεύματος: Από την εξίσωση 1.26: $\frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC}$ ή $\frac{di}{dt} = -\omega^2 q$.

3. Τάσης $\upsilon_C = \upsilon_A - \upsilon_B$: Από τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή έχουμε
$$C = \frac{q}{\upsilon_C} \Rightarrow \upsilon_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{i}{C}.$$

4. Τάσης αυτεπαγωγής: Είναι $\upsilon_L = \upsilon_C$. Συνεπώς $\frac{d\upsilon_L}{dt} = \frac{d\upsilon_C}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon_L}{dt} = \frac{i}{C}$.

5. Ενέργειας: Είναι E = σταθ. Άρα $\frac{dE}{dt} = 0$.

6. Ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου: Είναι $U_E = \frac{1}{2C}q^2 \rightarrow \frac{dU_E}{dt} = \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dU_E}{dt} = \frac{q}{C}i \Rightarrow$
$$\frac{dU_E}{dt} = \upsilon_C \cdot i = P_E$$

7. Ενέργειας μαγνητικού πεδίου: Είναι
$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_E}{dt} + \frac{dU_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\upsilon_C \cdot i \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\upsilon_L \cdot i = P_B$$

Παράδειγμα 1.22. Ένα ιδανικό κύκλωμα L – C αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 60 *mH* και πυκνωτή με χωρητικότητα 2 *μF* και διακόπτη. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοιχτός και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε τάση 300 *V*. Τη χρονική στιγμή t = 0 κλείνουμε το διακόπτη.

α. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πηνίο και να γράψετε την εξίσωσή της σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η αρχική ενέργεια του πυκνωτή έχει υποτετραπλασιαστεί για πρώτη φορά, να βρείτε

1. την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
2. την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.
3. το ρυθμό μεταβολής της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Λύση

α. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \overset{(S.I.)}{=} \frac{1}{\sqrt{60\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{12\cdot10^{-8}}} = \frac{10^4}{2\sqrt{3}} rad/s \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}\cdot10^4}{6} rad/s$

$$I = \omega Q \overset{(S.I.)}{=} \frac{\sqrt{3}\cdot10^4}{6}6\cdot10^{-4} \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{3}\ A}$$

(Ή διαφορετικά, από Α.Δ.Ε. $U_{E,\max}=U_{B,\max} \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow I=V_C\sqrt{\frac{C}{L}} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} I=\sqrt{3}\,A$*).*

Με αντικατάσταση στην 1.28: $\boxed{i=-\sqrt{3}\cdot \eta\mu\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 10^4}{6}\cdot t\right)\ (S.I.)}$

β. 1. Είναι $U_E=\frac{1}{4}U_{E,\max}$. Όμως $U_E + U_B = E = U_{E,max}$

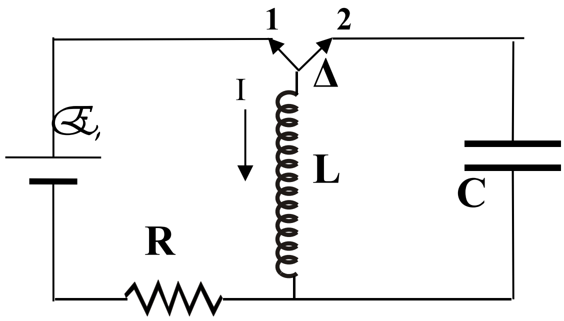
$$\Rightarrow \frac{1}{4}U_{E,\max}+U_B=U_{E,\max} \Rightarrow U_B=\frac{3}{4}U_{E,\max} \Rightarrow \frac{1}{2}Li^2=\frac{3}{4}\frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow i=\pm\frac{V_C}{2}\sqrt{\frac{3C}{L}} \Rightarrow i=\pm 1,5\,A.$$

Την πρώτη φορά, μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, που υποτετραπλασιάζεται η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, είναι $q > 0$ και $i < 0$. Άρα $\boxed{i = -1,5\ A}$.

2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα $U_B=\frac{1}{2}Li^2 \overset{(S.I.)}{=} \frac{1}{2}60\cdot 10^{-3}\cdot(1,5)^2\ J \Rightarrow \boxed{U_B=0,0675\,J}$.

3. Είναι $\frac{d\upsilon_C}{dt}=\frac{i}{C} \Rightarrow \frac{d\upsilon_C}{dt}=\frac{-1,5}{2\cdot 10^{-6}}V/s \Rightarrow \boxed{\frac{d\upsilon_C}{dt}=-7,5\cdot 10^5\ V/s}$

Παράδειγμα 1.23. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος η πηγή έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη 18 *V*, ο αντιστάτης έχει αντίσταση 6 *Ω* και το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής 4 *mH*. Ο μεταγωγός Δ βρίσκεται στη θέση 1 και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης, ενώ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος.



Α. Να υπολογίσετε την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

Β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο μεταγωγός μεταφέρεται ακαριαία στη θέση 2, χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας.

i. Να προσδιορίσετε τον οπλισμό του πυκνωτή ο οποίος θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο.

ii. Να υπολογίσετε την ελάχιστη χωρητικότητα που πρέπει να έχει ο πυκνωτής, ώστε η τάση στους οπλισμούς του να μη ξεπεράσει τα 6 *V*.

iii. Για την ελάχιστη τιμή της χωρητικότητας που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, να γράψετε την εξίσωση της αλγεβρικής τιμής του φορτίου του οπλισμού, ο οποίος αποκτά πρώτος θετικό φορτίο και της έντασης του ρεύματος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

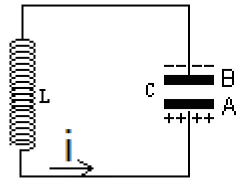
Α. Με το μεταγωγό στη θέση 1 για αρκετό χρόνο, το ρεύμα στο κύκλωμα της πηγής έχει σταθερή ένταση, η οποία υπολογίζεται από το νόμο του Ohm: $I=\frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I=\frac{18V}{6\Omega} \Rightarrow I=3\,A$.

Η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου δίνεται από τη σχέση: $U_B = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow$

$U_B = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-3}\,H\cdot(3\,A)^2 \Rightarrow \boxed{U_B = 18\cdot 10^{-3}\,J}$

Β.

i. Όταν ο μεταγωγός μεταφερθεί στη θέση 2, το ρεύμα στο πηνίο δε μηδενίζεται. Στο κύκλωμα, εξ αιτίας της ύπαρξης του πηνίου, δημιουργείται επαγωγική ΗΕΔ, η οποία διατηρεί το ρεύμα στο κύκλωμα, με την ίδια φορά. Το αποτέλεσμα της διατήρησης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι η φόρτιση του πυκνωτή όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ii. Το κύκλωμα L – C θα εκτελέσει αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η ενέργεια στο κύκλωμα διατηρείται, συνεπώς $U_{B,\max} = U_{E,\max} \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow V_C^2 = \frac{LI^2}{C}$ (1.23.1)

Αν συμβολίσουμε με V_0 = 6 *V* τη μέγιστη τιμή της τάσης που δε θέλουμε να ξεπεράσουμε, πρέπει $V_C^2 \le V_0^2 \overset{1.23.1}{\Rightarrow} \frac{LI^2}{C} \le V_0^2 \Rightarrow C \ge \frac{LI^2}{V_0^2} \Rightarrow C \ge \frac{4\cdot 10^{-3}\cdot 9}{36}F \Rightarrow C \ge 10^{-3}\,F \Rightarrow \boxed{C_{\min} = 10^{-3}\,F}$

iii. Τη χρονική στιγμή t = 0, ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το πηνίο διαρρέεται από μέγιστο ρεύμα. Η αλγεβρική τιμή του φορτίου στον οπλισμό A του πυκνωτή αυξάνεται, άρα $\frac{dq}{dt} > 0 \Rightarrow i > 0$. Επομένως για t = 0 είναι q = 0 και i >0. Θεωρούμε τις εξισώσεις για το ηλεκτρικό φορτίο και το ρεύμα στη μορφή $\begin{matrix} q = Q\eta\mu(\omega\cdot t + \varphi_0) \\ i = I\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot t + \varphi_0) \end{matrix}$ όπου

$Q = C_{\min}V_0 = 6\cdot 10^{-3}\,C$ και $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_{\min}}} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}}}rad/s \Rightarrow \omega = 500\,rad/s$

Υπολογίζουμε την αρχική φάση φ₀.

Για t = 0: $\left.\begin{matrix} Q\eta\mu\varphi_0 = 0 \\ I\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left.\begin{matrix} \eta\mu\varphi_0 = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \varphi_0 = 0$.Επομένως οι εξισώσεις γράφονται:

$$\boxed{\begin{matrix} q = 6\cdot 10^{-3}\eta\mu 500t \\ i = 3\sigma\upsilon\nu 500t \end{matrix}\,(S.I.)}.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1.179. Κύκλωμα ιδανικού πηνίου-πυκνωτή εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο Τ. Αν μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή εισάγουμε διηλεκτρικό με (σχετική) διηλεκτρική σταθερά ε = 4, η περίοδος των ταλαντώσεων
α. θα τετραπλασιαστεί.
β. θα διπλασιαστεί.
γ. θα παραμείνει αμετάβλητη.
δ. θα υποδιπλασιαστεί.

1.180. Κύκλωμα L-C εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Ο χρόνος μιας πλήρους εκφόρτισης του πυκνωτή μεγαλώνει αν
α. μεγαλώσουμε το μέγιστο φορτίο Q του πυκνωτή.
β. μικρύνουμε το μέγιστο φορτίο Q του πυκνωτή.
γ. τοποθετήσουμε πυρήνα από σιδηρομαγνητικό υλικό στο εσωτερικό του πηνίου.
δ. αντικαταστήσουμε τον πυκνωτή με άλλον μικρότερης χωρητικότητας.

1.181. Κύκλωμα L-C εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $i = I\sigma\upsilon\nu\omega t$. Η ενέργεια του πυκνωτή
α. τη χρονική στιγμή t = 0 είναι ίση με την ολική ενέργεια του κυκλώματος.
β. είναι κάθε στιγμή μεγαλύτερη από την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.
γ. είναι κάθε στιγμή μικρότερη από την ενέργεια του κυκλώματος.
δ. δίνεται από τη σχέση $U_E = E \cdot \eta\mu^2\omega t$.

1.182. Όταν ο πυκνωτής ενός ιδανικού κυκλώματος L – C φορτίζεται από πηγή τάσης V, το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με μέγιστο ρεύμα Ι. Όταν ο πυκνωτής του ίδιου κυκλώματος φορτίζεται από τάση 2V, το κύκλωμα θα εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστο ρεύμα
α. $\frac{I}{2}$ **β.** Ι. **γ.** 2 Ι **δ.** 4 Ι.

1.183. Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης ενός ιδανικού κυκλώματος L – C θα διπλασιαστεί αν
α. διπλασιαστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.
β. διπλασιαστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.
γ. υποτετραπλασιαστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.
δ. διπλασιαστούν ταυτόχρονα η χωρητικότητα του πυκνωτή και ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.

1.184. Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από επίπεδο πυκνωτή και ιδανικό πηνίο. Διατηρούμε σταθερή τη μέγιστη τιμή της τάσης μεταξύ των οπλισμών του και διπλασιάζουμε την απόστασή τους.

α. Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή θα υποδιπλασιαστεί.

β. Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα υποδιπλασιαστεί.

γ. Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα διπλασιαστεί.

δ. Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων δε θα μεταβληθεί.

1.185. Σε ιδανικό κύκλωμα L – C ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q. Τη χρονική στιγμή t =0 κλείνουμε το διακόπτη. Για πρώτη φορά, μετά τη χρονική στιγμή t = 0, το φορτίο του πυκνωτή θα μηδενιστεί τη χρονική στιγμή

α. $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ **β.** $2\pi\sqrt{LC}$ **γ.** $\pi\sqrt{LC}$ **δ.** $\sqrt{LC}$.

1.186. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα L – C που εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις,

α. το φορτίο q ενός οπλισμού του πυκνωτή μηδενίζεται τέσσερις φορές σε κάθε περίοδο.

β. η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου γίνεται μέγιστη μία φορά σε κάθε περίοδο.

γ. το φορτίο q ενός οπλισμού του πυκνωτή μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό ή μηδέν.

δ. η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

1.187. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα L – C που εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις, τη στιγμή που το φορτίο ενός οπλισμού του πυκνωτή είναι το 1/3 του μέγιστου φορτίου του, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι

α. το 1/3 της ενέργειας ταλάντωσης.

β. τα 2/3 της ενέργειας ταλάντωσης.

γ. το 1/9 της ενέργειας ταλάντωσης.

δ. τα 8/9 της ενέργειας ταλάντωσης.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

1.188. Η ιδιοσυχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων που εκτελεί ιδανικό κύκλωμα πηνίου – πυκνωτή είναι αντίστροφα ανάλογη στον αριθμό των σπειρών του πηνίου.

1.189. Η εισαγωγή πυρήνα από σιδηρομαγνητικό υλικό στο εσωτερικό του πηνίου ενός ιδανικού κυκλώματος L – C, που εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συχνότητας ταλάντωσής του.

1.190. Θετική θεωρείται η φορά της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος όταν αναφερόμαστε στον οπλισμό που είναι αρνητικά φορτισμένος και το φορτίο του αυξάνεται αλγεβρικά.

1.191. Ιδανικό κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις και το φορτίο ενός οπλισμού του περιγράφεται από την εξίσωση q = Q συνωt.

α. Η ενέργεια του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μηδενίζονται τέσσερις φορές στο χρονικό διάστημα (0,T].

β. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται τέσσερις φορές ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο χρονικό διάστημα (0,T).

γ. Ο ελάχιστος χρόνος για να μεταβληθεί κατά 2Q το φορτίο ενός οπλισμού του πυκνωτή είναι T/2.

δ. Ο ελάχιστος χρόνος για να μηδενιστεί δύο φορές η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι T/4.

ε. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει το φορτίο ενός οπλισμού του πυκνωτή από μέγιστο μηδέν εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.

στ. Το πηνίο δε διαρρέεται από ρεύμα τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η ηλεκτρική ενέργεια στον πυκνωτή είναι μέγιστη.

ζ. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι $-I \le i \le I$. Συνεπώς η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μπορεί να πάρει τιμές $-\frac{1}{2}LI^2 \le U_B \le \frac{1}{2}LI^2$.

1.192. Ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L – C εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις. Στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο πυκνωτής εκφορτίζεται

α. το φορτίο του πυκνωτή αυξάνεται και η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα μειώνεται.

β. το άθροισμα της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή και ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι σταθερό.

γ. το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μειώνεται και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο αυξάνεται.

δ. η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μειώνεται και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο αυξάνεται.

1.193. Σε ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων με (ολική) ενέργεια E, το φορτίο ενός οπλισμού του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $q = Q\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t$.

α. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου μετατρέπεται σε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα.

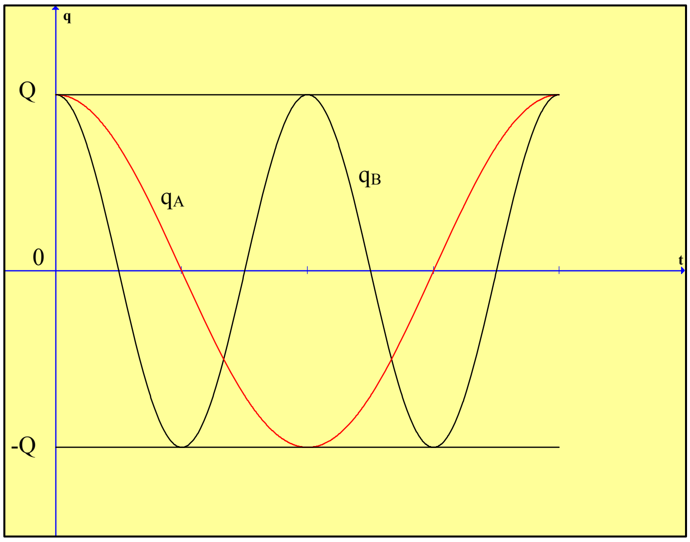
β. Όταν η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι μέγιστη, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με E.

γ. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{2\pi}{T}Q$.

δ. Όταν το φορτίο του οπλισμού είναι $q = \frac{Q}{2}$, τότε η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι τριπλάσια από την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

1.194. Στο σχήμα φαίνεται ο τρόπος που μεταβάλλεται η αλγεβρική τιμή του φορτίου ενός οπλισμού για δύο πυκνωτές, σε δύο ιδανικά κυκλώματα L – C, σε συνάρτηση με το χρόνο. Οι πυκνωτές και στα δύο κυκλώματα Α και Β, έχουν ίσες χωρητικότητες.



α. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις στα δύο κυκλώματα γίνονται με ίσες κυκλικές συχνότητες.

β. Στα δύο κυκλώματα τα πηνία έχουν ίσους συντελεστές αυτεπαγωγής.

γ. Η ενέργεια ταλάντωσης στα δύο κυκλώματα έχει την ίδια τιμή.

δ. Ο λόγος των μέγιστων τιμών των εντάσεων των ρευμάτων είναι $\frac{I_A}{I_B}=\frac{1}{2}$.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.195. Αν η μέγιστη τιμή του φορτίου στον πυκνωτή ενός ιδανικού κυκλώματος L – C διπλασιαστεί, πως θα μεταβληθούν

α. η περίοδος των ταλαντώσεων του κυκλώματος;

β. η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα;

γ. η ενέργεια του κυκλώματος;

1.196. Ένα ιδανικό κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

α. Τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης έντασης, ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το φορτίο σε έναν οπλισμό του πυκνωτή είναι ίσος με μηδέν.

β. Ο ρυθμός με τον οποίο χάνει ενέργεια ο πυκνωτής είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

γ. Αν η χωρητικότητα του πυκνωτή γίνει εννέα φορές μικρότερη, η γωνιακή συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος θα γίνει τρεις φορές μικρότερη.

δ. Αν στο πηνίο εισαχθεί πυρήνας με μαγνητική διαπερατότητα 100, η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος θα υποδεκαπλασιαστεί.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.197. Ένα ιδανικό κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις και η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

i = - συν100t (i σε *mA*, t σε *s*).

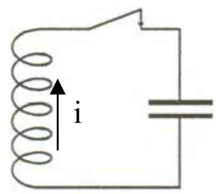
α. Η εξίσωση που περιγράφει την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος αποκτά πρώτος θετικό φορτίο είναι q = -10 ημ100t (q σε *μC*, t σε *s*).

β. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από την εξίσωση U_B = A ημ^{2}100t, όπου A θετική σταθερά.

γ. Για το λόγο $\frac{U_B}{U_E}$ της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο προς την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, ισχύει $\frac{U_B}{U_E} = \left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1$.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.198. Κάποια χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος έχει τη φορά που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και η τιμή της μειώνεται.



α. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή θα αυξάνεται.

β. Τη χρονική στιγμή t_1, το ρεύμα κατευθύνεται προς τον θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή.

Με ποιο ή ποια από τα παραπάνω συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.199. Σε ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων, να αποδείξετε ότι η στιγμιαία τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και το φορτίο q ενός οπλισμού του πυκνωτή συνδέονται με τη σχέση: $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$, όπου Q το μέγιστο φορτίο του οπλισμού και ω η γωνιακή συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

1.200. Για να διπλασιάσουμε τη συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων ενός ιδανικού κυκλώματος L – C, μεταβάλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή, διατηρώντας σταθερή την τάση στα άκρα του καθώς και το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος θα

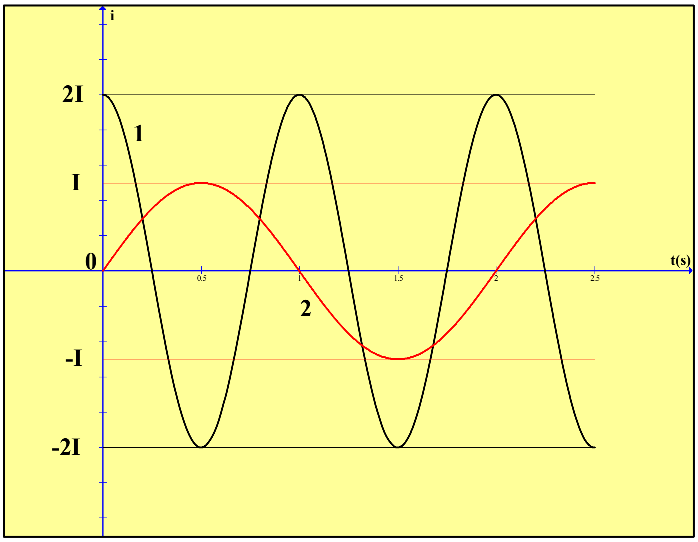
α. διπλασιαστεί.

β. θα υποδιπλασιαστεί.

γ. δε θα μεταβληθεί.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

1.201. Οι καμπύλες 1 και 2 στο διπλανό σχήμα δείχνουν τη μεταβολή της έντασης του ρεύματος σε δύο ιδανικά κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων σε συνάρτηση με το χρόνο. Στα δύο κυκλώματα οι πυκνωτές έχουν την ίδια μέγιστη τιμή της τάσης μεταξύ των οπλισμών τους.



Α. Για το λόγο των χωρητικοτήτων των δύο πυκνωτών, ισχύει:

i. $\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{2}$

ii. $\frac{C_1}{C_2}=1$

iii. $\frac{C_1}{C_2}=2$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να τη δικαιολογήσετε.

Β. Για το λόγο των συντελεστών αυτεπαγωγής των δύο πηνίων, ισχύει:

i. $\frac{L_1}{L_2}=\frac{1}{2}$ ii. $\frac{L_1}{L_2}=1$ iii. $\frac{L_1}{L_2}=\frac{1}{4}$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να τη δικαιολογήσετε.

Γ. Για το λόγο των ολικών ενεργειών των δύο κυκλωμάτων, ισχύει:

i. $\frac{E_1}{E_2}=2$ ii. $\frac{E_1}{E_2}=1$ iii. $\frac{E_1}{E_2}=4$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να τη δικαιολογήσετε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

1.202. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C και φορτίου Q συνδέεται μέσω διακόπτη με ιδανικό πηνίο, που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L. Αν τη χρονική στιγμή t=0 κλείσουμε το διακόπτη, να υπολογίσετε:

α. την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος, κατά τη χρονική στιγμή που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου για $1^η$ φορά.

β. την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα την ίδια χρονική στιγμή.

[Απ. (α) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$, (β) $-\frac{Q}{\sqrt{2LC}}$]

1.203. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C και μέγιστου φορτίου Q συνδέεται μέσω διακόπτη με πηνίο που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L. Αν τη χρονική στιγμή t=0 κλείσουμε το διακόπτη, να βρεθούν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου τη στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή έχει γίνει Q/2. [Απ. $\pm\dfrac{Q\sqrt{3}}{2\sqrt{LC}}$, $\dfrac{3Q^2}{8C}$]

1.204. Ιδανικό κύκλωμα L – C αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 10 *mH* και επίπεδο πυκνωτή χωρητικότητας 1 *μF*. Το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, ενώ το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα i = + 0,1 *A*.

α. Να υπολογίστε το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή.

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που ο πυκνωτής αποκτά το μέγιστο φορτίο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

γ. Να γράψετε την εξίσωση για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, σε συνάρτηση με το χρόνο t.

δ. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή είναι το ⅓ της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου, για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

1.205. Ιδανικό κύκλωμα L – C αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 4 *mH* και επίπεδο πυκνωτή χωρητικότητας 10 *μF*. Ο πυκνωτής φορτίζεται από τάση 200 *V* και στη συνέχεια αποσυνδέεται από αυτή. Τη χρονική στιγμή t = 0 κλείνουμε το διακόπτη.

Α. Να γράψετε τις εξισώσεις μεταβολής των αλγεβρικών τιμών του φορτίου του οπλισμού Α του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 είχε θετικό φορτίο και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Β. Τις χρονικές στιγμές που ο οπλισμός Α έχει φορτίο όσο με το μισό του μέγιστου, να βρείτε

α. την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα.

β. το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

γ. το ρυθμό μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή.

δ. το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

Γ. Όταν η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι τριπλάσια από την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, να υπολογίσετε το φορτίο του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 είχε θετικό φορτίο.

1.206. Κύκλωμα L – C αποτελείται από ιδανικό πηνίο και πυκνωτή με χωρητικότητα 20 *μF*. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου περιγράφεται από την εξίσωση

$$\upsilon_L = 50\cdot \sigma\upsilon\nu 1000t \ \ (S.I.).$$

α. Να υπολογίσετε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.

β. Να γράψετε την εξίσωση του φορτίου, για τον οπλισμό του πυκνωτή, οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ. α. L = 50 *mH*, β. $q = 10^{-3}$ συν1000t, γ. i = - ημ1000t (S.I)]

1.207. Ένα ιδανικό κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με συχνότητα 5 *kHz*. Το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής 0,1 *H*. Θεωρούμε σα χρονική στιγμή t = 0, τη στιγμή που ο ένας οπλισμός του πυκνωτή έχει φορτίο $q = +\frac{Q\sqrt{3}}{2}$ και το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i = +\pi \ A$.

α. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

β. Να γράψετε, σε συνάρτηση με το χρόνο, τις εξισώσεις για

i. την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος.

ii. την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

iii. την τάση στα άκρα του πηνίου.

γ. Να υπολογίσετε, τη χρονική στιγμή $t = 5{\cdot}10^{-4}$ *s*, τους ρυθμούς μεταβολής

i. του φορτίου q του οπλισμού.

ii. της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.

iii. της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή.

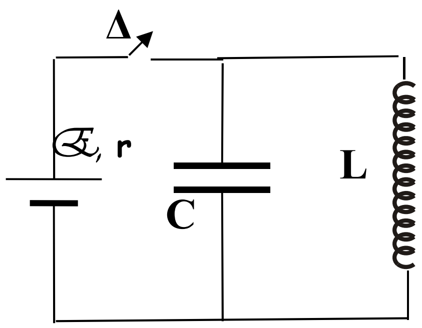
iv. της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

δ. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται ίση με το 1/3 της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου για $10^{η}$ φορά.

ε. Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο μηδενισμών της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου.

Θεωρείστε ότι $π^2 = 10$.

1.208. Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης Δ είναι αρχικά κλειστός και τη χρονική στιγμή t = 0 τον ανοίγουμε. Τη χρονική στιγμή $2π{\cdot}10^{-6}$ s η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή γίνεται για πρώτη φορά ίση με 0,05 *J*. Δίνονται $\mathcal{E}$ = 20 *V*, r = 2 *Ω* και L = 2 *mH*.



α. Να υπολογιστεί η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος L – C.

β. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

γ. Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η ένταση του ρεύματος γίνεται ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της για πρώτη φορά μετά το άνοιγμα του διακόπτη.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της αλγεβρικής τιμής του φορτίου του πάνω οπλισμού του πυκνωτή, σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ. α. 16π *μs*, β. 32 *nF*, γ. 8π/3 *μs*, δ. $q=-80\ 10^{-6}$ημ($1{,}25\ 10^{5}$ t) S.I.]

1.209. Καθώς ο πυκνωτής ενός ιδανικού κυκλώματος L – C εκφορτίζεται, κάποια στιγμή έχει φορτίο 20 *μC*. Εκείνη τη στιγμή η ένταση του ρεύματος είναι ίση με $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot I$, όπου Ι η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος, και αυξάνεται με ρυθμό 125 *A/s*. Αν η ολική ενέργεια του κυκλώματος είναι 0,1 *J*, να υπολογιστούν

α. η χωρητικότητα του πυκνωτή και η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

β. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος. [α. 8 *nF*, 0,8π *ms*, β. 0,1 *A*]

1.5. Φθίνουσες - Εξαναγκασμένες Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Στην πράξη τόσο το πηνίο όσο και οι αγωγοί σύνδεσής του με τον πυκνωτή παρουσιάζουν αντίσταση, με αποτέλεσμα, σύμφωνα με το νόμο του Joule, ένα μέρος της ενέργειας του κυκλώματος να μετατρέπεται σε θερμική ή και σε θερμότητα. Αποτέλεσμα είναι η μείωση της ενέργειας του κυκλώματος με την πάροδο του χρόνου μέχρι μηδενισμού της.

Η μείωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή συνοδεύεται από ελάττωση του φορτίου του.

Η εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο είναι: $\upsilon_C + i\cdot R = \upsilon_L$, της οποίας μία λύση, για μικρές τιμές της αντίστασης R, είναι η

$$q = Q_0 e^{-\Lambda t}\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \qquad (1.34)$$

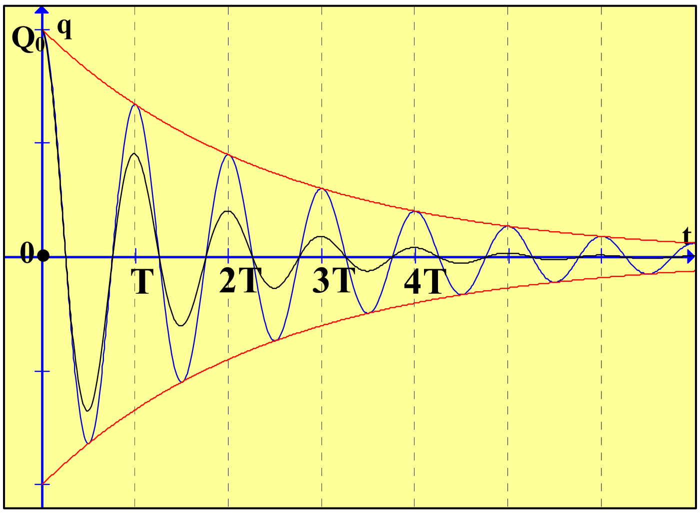
Η θετική σταθερά Λ εξαρτάται από την αντίσταση του κυκλώματος και από την αυτεπαγωγή του πηνίου. $\left[\Lambda = \frac{R}{2L}\right]$

[Το ω είναι η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης και δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ *]*

Για μικρές τιμές της αντίστασης R θεωρούμε ότι $\omega = \omega_0$, όπου $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Μπορούμε, στη σχέση 1.34, να συμβολίσουμε με Q το $Q_0e^{-\Lambda t}$ και να το ονομάσουμε πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης, αρκεί ο χρόνος t να παίρνει τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου Τ.

$$Q = Q_0 e^{-\Lambda t},\quad t = nT \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.35)$$



Γραφική παράσταση της μεταβολής της αλγεβρικής τιμής του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος, για δύο διαφορετικές τιμές της αντίστασης R, σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την περίοδο σταθερή, ανεξάρτητη της αντίστασης R.

- Ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων τιμών φορτίου του ίδιου οπλισμού του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση 1.35, θέτοντας στον ακέραιο n δύο διαδοχικές τιμές k και k+1.

$$\left.\begin{array}{l} Q_k = Q_0 e^{-\Lambda \cdot kT} \\ Q_{k+1} = Q_0 e^{-\Lambda (k+1)T} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{Q_k}{Q_{k+1}} = \frac{Q_0 e^{-\Lambda \cdot kT}}{Q_0 e^{-\Lambda \cdot kT} \cdot e^{-\Lambda T}} \Rightarrow \frac{Q_k}{Q_{k+1}} = e^{\Lambda T}$$

. Για k = 0, 1, 2, 3… παίρνουμε

$$\boxed{\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_2}{Q_3} = \ldots = e^{\Lambda T}}$$

Ο χρόνος ημιζωής ($T_{1/2}$) του μέγιστου φορτίου ενός οπλισμού του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση 1.35 αν αντικαταστήσουμε: t = $T_{1/2}$ και Q = Q_0 / 2. Έχουμε

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow e^{-\Lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \Lambda T_{1/2} = \ell n2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ell n2}{\Lambda}$$

Με ίδιο τρόπο όπως και στις φθίνουσες μηχανικές αποδεικνύεται ότι μετά από χρόνο που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του χρόνου ημιζωής (t = $nT_{1/2}$) για το πλάτος φορτίου θα ισχύει

$$Q_n = \frac{Q_0}{2^n}$$

✓ **Σχόλιο** Με σύγκριση των εξισώσεων (1.16 και 1.34) ή (1.17 και 1.35) παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πλήρης αναλογία μεταξύ των μηχανικών και των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

✓ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ και ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ		ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ	
ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ			
Απομάκρυνση	x	q	Ηλεκτρικό φορτίο
Μάζα	m	L	Συντ. αυτεπαγωγής
Σταθερά επαναφοράς	D	$\frac{1}{C}$	Αντίστροφο χωρητικότητας
Συντελεστής απόσβεσης	b	R	Αντίσταση κυκλώματος
ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ			
Ταχύτητα	$\frac{dx}{dt}=\upsilon$	$\frac{dq}{dt}=i$	Ένταση ηλεκτρ. ρεύματος
Επιτάχυνση	$\frac{d\upsilon}{dt}=a$	$\frac{di}{dt}$	Ρυθμός μεταβολής έντασης ηλεκτρ. ρεύματος
Δυναμική ενέργεια	$\frac{1}{2}Dx^2=U$	$\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2=U_E$	Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου
Κινητική ενέργεια	$\frac{1}{2}m\upsilon^2=K$	$\frac{1}{2}Li^2=U_B$	Ενέργεια μαγνητικού πεδίου
Γωνιακή συχνότητα	$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	Γωνιακή συχνότητα

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, μπορούμε να μετατρέψουμε οποιαδήποτε σχέση που ισχύει σε μηχανικές ταλαντώσεις σε σχέση που ισχύει σε ηλεκτρικές ταλαντώσεις και αντίστροφα. [π.χ $\frac{di}{dt}=-\omega^2\cdot q$, σε αντιστοιχία με την 1.14: $a=-\omega^2\cdot x$.

Πρέπει όμως να πάρουμε υπ' όψη μας και μια διαφορά, που οφείλεται στη διαφορετική επιλογή της «αρχής μέτρησης των χρόνων» (κάτι βέβαια για το οποίο ευθυνόμαστε εμείς).

Στις μηχανικές ταλαντώσεις επιλέξαμε σαν αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που το κινητό πέρναγε από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα (t = 0, x = 0 και υ >0).

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις επιλέγουμε σαν αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος και το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα. (t = 0 , q=+Q και i = 0). Δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος που το κάνουμε αυτό, έχει όμως σαν αποτέλεσμα την προσθήκη και μιας αρχικής φάσης $\frac{\pi}{2}$ στην εξίσωση του ηλεκτρικού φορτίου.

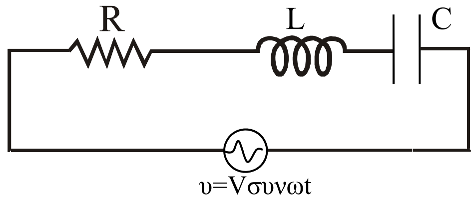
Έτσι με την αντιστοίχιση απομάκρυνσης – φορτίου προκύπτει: $q=Q\eta\mu\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$q=Q\sigma\upsilon\nu\left(\omega t\right)$, δηλαδή η σχέση 1.27.

Συνεπώς, όλα τα συμπεράσματα και οι παρατηρήσεις που ισχύουν στις μηχανικές ταλαντώσεις, με τη βοήθεια του πίνακα αντιστοιχιών, ισχύουν και στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

✓ Εξαναγκασμένες Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Προκειμένου μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση να γίνει αμείωτη, πρέπει να προσφερθεί στο κύκλωμα ενέργεια με ρυθμό ίσο με αυτό με τον οποίο παράγεται η θερμότητα στις αντιστάσεις του. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν συνδέσουμε στο κύκλωμα πηγή εναλλασσόμενης τάσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



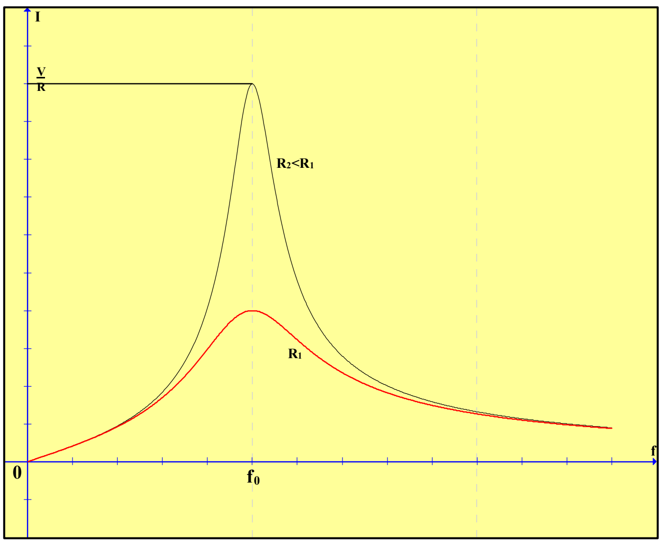
Στην περίπτωση αυτή η πηγή παίζει το ρόλο του διεγέρτη και το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα κυκλικής συχνότητας ίση με αυτή της πηγής.
Το πλάτος I της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι χρονικά σταθερό αλλά η τιμή του εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα της πηγής, το πλάτος V της εναλλασσόμενης τάσης και τις τιμές των R, L και C.
Η μεταβολή του πλάτους της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα f της πηγής, για δύο διαφορετικές τιμές της αντίστασης R, φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι

α. η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο (0,0)

β. το πλάτος παίρνει μέγιστη τιμή όταν η συχνότητα της πηγής γίνει ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος (συντονισμός).

γ. όταν ελαττώνεται η τιμή της αντίστασης αυξάνει το μέγιστο πλάτος.
Στην περίπτωση του ιδανικού κυκλώματος, κατά το συντονισμό το πλάτος της έντασης γίνεται θεωρητικά άπειρο.

δ. Η μέγιστη τιμή του πλάτους της έντασης του ρεύματος εξαρτάται από το πλάτος της τάσης της πηγής και από την ωμική αντίσταση R του κυκλώματος.

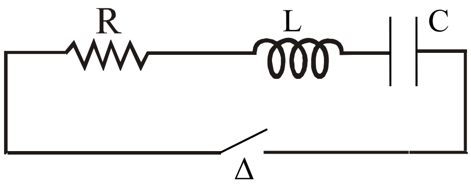


Καμπύλες συντονισμού

Παρατήρηση: *Οι καμπύλες συντονισμού, που είδαμε στις μηχανικές ταλαντώσεις, αντιστοιχούν σε καμπύλες συντονισμού πλάτους ηλεκτρικού φορτίου στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις, ενώ οι καμπύλες συντονισμού του παραπάνω σχήματος, αντιστοιχούν στις καμπύλες συντονισμού ταχύτητας (και ενέργειας) στις μηχανικές ταλαντώσεις.*

Σχόλιο: Εξαναγκασμένη ταλάντωση, μηχανική ή ηλεκτρική, δε σημαίνει οπωσδήποτε και αμείωτη ταλάντωση. Για να είναι αμείωτη, πρέπει ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα απορροφά ενέργεια από τον διεγέρτη να είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια (μηχανική ή ηλεκτρική) μετατρέπεται σε θερμότητα εξ αιτίας των τριβών ή των αντιστάσεων. Ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας εξαρτάται από τη συχνότητα με την οποία προσφέρεται (συχνότητα διεγέρτη). Στο συντονισμό η ενέργεια απορροφάται με τον καλύτερο τρόπο. (π.χ η δύναμη που ασκεί ο διεγέρτης είναι σε φάση με την ταχύτητα του ταλαντωτή.)

Παράδειγμα 1.24. Στο κύκλωμα R – L – C του σχήματος δίνονται: η τιμή της αντίστασης R = 0,2 ℓn3 *Ω*, L = 10 *mH* και $C=\frac{1}{4\pi^2}\mu F$. Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος. Τη χρονική στιγμή t = 0 κλείνουμε το διακόπτη Δ και το μέγιστο φορτίο Q του ίδιου οπλισμού του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $Q=300e^{-\Lambda t}\left(\mu C\right)$, όπου $\Lambda=\frac{R}{2L}$.



α. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που ο οπλισμός του πυκνωτή αποκτά μέγιστο φορτίο 100 *μC*.

β. Μετά από πόσες ταλαντώσεις το φορτίο του οπλισμού έγινε 100 *μC*;

γ. Να υπολογίσετε το λόγο δύο διαδοχικών μέγιστων τιμών του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή.

Λύση

α. $Q=300e^{-\Lambda t}\Rightarrow 100=300e^{-\Lambda t}\Rightarrow e^{-\Lambda t}=\frac{1}{3}\Rightarrow e^{\Lambda t}=3\Rightarrow \Lambda t=\ell n3\Rightarrow \frac{R}{2L}t=\ell n3\Rightarrow t=\frac{2L}{R}\ell n3$

$$\overset{(S.I.)}{\Rightarrow} t=\frac{2\cdot 10^{-2}\cdot \cancel{\ell n3}}{0,2\cdot \cancel{\ell n3}}\Rightarrow \boxed{t=0,1s}$$

β. Έστω T η περίοδος των ταλαντώσεων και N ο αριθμός των ταλαντώσεων σε χρόνο t = 0, 1 *s*. Είναι $T=2\pi\sqrt{LC}=2\pi\sqrt{10\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{4\pi^2}10^{-6}}\ s\Rightarrow T=10^{-4}\ s$.

Από τον ορισμό της περιόδου $T=\frac{t}{N}$, προκύπτει $N=\frac{t}{T}=\frac{0,1}{10^{-4}}\Rightarrow\ N=1000$ ταλαντώσεις.

γ. Για το μέγιστο φορτίο του ίδιου οπλισμού του πυκνωτή ισχύει $\frac{Q_k}{Q_{k+1}}=e^{\Lambda T}$, k = 0,1,2...

$$\frac{Q_k}{Q_{k+1}}=e^{\frac{R}{2L}T}=e^{\frac{0,2\ell n3}{2\cdot 10^{-2}}10^{-4}}=e^{0,001\cdot\ell n3}=e^{\ell n3^{0,001}}=3^{0,001}$$

Παράδειγμα 1.25. Κύκλωμα που αποτελείται από αντιστάτη με αντίσταση R, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 20 *mH* και πυκνωτή με χωρητικότητα 2 *μF*, τροφοδοτείται με πηγή εναλλασσόμενης τάσης και βρίσκεται σε συντονισμό. Σε κάθε περίοδο της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, αναπτύσσεται στον αντιστάτη θερμότητα ίση με $3{,}2\pi\cdot 10^{-2}$ *J*. Αν η μέγιστη τιμή της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι 400 *V*, να υπολογίσετε

α. τη γωνιακή συχνότητα της πηγής εναλλασσόμενης τάσης.
β. το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή.
γ. τη μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
δ. την τιμή της αντίστασης R του αντιστάτη.

Λύση

α. Η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_0 του κυκλώματος είναι

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-6}}}\,rad/s \Rightarrow \ \omega_0 = 5000\,rad/s$. Επειδή το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, η γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη (πηγή εναλ. τάσης) συμπίπτει με τη γωνιακή ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος. Δηλαδή είναι $\boxed{\omega = 5000\ rad/s}$.

β. Το φορτίο ενός οπλισμού του πυκνωτή δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση $q = C\cdot \upsilon_C$. Για το μέγιστο φορτίο θα ισχύει $Q = C\cdot V_C$ ➔ $\boxed{Q = 8\cdot 10^{-4}\ C}$.

γ. Για τη μέγιστη τιμή της έντασης I του ρεύματος είναι $I = \omega Q$ ➔ $\boxed{I = 4\ A}$.

δ. Η θερμική ενέργεια στον αντιστάτη, σε κάθε περίοδο, υπολογίζεται από τη σχέση $Q_\Theta = I_{\varepsilon\nu}^2 R\cdot T$, όπου $I_{\varepsilon\nu} = \dfrac{I}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\,A}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,A$ και $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{5\cdot 10^3}\,s \Rightarrow T = 4\pi\cdot 10^{-4}\,s$. Άρα

$R = \dfrac{Q_\Theta}{I_{\varepsilon\nu}^2\cdot T} = \dfrac{3{,}2\cancel{\pi}\cdot 10^{-2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot 4\cancel{\pi}\cdot 10^{-4}}\,\Omega \Rightarrow \boxed{R = 10\,\Omega}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1.210. Σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L-C με ολική αντίσταση R, το πλάτος του φορτίου μεταβάλλεται με το χρόνο (για Λ > 0)

α. $Q = Q_0 - \Lambda t$ **β.** $Q = Q_0 e^{\Lambda t}$

γ. $Q = Q_0 e^{-\Lambda t}$ **δ.** $Q = \frac{Q_0}{\Lambda t}$

1.211. Σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L-C με ολική αντίσταση R, το πλάτος του ηλεκτρικού φορτίου μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $Q = Q_0 e^{-\Lambda t}$. (Λ>0) Στην εξίσωση αυτή ο χρόνος t παίρνει

α. οποιαδήποτε τιμή.
β. τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T.
γ. μόνο τιμές που είναι άρτια πολλαπλάσια της περιόδου T.
δ. μόνο τιμές που είναι περιττά πολλαπλάσια της περιόδου T.

1.212. Σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L-C με ολική αντίσταση R, το πλάτος του ηλεκτρικού φορτίου μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $Q = Q_0 e^{-\Lambda t}$. (Λ>0) Σε χρόνο t_1 το πλάτος μειώνεται από $\frac{Q_0}{2}$ σε $\frac{Q_0}{4}$ και σε χρόνο t_2 από $\frac{Q_0}{6}$ σε $\frac{Q_0}{12}$. Η σχέση μεταξύ των χρονικών διαστημάτων t_1 και t_2 είναι

α. $t_1 = t_2$ **β.** $t_1 = \frac{t_2}{2}$

γ. $t_1 = 2\,t_2$ **δ.** $t_1 = 4\,t_2$

1.213. Σε μια εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση, ο διεγέρτης ταλαντώνεται με συχνότητα f που είναι μικρότερη από τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Αν αρχίσουμε να αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, ο ταλαντωτής

α. θα εξακολουθεί να ταλαντώνεται με τη φυσική του συχνότητα.
β. θα ταλαντώνεται πάντα με τη συχνότητα του διεγέρτη.
γ. το πλάτος του φορτίου θα αυξάνεται συνεχώς.
δ. το πλάτος της έντασης του ρεύματος θα αυξάνεται συνεχώς.

1.214. Ένα κύκλωμα που αποτελείται από αντιστάτη με αντίσταση R, πυκνωτή χωρητικότητας C και ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, εκτελεί εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με σταθερό πλάτος έντασης και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Χωρίς να μεταβάλλουμε κανένα άλλο στοιχείο του κυκλώματος, αντικαθιστούμε τον αντιστάτη με άλλον διπλάσιας αντίστασης. Συνεπώς

α. το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού θα μετατοπιστεί προς τα αριστερά.

β. το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού θα αυξηθεί και δε θα μετατοπιστεί.

γ. το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού θα υποδιπλασιαστεί και δε θα μετατοπιστεί.

δ. το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού θα υποδιπλασιαστεί και θα μετατοπιστεί προς τα δεξιά.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

1.215. Ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του μέγιστου φορτίου του ίδιου οπλισμού ενός πυκνωτή σε κύκλωμα R – L – C, που εκτελεί φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

1.216. Ένα κύκλωμα που αποτελείται από ιδανικό πηνίο, αντιστάτη και πυκνωτή, εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις.

α. Η κύρια αιτία απόσβεσης είναι η ύπαρξη του αντιστάτη.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου.

γ. το μέγιστο φορτίο του ίδιου οπλισμού του πυκνωτή παραμένει χρονικά σταθερό.

δ. το μέγιστο φορτίο του ίδιου οπλισμού του πυκνωτή μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

ε. Όταν αυξάνει η τιμή της αντίστασης R του αντιστάτη, αυξάνει και η ταχύτητα με την οποία μειώνεται η ενέργεια του κυκλώματος.

στ. Αν η τιμή της αντίστασης είναι μεγαλύτερη από κάποια μέγιστη τιμή, η ταλάντωση γίνεται αμείωτη.

ζ. Ο λόγος $\frac{U_{E,\max}}{U_{B,\max}}$, όπου η $U_{E,max}$ αναφέρεται στη χρονική στιγμή $t_1 = nT$ και η $U_{B,max}$ αναφέρεται στη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T$, μπορεί να είναι 0,8. (n = 0, 1, 2, …)

1.217. Κύκλωμα R – L – C εκτελεί αμείωτες εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Για να πετύχουμε αύξηση της μέγιστης τιμής της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, πρέπει να αντικαταστήσουμε τον αντιστάτη με άλλον μεγαλύτερης αντίστασης.

1.218. Κύκλωμα που αποτελείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης, ιδανικό πηνίο, πυκνωτή και αντιστάτη αντίστασης R, βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού όταν ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στον αντιστάτη είναι μέγιστος.

1.219. Κύκλωμα R – L – C εκτελεί αμείωτες εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Αν υποδιπλασιάσουμε την τιμή της αντίστασης R, το κύκλωμα δε θα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

1.220. Σε τι χρησιμεύουν τα κυκλώματα R – L – C στους ραδιοφωνικούς δέκτες και πως λειτουργούν;

1.221. Κύκλωμα R – L – C εκτελεί ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση. Να παραστήσετε γραφικά το φορτίο του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν θετικά φορτισμένος, σε συνάρτηση με το χρόνο, για δύο διαφορετικές τιμές της αντίστασης R. Πως επηρεάζεται η περίοδος της ταλάντωσης από την τιμή της αντίστασης R;

1.222. Δύο κυκλώματα R – L – C_1 και R – L – C_2 αποτελούνται από αντιστάτες με ίσες αντιστάσεις και πηνία με ίσους συντελεστές αυτεπαγωγής. Για τις χωρητικότητες ισχύει ότι $C_1 > C_2$. Οι πυκνωτές έχουν φορτιστεί αρχικά στο ίδιο μέγιστο φορτίο και τη χρονική στιγμή t = 0 κλείνουμε και στα δύο κυκλώματα τους διακόπτες. Αν με Δt_1 και Δt_2 συμβολίσουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, σε κάθε κύκλωμα, ώστε το μέγιστο φορτίο του οπλισμού που ήταν αρχικά θετικά φορτισμένος, να υποτριπλασιαστεί, ισχύει

α. $\Delta t_1 < \Delta t_2$. **β.** $\Delta t_1 = \Delta t_2$. **γ.** $\Delta t_1 > \Delta t_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να τη δικαιολογήσετε.

1.223. Γυρίζουμε το κουμπί επιλογής των σταθμών ενός ραδιοφωνικού δέκτη, από τη συχνότητα 92,3 MHz στη συχνότητα 106,2 MHz. Η χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος επιλογής των σταθμών

α. ελαττώνεται. **β.** δε μεταβάλλεται. **γ.** αυξάνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

1.224. Κύκλωμα RLC με ιδιοσυχνότητα f_0 εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι I_1, όταν η συχνότητα της διεγείρουσας τάσης είναι f_1. Παρατηρούμε ότι, όταν η συχνότητα της διεγείρουσας τάσης αυξηθεί και γίνει f_2, η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος είναι πάλι I_1. Για να αυξηθεί η μέγιστη τιμή του ρεύματος σε τιμή $I_2 > I_1$, πρέπει η συχνότητα f της διεγείρουσας τάσης να είναι

α. $f > f_2$. **β.** $f < f_1$. **γ.** $f_1 < f < f_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

1.225. Η ιδιοσυχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων ενός συστήματος πηνίου-πυκνωτή είναι f_0 = 25 *kHz* και η ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι R. Φορτίζουμε τον πυκνωτή με φορτίο Q = 10 *μC* και αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει ταλαντώσεις. Λόγω της ωμικής αντίστασης, για να διατηρείται αμείωτη η ταλάντωση, πρέπει σε κάθε περίοδο να προσφέρεται στο σύστημα ενέργεια W = 10^{-3} *J*, από εξωτερικό διεγέρτη, που είναι σε συντονισμό με το κύκλωμα ταλαντώσεων. Να προσδιοριστεί η τιμή της αντίστασης R. Δίνεται $\pi^2 = 10$. [Απ. $R = \dfrac{W}{2\pi^2 Q^2 f_0} = 20\Omega$]

1.226. Ένα κύκλωμα αποτελείται από ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 0,2 *mH*, πυκνωτή χωρητικότητας 2 *μF* και διακόπτη. Με το διακόπτη ανοιχτό, φορτίζουμε τον πυκνωτή με πηγή τάσης 50 *V* και αφού τον αποσυνδέσουμε από την πηγή, κλείνουμε το διακόπτη και το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις.

Α. 1. Να υπολογίσετε την τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο όταν ο πυκνωτής έχει φορτίο $2\cdot 10^{-5}$ *C*.

2. Αν θεωρήσουμε σαν χρονική στιγμή t = 0, τη στιγμή που το ρεύμα στο πηνίο έχει ένταση 5 *A*, να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό φορτίο και την ένταση του ρεύματος.

Β. 1. Στο αρχικό κύκλωμα προσθέτουμε και αντιστάτη ορισμένης αντίστασης με αποτέλεσμα σε κάθε περίοδο να χάνεται ενέργεια ίση με το 50% της ενέργειας που είχε στην αρχή της περιόδου. Να υπολογίσετε το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή στην αρχή της $2^{ης}$ περιόδου.

2. Φέρνουμε σε επαγωγική σύζευξη το κύκλωμα R-L-C με ιδανικό κύκλωμα L΄ - C΄ που εκτελεί αμείωτες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις. Αν L΄= 0,1 *mH* και C΄ = 2 *μF*, να υπολογίσετε

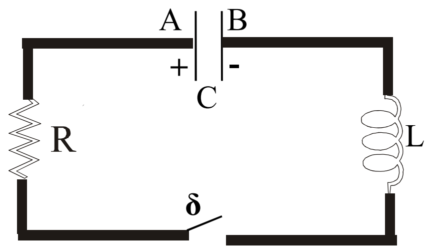
α. τη συχνότητα ταλάντωσης του R-L-C.

β. την τιμή που έπρεπε να είχε η χωρητικότητα C', ώστε η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα R-L-C να έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

[Απ. $\pm 2\sqrt{6}\ A$, $q = 10^{-4}ημ5\cdot 10^4t$, $i = 5συν5\cdot 10^4t$, $50\sqrt{2}\ \mu C$, $\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\cdot 10^5\ Hz$, 4 *μF*]

1.227. Κύκλωμα RLC εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Το φορτίο του οπλισμού Α του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση:

$$q = 40\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2tln5}\cdot συνωt\ \ (S.I.).$$



Ο διακόπτης δ κλείνει τη χρονική στιγμή t= 0. Μετά από 100 πλήρεις ταλαντώσεις, εξαιτίας φαινομένου Joule, έχουν μετατραπεί σε θερμική ενέργεια το 96% της αρχικής ενέργειας του συστήματος. Να υπολογίσετε

α. το πλάτος του φορτίου μετά από τις 100 πλήρεις ταλαντώσεις.

β. τη γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων.

γ. την αντίσταση R του κυκλώματος.

Δίνονται: $Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}$, $L = \frac{1}{10\cdot ln5}H$.   [Απ. α. 8μC, β. 400π rad/s, γ. 0,4 Ω]

1.6. Σύνθεση Ταλαντώσεων

Ένα σημειακό αντικείμενο μπορεί να εκτελέσει ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες ταλαντώσεις, οι οποίες μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση. Το αποτέλεσμα θα είναι μια πολύπλοκη κίνηση, η οποία εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων.
Η μελέτη της συνισταμένης κίνησης του αντικειμένου γίνεται με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας και ονομάζεται σύνθεση ταλαντώσεων.
Παράδειγμα είναι η κίνηση που εκτελεί η μεμβράνη του αυτιού μας, όταν ακούμε ταυτόχρονα δύο ή περισσότερους ήχους.

- Θα εξετάσουμε την περίπτωση σύνθεσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

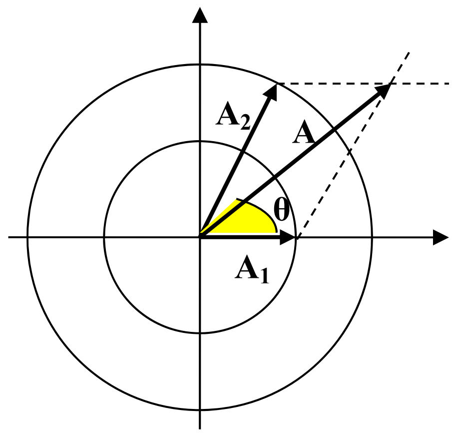
Α. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν και την **ίδια συχνότητα**.

Έστω ότι η απομάκρυνση του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του, που προκαλείται από κάθε αρμονική ταλάντωση δίνεται από τις εξισώσεις:
$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$.

Η αρχική φάση φ της δεύτερης ταλάντωσης συμβολίζει και τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αρμονικών ταλαντώσεων. Δηλαδή $\varphi = \Phi_2 - \Phi_1$ (1.36)

Για τη συνισταμένη απομάκρυνση, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των εξισώσεων κίνησης, είναι

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A_1 \eta\mu\omega t + A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$



Η μελέτη μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς.
Αποδεικνύεται ότι η συνισταμένη κίνηση έχει σταθερό πλάτος, που δίνεται από τη σχέση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1.37)$$

(η απόδειξη γίνεται με το νόμο των συνημτόνων)

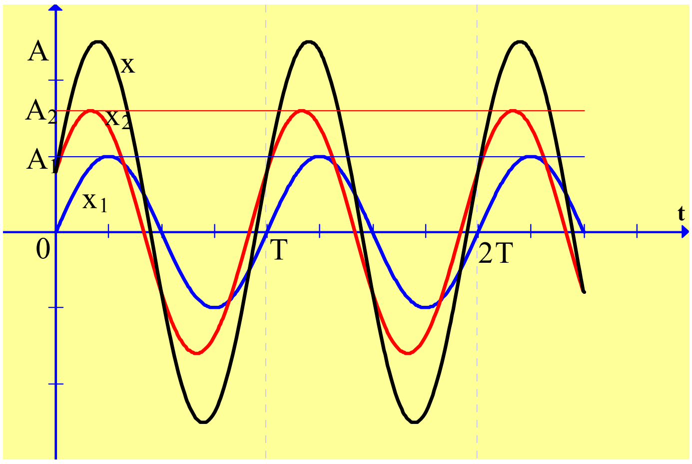
και φάση που δίνεται από τη σχέση: $\Phi = \omega t + \theta$, όπου

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2 \eta\mu\varphi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1.38)$$

Επομένως η συνισταμένη απομάκρυνση περιγράφεται από την εξίσωση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi \quad (1.39)$$

δηλαδή είναι αρμονική ταλάντωση.
Η γωνία θ εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ της συνισταμένης ταλάντωσης και της ΠΡΩΤΗΣ ταλάντωσης (αυτής που ονομάσαμε x_1). Δηλαδή $\theta = \Phi - \Phi_1$. (1.40)



Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων
με διαφορά φάσης φ = π/6

✓ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

➢ φ = 0:

Από την 1.37: $A = A_1 + A_2$ και από την 1.38: εφθ=0 ή θ = 0. Άρα
$x = (A_1 + A_2)$ ημωt.

➢ φ = π / 2

Από την 1.37: $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ και από την 1.38: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{A_2}{A_1}$

➢ φ = π

Από την 1.37: $A=\left|A_1-A_2\right|$ και από την 1.38: εφθ = 0. Η εξίσωση αυτή δέχεται 2 λύσεις, τη θ = 0 και τη θ = π. Αν $A_1 > A_2$ *δεκτή είναι η* $\theta=0$, ενώ αν $A_1 < A_2$ δεκτή είναι η θ = π.

Αν $A_1 = A_2$ τότε x = 0 και το σώμα μένει ακίνητο.

Β. <u>Οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες</u>,

Έστω ότι οι δύο ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις:

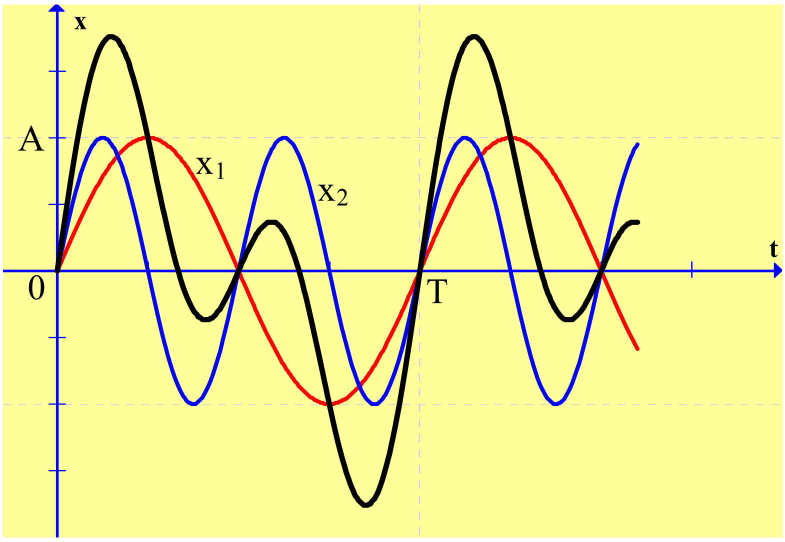
$x_1 = A\cdot\eta\mu\omega_1 t \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = A\cdot\eta\mu\omega_2 t$

Για τη συνισταμένη απομάκρυνση, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, είναι

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A\cdot\eta\mu\omega_1 t + A\cdot\eta\mu\omega_2 t \Rightarrow x = A\left(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t\right)$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας: $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (1.41)

προκύπτει: $\boxed{x=2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}}$ (1.42)



Η κίνηση που προκύπτει δεν είναι αρμονική ταλάντωση, είναι όμως περιοδική, αν οι συχνότητες των δύο επί μέρους αρμονικών ταλαντώσεων έχουν λόγο που είναι ρητός αριθμός.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων με λόγο συχνοτήτων $\frac{f_1}{f_2}=\frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι η κίνηση που προκύπτει έχει περίοδο ίση με τη μεγαλύτερη περίοδο, δηλαδή στο παράδειγμα είναι Τ = T_1.

Στην περίπτωση που οι δύο συχνότητες διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, $(\omega_1 \approx \omega_2)$, από τη σχέση 1.41 προκύπτει ότι ο συνημιτονικός παράγοντας μεταβάλλεται πολύ αργά σε σχέση με τον ημιτονικό παράγοντα. Πράγματι η περίοδος (T_σ) για τον συνημοτονικό παράγοντα είναι,

$$T_\sigma = \frac{2\pi}{\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}} = \frac{4\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \tag{1.43}$$

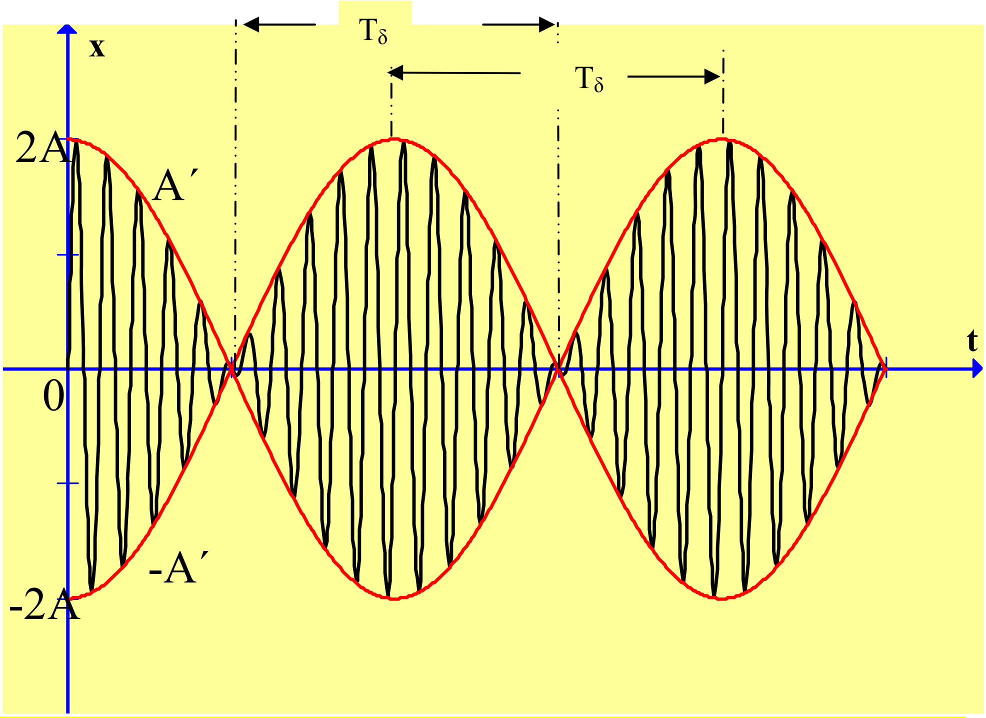
ενώ για τον ημιτονικό είναι $T_{\eta\mu} = \frac{2\pi}{\frac{|\omega_1+\omega_2|}{2}} = \frac{4\pi}{|\omega_1+\omega_2|}$. (1.44)

Όπως φαίνεται είναι $T_\sigma \gg T_{\eta\mu}$ αφού $\omega_1 \approx \omega_2$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε σαν πλάτος της περιοδικής κίνησης τον παράγοντα $2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right|$ και να γράψουμε

$x = A'\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)$, όπου για το Α΄ ισχύει: $\boxed{|A'| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\right|}$ (1.45)

Η περιοδική κίνηση γίνεται με πλάτος $|A'|$ που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο από 0 μέχρι 2Α και κυκλική συχνότητα που δίνεται από τη σχέση: $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$

Η ταλάντωση του πλάτους της περιοδικής κίνησης που προκύπτει από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων, που έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια θέση ισορροπίας, ίσα πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν λίγο, ονομάζεται ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.



Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του πλάτους (ή μηδενισμού του), ονομάζεται περίοδος του διακροτήματος (T_δ)

✓ Υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος

Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το πλάτος της σύνθετης κίνησης μηδενίζεται, μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση 1.45.

$$|A'|=0 \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\right|=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)=0 \Rightarrow \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t=k\pi+\frac{\pi}{2}, \;\; k=0,\pm1,\pm2\ldots$$

$\Rightarrow(\omega_1-\omega_2)t=2k\pi+\pi \;\; \acute{\eta} \;\; |\omega_1-\omega_2|\cdot t=2n\pi+\pi, \;\; n=0,1,2\ldots$ Με αντικατάσταση της γωνιακής συχνότητας με τη συχνότητα (ω = 2πf), έχουμε

$$2\pi|f_1-f_2|\cdot t=\pi(2n+1)\Rightarrow t=\frac{2n+1}{2|f_1-f_2|}.$$

Για να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών μεγιστοποίησης του πλάτους, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον φυσικό αριθμό n με δύο διαδοχικές τιμές, πχ τις ρ και ρ+1. Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} n=\rho:\; t_1&=\frac{2\rho+1}{2|f_1-f_2|} \\ n=\rho+1:\; t_2&=\frac{2(\rho+1)+1}{2|f_1-f_2|}\Rightarrow t_2=\frac{2\rho+3}{2|f_1-f_2|}\end{aligned}\right\rangle \xrightarrow{T=t_2-t_1} T_\delta=\frac{2\rho+3}{2|f_1-f_2|}-\frac{2\rho+1}{2|f_1-f_2|}\Rightarrow$$

$$T_\delta=\frac{2}{2|f_1-f_2|}\Rightarrow \qquad \boxed{T_\delta=\frac{1}{|f_1-f_2|}} \qquad (1.46)$$

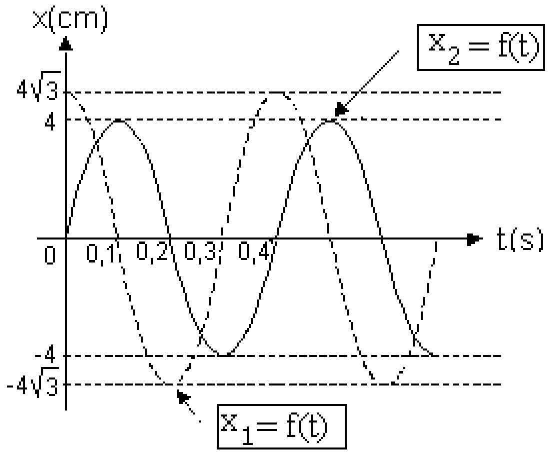
Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η περίοδος του διακροτήματος είναι το χρονικό διάστημα για να μεταβληθεί το συνημίτονο από -1 σε +1 (και αντίστροφα). Συνεπώς η περίοδος του διακροτήματος είναι ίση με το ½ της περιόδου του συνημιτονικού παράγοντα. Από τη σχέση 1.43 που δίνει την περίοδο T_σ του συνημιτονικού παράγοντα προκύπτει $T_\sigma = \dfrac{4\pi}{2\pi|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\sigma = \dfrac{2}{|f_1 - f_2|}$. Επειδή όμως $T_\delta = \dfrac{T_\sigma}{2}$, προκύπτει $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$, δηλαδή η σχέση 1.46.

- Συχνότητα f_δ του διακροτήματος ονομάζουμε τον αριθμό των μεγιστοποιήσεων του πλάτους (ή των μηδενισμών του πλάτους), ανά μονάδα χρόνου. Εκφράζει τον αριθμό των διακροτημάτων ανά μονάδα χρόνου. Είναι $f_\delta = \dfrac{1}{T_\delta}$ και από την 1.46 προκύπτει

$$\boxed{f_\delta = |f_1 - f_2|} \qquad (1.47)$$

Παράδειγμα 1.26.

Σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων x_1, x_2 του σημειακού αντικειμένου σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνονται στο σχήμα.



α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για κάθε μία ταλάντωση.

β. Να γράψετε την εξίσωση της κίνησης του σημειακού αντικειμένου.

γ. Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης του σημειακού αντικειμένου αν η μάζα του είναι $m = 10^{-2}$ *kg*.

δ. Να βρείτε την ταχύτητα του σημειακού αντικειμένου τη χρονική στιγμή t = 2 *s* ($\pi^2 \approx 10$).

Λύση

α. Από το διάγραμμα x - t βρίσκουμε: T = 0,4 *s* ή $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = 5\pi\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

$A_1 = 4\sqrt{3}$ *cm* και $A_2 = 4$ *cm*

Συνεπώς, οι εξισώσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ είναι:

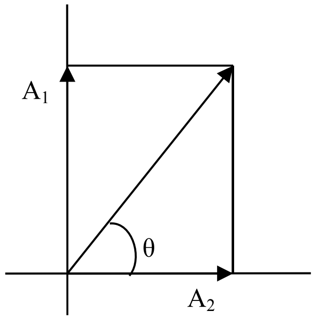
$x_1 = 4\sqrt{3}\ ημ\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ x_1, σε *cm* – t σε *s*

$x_2 = 4ημ5\pi t$ x_2 σε *cm* – t σε *s*

β) Η εξίσωση της κίνησης του σημειακού αντικειμένου θα είναι:
$x = x_1 + x_2$ ή $x = A\eta\mu(5\pi t + \theta)$.

Έχουμε: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{4^2 \cdot 3 + 4^2}$ cm $\rightarrow A = 8$ *cm*

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$



Συνεπώς: $x = 8\eta\mu\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ x σε *cm*, t σε *s*. (1.26.1)

γ) Είναι $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}10^{-2}\,kg \cdot 25\pi^2\frac{rad^2}{s^2} \cdot 64 \cdot 10^{-4}\,m^2 \rightarrow E = 8 \cdot 10^{-3}$ *J*.

δ) Η υ = f (t) με βάση την 1.26.1 είναι: $\upsilon = 40\pi\sigma\upsilon\nu\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{t=2s}$

$\upsilon = 40\pi\sigma\upsilon\nu\left(\cancel{10\pi} + \frac{\pi}{3}\right) = 40\pi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 40\pi\frac{1}{2}\frac{cm}{s} \rightarrow \boxed{\upsilon = 20\pi\frac{cm}{s}}$.

Παράδειγμα 1.27. Σημειακό αντικείμενο μάζας m = 1 *kg*, εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου για τις δύο ταλαντώσεις είναι

$x_1 = 8 \cdot \eta\mu\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ και $x_2 = 8\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$ (x_1, x_2 σε *cm*, t σε *s*).

α. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του σώματος.
β. Να υπολογίσετε την ολική του ενέργεια.
γ. Να γράψετε τις εξισώσεις, σε συνάρτηση με το χρόνο, για τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Από τις εξισώσεις ταλάντωσης που δίνονται, προκύπτουν: $A_1 = 8$ *cm*, $A_2 = 8\sqrt{3}\,cm$, ω = π *rad/s* και με τη βοήθεια της 1.36 $\varphi = \Phi_2 - \Phi_1 = \left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

Με αντικατάσταση στην 1.37 παίρνουμε (σε cm)

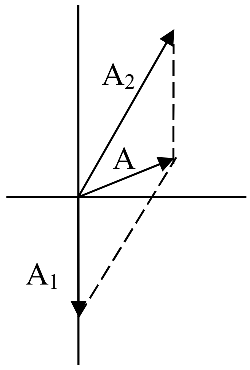
$$A = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3 + \cancel{2} \cdot 8^2 \cdot \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)} = \sqrt{8^2 + \cancel{3 \cdot 8^2} - \cancel{3 \cdot 8^2}} \Rightarrow$$

A = 8 *cm*

Με αντικατάσταση στην 1.38 παίρνουμε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{8\sqrt{3}\eta\mu\frac{5\pi}{6}}{8 + 8\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}} = \frac{8\sqrt{3}\frac{1}{2}}{8 + 8\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{8 - 4 \cdot 3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = k\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Η γωνία θ εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ της συνισταμένης ταλάντωσης και της ΠΡΩΤΗΣ ταλάντωσης (αυτής που ονομάσαμε x_1). (Εξίσωση 1.40). Δηλαδή $\theta = \Phi - \Phi_1$ ή $\Phi = \Phi_1 + \theta$ ➔ $\Phi = \omega t + \varphi_1 + \theta$ άρα $x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta)$ ή



$x = 8\cdot\eta\mu\left(\pi t - \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 8\cdot\eta\mu\left(\pi t + k\pi - \frac{5\pi}{6}\right)$ (x σε *cm*, t σε *s*). Από το σχήμα προκύπτει ότι για την αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης πρέπει

$$-\frac{\pi}{2} < k\pi - \frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{7}{6} \Rightarrow k = 1.$$

Άρα $x = 8\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (x σε *cm*, t σε *s*).

β. $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \pi^2\cdot\left(8\cdot 10^{-2}\right)^2 J \Rightarrow E = 32\cdot 10^{-3}\ J$

γ.

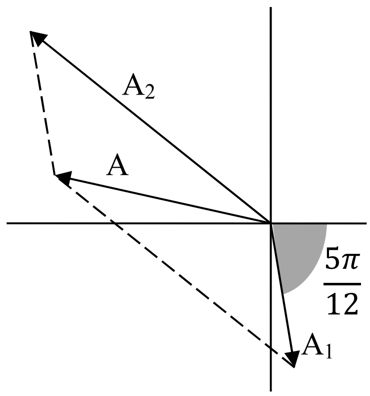
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\pi^2\cdot\left(8\cdot 10^{-2}\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 \Rightarrow U = 32\cdot 10^{-3}\cdot\eta\mu^2\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (S.I.)$$

$$K = E - U \Rightarrow K = 32\cdot 10^{-3}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (S.I.)$$

Παράδειγμα 1.28. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση που περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = 4\eta\mu\left(\pi t - \frac{5\pi}{12}\right)$ και $x_2 = 4\sqrt{3}\eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (x σε *cm*, t σε *s*).

Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης που εκτελεί το σώμα.

Λύση



Από τις εξισώσεις ταλάντωσης προκύπτει ότι: $A_1 = 4\ cm$, $A_2 = 4\sqrt{3}\ cm$, $\omega = \pi\ rad/s$ και $\varphi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$.

Από την 1.37: $A = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}} \Rightarrow$

$$A = \sqrt{4^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\ cm \Rightarrow A = 4\ cm.$$

Από την 1.38:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{4\sqrt{3}\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{6}}{4 + 4\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{4 + 4\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-2\sqrt{3}}{4-6} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{3} \qquad (1.28.1)$$

Από την 1.40: $\Phi = \Phi_1 + \theta \overset{1.28.1}{\Rightarrow} \Phi = \pi t - \frac{5\pi}{12} + k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Phi = \pi t + k\pi - \frac{\pi}{12}$.

Σύμφωνα με το σχήμα, η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι μεταξύ 3π/4 και 2π - 5π/12, άρα k = 1 και επομένως $x = 4\cdot\eta\mu\left(\pi t + \frac{11\pi}{12}\right)$ (x σε *cm*, t σε *s*).

Παράδειγμα 1.29. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση που περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = 4\eta\mu 604\pi t \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = 4\eta\mu 600\pi t \ \left(x \ \sigma\varepsilon \ cm, \ t \ \sigma\varepsilon \ s\right)$.

α. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης που εκτελεί το σώμα.
β. Πόση είναι η περίοδος της συνισταμένης κίνησης;
γ. Πόσο χρονικό διάστημα μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους;
δ. Πόσες φορές έχει μηδενιστεί η απομάκρυνση της συνισταμένης κίνησης ως το τέλος του πρώτου δευτερολέπτου;

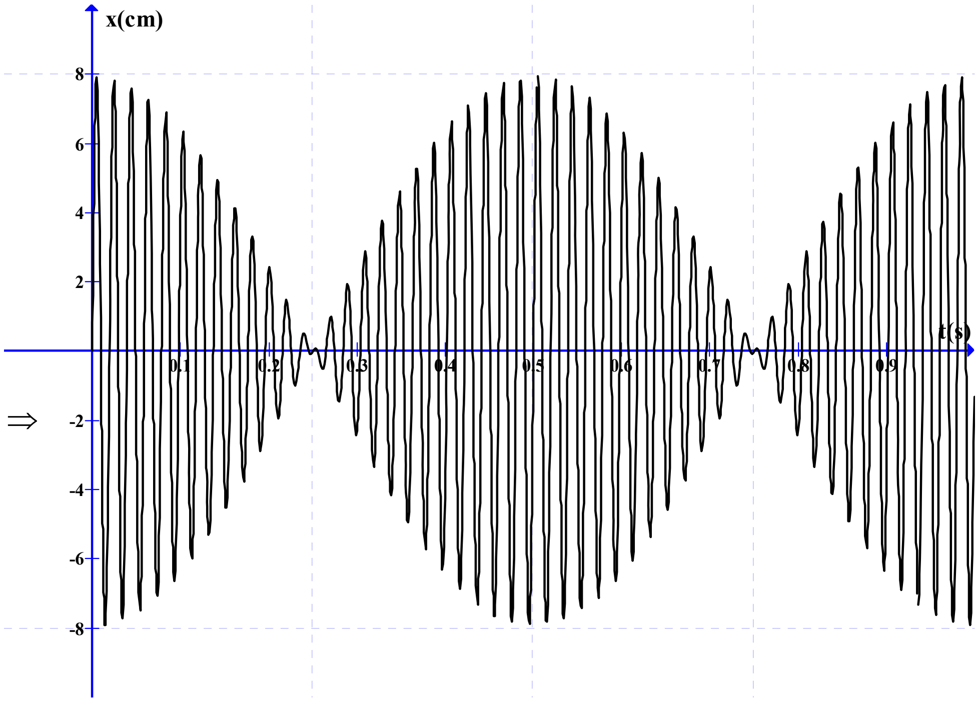
Λύση

α. Είναι Α = 4 *cm*, ω_1 =604 *rad/s*, ω_2 = 600 *rad/s*. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 1.42:

$$x = 2\cdot 4\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{604\pi - 600\pi}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{604\pi + 600\pi}{2}t\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{x = 8\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi t\cdot\eta\mu 602\pi t \ \left(x \ \sigma\varepsilon \ cm, \ t \ \sigma\varepsilon \ s\right)}$$

β. Η περίοδος της συνισταμένης κίνησης είναι η περίοδος του ημιτονικού παράγοντα 1.44: $T = \frac{2\pi}{602\pi} rad/s \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{301}s}$.



γ. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι η περίοδος του διακροτήματος.

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \ \acute{\eta}$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_\delta = 0,5\,s}$$

δ. Είναι x = 0 όταν
ή $\sigma\upsilon\nu 2\pi t = 0$
ή $\eta\mu 602\pi t = 0$.

- $\sigma\upsilon\nu 2\pi t = 0 \Rightarrow 2\pi t = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}$. Πρέπει $0 \le t \le 1s \Rightarrow 0 \le \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \le 1 \Rightarrow$

$-0,25 \le \frac{k}{2} \le 0,75 \Rightarrow -0,5 \le k \le 1,5 \Rightarrow k = 0 \ \acute{\eta} \ k = 1$. Δηλαδή το πλάτος μηδενίζεται 2 φορές.

Για k = 0: t_1 = 0,25 s
Για k = 1: t_2 = 0,75 s

- $\eta\mu 602\pi t = 0 \Rightarrow 602\pi t = \rho\pi \Rightarrow t = \frac{\rho}{602}s$. Πρέπει

$0 \le t \le 1s \Rightarrow 0 \le \frac{\rho}{602} \le 1 \Rightarrow 0 \le \rho \le 602 \Rightarrow \rho = 0,1,2...602$. Δηλαδή ο ημιτονικός παράγοντας μηδενίζεται 603 φορές.

Εξετάζουμε αν οι δύο τριγωνομετρικές εξισώσεις που βρήκαμε έχουν κοινές λύσεις:

$$t = t_1 = 0,25\,s : \eta\mu\left(602\pi \cdot 0,25\right) = \eta\mu\frac{301\pi}{2} = \eta\mu\left(\cancel{150\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$$

$$t = t_2 = 0,75\,s : \eta\mu\left(602\pi \cdot 0,75\right) = \eta\mu\frac{903\pi}{2} = \eta\mu\left(\cancel{450\pi} + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$$

Συνεπώς στο χρονικό διάστημα [0, 1s] θα έχουμε 2+603 = 605 μηδενισμούς της απομάκρυνσης.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση ή που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1.228. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης 2 ταλαντώσεων με ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα f και ίσες φάσεις είναι

α. αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και συχνότητα f.

β. αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και συχνότητα 2f.

γ. αρμονική ταλάντωση με πλάτος 2Α και συχνότητα 2f.

δ. αρμονική ταλάντωση με πλάτος 2Α και συχνότητα f.

1.229. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης 2 αρμονικών ταλαντώσεων που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις

$x_1 = A_1\eta\mu\omega t \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega t + \varphi\right)$ είναι

α. αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα 2ω.

β. αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω και πλάτος που εξαρτάται από τη διαφορά φάσης φ.

γ. σε κάθε περίπτωση μια περιοδική κίνηση που δεν είναι αρμονική ταλάντωση.

δ. αρμονική ταλάντωση της οποίας το πλάτος εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα των συνιστωσών ταλαντώσεων.

1.230. Διακρότημα ονομάζουμε

α. το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων με ίδια συχνότητα.

β. την ταλάντωση του πλάτους της περιοδικής κίνησης που προκύπτει από τη σύνθεση δύο α.α.τ με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα.

γ. την ταλάντωση του πλάτους της περιοδικής κίνησης που προκύπτει από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια ευθεία, με ίδιο πλάτος και συχνότητες ω και kω, αντίστοιχα (k = ακέραιος θετικός).

δ. την ταλάντωση του πλάτους της περιοδικής κίνησης που προκύπτει από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια ευθεία, με ίδιο πλάτος και παραπλήσιες συχνότητες.

1.231. Η σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων πλάτους Α η κάθε μία, έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία διακροτήματος. Η μία ταλάντωση έχει συχνότητα f_1 και η άλλη f_2 ($f_1 > f_2$). Η κίνηση που προκύπτει έχει

α. συχνότητα $f_1 + f_2$ και πλάτος **2Α**.

β. συχνότητα $\frac{f_1 + f_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται με συχνότητα $f_1 - f_2$.

γ. συχνότητα $f_1 + f_2$ και πλάτος που μεταβάλλεται με συχνότητα $f_1 - f_2$.

δ. συχνότητα $\frac{f_1 + f_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται με συχνότητα $\frac{f_1 - f_2}{2}$

1.232. Η σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία διακροτήματος. Αν διπλασιάσουμε ταυτόχρονα τις συχνότητες των δύο ταλαντωτών

α. η περίοδος του διακροτήματος θα τετραπλασιαστεί.

β. η συχνότητα του διακροτήματος θα διπλασιαστεί.

γ. η συχνότητα του διακροτήματος θα υποδιπλασιαστεί.

δ. δεν θα προκύψει διακρότημα.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό/Λάθος

Οδηγία: Για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αρκεί να γράψετε στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της ερώτησης και δεξιά από αυτόν το γράμμα Σ αν τη κρίνετε σωστή ή το γράμμα Λ αν την κρίνετε λανθασμένη.

1.233. Το πλάτος Α της αρμονικής ταλάντωσης που προκύπτει από την σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων με πλάτη A_1 και A_2, που γίνονται στην ίδια ευθεία, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, δίνεται από τη σχέση $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\vartheta}$ όπου ϑ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.

1.234. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων που εξελίσσονται στον άξονα x, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_1) \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_2)$, είναι

α. μια περιοδική κίνηση, όχι όμως αρμονική ταλάντωση, όταν η αρχική φάση της μιας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης.

β. μια νέα αρμονική ταλάντωση, της οποίας η φάση εξαρτάται από τη διαφορά $\varphi_1 - \varphi_2$.

γ. μια νέα αρμονική ταλάντωση, της οποίας το πλάτος εξαρτάται από τη διαφορά $\varphi_1 - \varphi_2$.

δ. μια νέα αρμονική ταλάντωση, της οποίας το πλάτος, η φάση και η συχνότητα, εξαρτώνται από τη διαφορά φάσης.

1.235. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων που εξελίσσονται στην ίδια ευθεία, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, έχουν ίσα πλάτη και παραπλήσιες συχνότητες ($f_1 \approx f_2$), είναι

α. αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $|f_1 - f_2|$.

β. περιοδική κίνηση συχνότητας $\frac{f_1 + f_2}{2}$.

γ. ταλάντωση μεταβλητού πλάτους.

δ. ταλάντωση, της οποίας το πλάτος μεταβάλλεται με συχνότητα $|f_1 - f_2|$.

1.236. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους Α, της ίδιας διεύθυνσης και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι συχνότητες των δύο αρμονικών ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Συνεπώς

α. το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

β. το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

γ. η μέγιστη τιμή του πλάτους είναι 2Α.

δ. ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι $\dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$.

Ερωτήσεις ανοικτού τύπου

1.237. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα 2 απλές αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης και της ίδιας συχνότητας που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η ολική ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με το άθροισμα των ολικών ενεργειών των 2 επιμέρους ταλαντώσεων. Η διαφορά φάσης μεταξύ των 2 ταλαντώσεων είναι

α. 0

β. $\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$

γ. π

δ. οποιαδήποτε μεταξύ 0 και 2π.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

1.238. Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και με την ίδια συχνότητα, των οποίων οι φάσεις διαφέρουν κατά φ. Αν E_1, E_2 είναι οι ολικές ενέργειες των δύο επί μέρους ταλαντώσεων και Ε είναι η ολική ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης, ισχύει η σχέση

α. $E = E_1 + E_2$.

β. $E = \left(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}\right)^2$.

γ. $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$.

δ. $E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

1.239. Να χαρακτηρίσετε την κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ αν την κρίνετε ως ΣΩΣΤΗ ή με το γράμμα Λ αν την κρίνετε ως ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΗ.

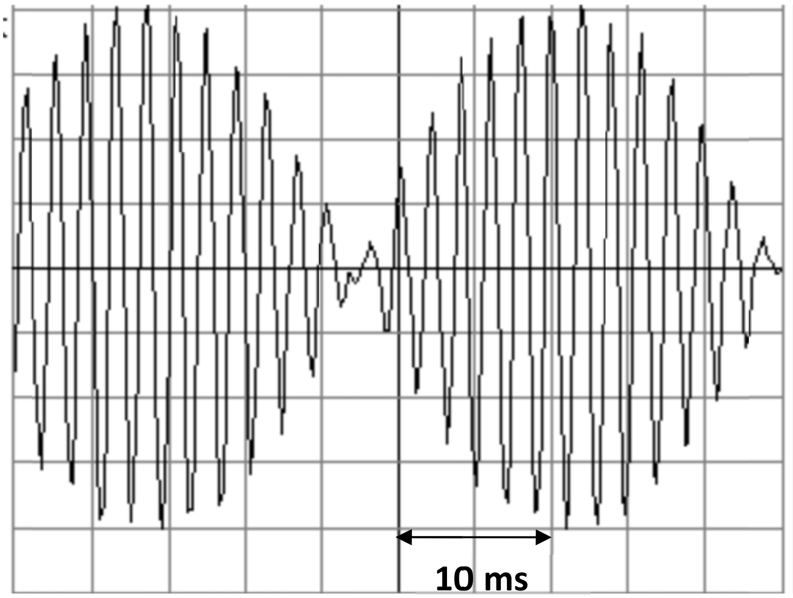
α. Από τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης με ίδιο πλάτος Α και ίδια θέση ισορροπίας, που έχουν συχνότητες f και 3f, προκύπτει αρμονική ταλάντωση πλάτους 2Α και συχνότητας 2f.

β. Η σχέση που δίνει την περίοδο T_δ ενός διακροτήματος σε συνάρτηση με τις περιόδους T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$) των 2 επί μέρους αρμονικών ταλαντώσεων, είναι $T_\delta = \dfrac{T_1T_2}{T_1 - T_2}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.240. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους, της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με συχνότητες f_1 και f_2 που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Ποιος είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στη διάρκεια μιας περιόδου του παραγόμενου διακροτήματος;

1.241. Στο γράφημα φαίνεται η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, στην περίπτωση μιας ιδιόμορφης ταλάντωσης που παρουσιάζει διακροτήματα.
α. Ποια είναι η συχνότητα των διακροτημάτων;
β. Ποιες είναι κατά προσέγγιση οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων, των οποίων η σύνθεση δημιουργεί την ιδιόμορφη ταλάντωση;



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ - Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

1.242. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την συνισταμένη ταλάντωση είναι $x = ημωt + \sqrt{3}\ συνωt$ (x σε *cm*). Να βρεθεί το πλάτος και η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης.

1.243. Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα τρεις αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, με ίδια θέση ισορροπίας και με εξισώσεις $x_1=A\cdot ημωt$, $x_2=2A\cdot ημ(ωt+\frac{π}{2})$ και $x_3=3A\cdot ημ(ωt+π)$. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης, σε συνάρτηση με τα A και ω.

1.244. Να βρείτε την εξίσωση της κίνησης που προκύπτει από την σύνθεση δύο Α.Α.Τ της ίδιας διεύθυνσης με εξισώσεις $x_1=4\ ημ(10\ t+\frac{π}{6})$ και $x_2=4\ ημ(10\ t+\frac{π}{2})$, ($x_1$, x_2 σε *cm*, t σε *s*.) [Απ. $x = 4\sqrt{3}ημ(10t+\frac{π}{3})$ $(x\ σε\ cm,\ t\ σε\ s)$]

1.245. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν ίσες συχνότητες. Η μία αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση $x_1 = 10\cdot ημ20t$ (*cm*) και όταν το σώμα εκτελεί μόνο αυτή, έχει (ολική) ενέργεια 4 *J*. Όταν το σώμα εκτελεί μόνο την άλλη, έχει (ολική) ενέργεια 1 *J*, ενώ όταν αναγκάζεται να εκτελέσει και τις δύο ταυτόχρονα έχει (ολική) ενέργεια 3 *J*.
α. Να γράψετε την εξίσωση σε συνάρτηση με το χρόνο, για την απομάκρυνση όταν το σώ-

μα εκτελεί μόνο τη δεύτερη ταλάντωση.

β. Να γράψετε την εξίσωση σε συνάρτηση με το χρόνο, για την απομάκρυνση, όταν το σώμα εκτελεί τη σύνθετη ταλάντωση.

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος όταν εκτελεί τη σύνθετη ταλάντωση. [Απ. α. $x_2 = 5 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{2\pi}{3}\right)\ (cm)$, β. $x = 5\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{6}\right)\ (cm)$, ή α. $x_2 = 5 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{4\pi}{3}\right)\ (cm)$,β. $x = 5\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{11\pi}{6}\right)\ (cm)$, γ. $20\sqrt{3}\ m/s^2$]

1.246. Ένα διαπασών άγνωστης συχνότητας παράγει τρία μέγιστα του ήχου ανά δευτερόλεπτο με ένα πρότυπο διαπασών συχνότητας 404 *Hz*. Η συχνότητα του διακροτήματος μικραίνει όταν ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης τοποθετηθεί στο ένα σκέλος του πρώτου διαπασών. Να βρείτε τη συχνότητα του διαπασών αυτού. [Απ. 407 *Hz*]

1.247. Σημειακό αντικείμενο Μ εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις πάνω στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 8ημ404πt$ και $x_2 = 8ημ400πt$ (x σε *cm*, t σε *s*)

α. i. Ποια είναι και πώς προκύπτει η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης;

ii. Πόσο είναι το μέγιστο πλάτος και η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης;

β. Με ποια συχνότητα μεταβάλλεται το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης;

1.248. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση, που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 5συν200πt$ και $x_2 = 5συν204πt$ (x σε *cm* t σε *s*)

α. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης που εκτελεί το σημειακό αντικείμενο.

β. πόση είναι η περίοδος της συνισταμένης κίνησης.

γ. Να βρείτε την περίοδο του διακροτήματος.

δ. Πόσες φορές μηδενίζεται η απομάκρυνση της συνισταμένης κίνησης του σημειακού αντικειμένου στο διάστημα [0, 0,5 *s*];

1.249. Δύο διαπασών βρίσκονται το ένα κοντά στο άλλο και παράγουν ήχους ίδιας έντασης με συχνότητες f_1 = 440 *Hz* και f_2 = 442 *Hz* αντίστοιχα.

Να βρείτε:

α. Πόσα μέγιστα του ήχου ακούμε σε χρονική διάρκεια t = 4 *s*.

β. Την τιμή που πρέπει να έχει η συχνότητα f_2 ώστε να ακούμε τέσσερα μέγιστα του ήχου σ' ένα δευτερόλεπτο.

Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο

Α. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α1. Αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις

Εξίσωση θέσης $x = A\,ημ(ωt+φ)$

Εξίσωση ταχύτητας $υ = ωA\,συν(ωt+φ)$ $υ = υ_{max}\,συν(ωt+φ)$

Εξίσωση επιτάχυνσης $α = -ω^2 A\,ημ(ωt+φ)$ $α = -α_{max}\,ημ(ωt+φ)$ $α = -ω^2 x$

Εξίσωση δύναμης $F_{επ} = -m\,ω^2 A\,ημ(ωt+φ)$ $F_{επ} = -F_{max}\,ημ(ωt+φ)$

$F_{επ} = -Dx$

(Για την αρχική φάση ισχύει: $0 \le \varphi < 2\pi$ ή $-\pi \le \varphi \le \pi$)

$υ_{max} = ωA$ $α_{max} = ω^2 A$ $F_{max} = m\,ω^2 A$ $D = m\,ω^2$

Γωνιακή συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Περίοδος $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Ενέργεια ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}DA^2$

Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$

Ρυθμοί μεταβολής $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -F_{επ}\cdot υ$

Α2. Φθίνουσες αρμονικές ταλαντώσεις

Δύναμη απόσβεσης $F_{αντ} = -b\,υ$

Απομάκρυνση $x = A_0 e^{-\Lambda t}συν(\omega t)$ $\left(\Lambda = \frac{b}{2m}\right)$

Πλάτος $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t},\ t = kT$

Α3. Εξαναγκασμένες αρμονικές ταλαντώσεις (σταθερού πλάτους)

Εξωτερική δύναμη $F_δ = F_0\,συν(ω_δ\,t)$

Δύναμη απόσβεσης $F_{αντ} = -b\,υ$

Απομάκρυνση $x = A\,ημ(ω_δ\,t+φ)$

Πλάτος $A = f(ω_δ)$ καμπύλη συντονισμού

(Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που ο πυκνωτής είναι φορτισμένος και το κύκλωμα L – C δε διαρρέεται από ρεύμα, ώστε φ = $\frac{\pi}{2}$)

Β1. Αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Εξίσωση ηλ. φορτίου q = Q συν(ωt) (Το q συμβολίζει την αλγεβρική τιμή του φορτίου του οπλισμού του πυκνωτή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t = 0, ήταν θετικά φορτισμένος.)

Εξίσωση έντασης ηλ. ρεύματος i = - ωQ ημ(ωt) i = - I ημ(ωt)

Ρυθμός μεταβολής έντασης ηλ. ρεύματος $\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) = -\omega^2 q$

$$C = \frac{q}{\upsilon_C}, \quad Q = C \cdot V_C, \quad I = \omega \cdot Q, \quad \upsilon_L = -L\frac{di}{dt}, \quad L = \mu\mu_0 \frac{\mathrm{N}^2\mathrm{A}}{\ell}$$

$$\upsilon_C = \upsilon_L$$

Γωνιακή συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Περίοδος $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Ενέργεια ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}, \quad U_E = \frac{1}{2}C \cdot \upsilon_C^2, \quad U_E = \frac{1}{2}q \cdot \upsilon_C$

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου $U_B = \frac{1}{2}L \cdot i^2$

Ρυθμοί μεταβολής

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{q}{C} \cdot i = \upsilon_C \cdot i, \quad \frac{dU_B}{dt} = -\upsilon_L \cdot i$$

$$\frac{dU_E}{dt} = -\frac{dU_B}{dt}$$

Β2. Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις (κύκλωμα R – L – C)

Ο κύριος λόγος, που στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις η ενέργεια του κυκλώματος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, είναι οι αντιστάσεις των αγωγών σύνδεσης και του σύρματος του πηνίου, οι οποίες λόγω φαινομένου Joule μετατρέπουν την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμική. (Ένας άλλος λόγος είναι η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας)

Εξίσωση ηλ. φορτίου $q = Q_0 \cdot e^{-\Lambda t} \sigma \upsilon \nu (\omega t)$ $\left(\Lambda = \frac{R}{2L} \right)$

Πλάτος φορτίου $Q = Q_0 \cdot e^{-\Lambda t}, \quad t = kT$

B3. Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις (σταθερού πλάτους)

Στο κύκλωμα R – L – C εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση υ = V ημ(ω_δt)

Ηλεκτρικό φορτίο q = Q ημ(ω_δ t + θ) $-\pi \leq \theta \leq \pi$

Πλάτος φορτίου Q = f(ω_δ) καμπύλη συντονισμού.

Γ.ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΙΔΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΕ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Γ1. ΙΔΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$x_1 = A_1$ ημωt

$x_2 = A_2$ ημ(ωt+φ) φ = $\Phi_2 - \Phi_1$.

x = A ημ(ωt+θ) θ = $\Phi - \Phi_1$.

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sigma \upsilon \nu \varphi}$ και γωνία θ που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{A_2 \eta \mu \varphi}{A_1 + A_2 \sigma \upsilon \nu \varphi}$$

Γ2. ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ, ΙΔΙΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

x_1 = A ημω_1 t

x_2 = A ημω_2 t

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cdot \eta\mu \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$$

Αν $\omega_1 \approx \omega_2$ τότε παράγονται διακροτήματα.

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \qquad f_\delta = |f_1 - f_2|$$