Β΄ Λυκείου

29 Απριλίου 2001

Θεωρητικό Μέρος

ΘΕΜΑ 1ο

Μια αγώγιμη μεταλλική σφαίρα ακτίνας α περιβάλλεται από παχύ αγώγιμο κέλυφος εσωτερικής ακτίνας β > α και εξωτερικής ακτίνας γ. Το σύστημα βρίσκεται στο κενό και αρχικά είναι αφόρτιστο. Φορτίο + Q φέρεται κατάλληλα στην εσωτερική σφαίρα.

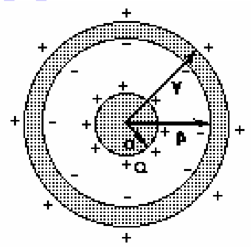
Α. Καθορίστε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε περίπτωση και παραστήστε το γραφικά σε άξονες Ε και r, όπου r η απόσταση από το κέντρο Κ.

Β. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού ενός σημείου Α που βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα α και του ∞ ;

Γ . Θεωρώντας ως χωρητικότητα του συστήματος την $C = \frac{Q}{V_A - V_\infty}$ υπολογίστε την τιμή της .

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

Α. Από τον νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό :

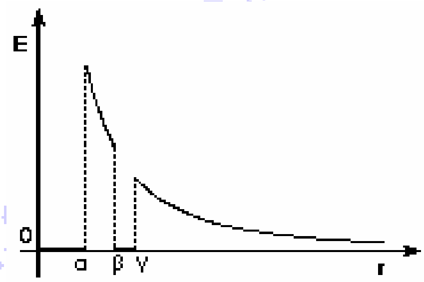


i) για r < α, Ε = 0

ii) για α < r < β, $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_o 4\pi r^2}$

iii) για β < r < γ, Ε = 0 ($Q_{ολ}$ = 0)

iv) για r > γ, $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_o 4\pi r^2}$



Β. $V_{(a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\alpha} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(-)Q}{\beta} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\gamma}$ =>

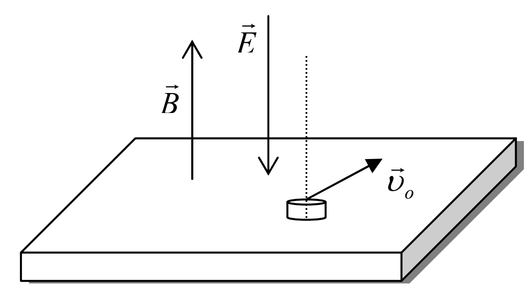
$V_{(a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Q(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) > 0$

$V_{(\infty)} = 0$

Γ. $C = \frac{Q}{V_{(A)} - V_{(B)}}$ => $C = \frac{4\pi\varepsilon_o}{(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})}$ ή $C = 4\pi\varepsilon_o$

$\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

ΘΕΜΑ 2ο



Θετικά φορτισμένο σωματίδιο με ειδικό φορτίο $\frac{q}{m} \cong 5\cdot 10^7 \frac{c}{kg}$, κινείται με ταχύτητα υ_o. Με αυτή την ταχύτητα διαπερνάει μια οριζόντια μονωτική επιφάνεια, από τρύπα (Τ), ασήμαντων διαστάσεων, που υπάρχει σε αυτή. Στο χώρο, υπάρχει κατακόρυφο προς τα πάνω ομογενές μαγνητικό πεδίο Β = π (Tesla) και κατακόρυφο προς τα κάτω ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, Ε = $10^3 \frac{N}{C}$.Καθώς περνάει από την τρύπα το σωματίδιο, η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία φ= 60^o με την διεύθυνση των δύο πεδίων.

α) Για ποιες τιμές της $υ_o$ το σωματίδιο θα βγαίνει και πάλι από την ίδια τρύπα; Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της $υ_o$ ώστε να συμβαίνει αυτό ;

β) Για την ελάχιστη αυτή τιμή της $υ_o$ που βρήκατε να υπολογίσετε την μέγιστη κατακόρυφη απομάκρυνση του σωματιδίου από την μονωτική επιφάνεια. Πόσο απέχει από την τρύπα τότε; ($π^2 \cong 10$).

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:
Αναλύουμε την κίνηση σε ανεξάρτητες επιμέρους κινήσεις:

I. Λόγω της $\vec{υ}_{ox}$ και του μαγνητικού πεδίου:

Αναπτύσσεται δύναμη Lorentz ($\vec{F}_L$), κάθετη στην $\vec{υ}_{ox}$, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο (xy), που θα έπαιζε το ρόλο κεντρομόλου δύναμης και θα ανάγκαζε το σωματίδιο σε ομαλή κυκλική κίνηση:

$$F_L = F_K \quad ή \quad B \cdot υ_{0x} \cdot q = \frac{mυ_{ox}^2}{R} \quad ή \quad R = \frac{mu_0 ημφ}{qB} \ (1) \quad και \quad T = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (2)$$

II. Λόγω της $\vec{υ}_{oz}$, του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου:

Δεν αναπτύσσεται δύναμη Lorentz, γιατί η $υ_{0z}$ είναι παράλληλη με την $\vec{B}$.
Αναπτύσσεται δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο, ίδιας κατεύθυνσης με την ένταση $\vec{E}$, που προκαλεί επιβράδυνση $\vec{a}$, στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Είναι $a = -\frac{Eq}{m}$, όπου E το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι, μετά από χρόνο t, το σωματίδιο θα εμφάνιζε κατακόρυφη ταχύτητα $\vec{υ}_{oz}$ και κατακόρυφη απομάκρυνση z από την τρύπα:

$$υ_z = υ_{0z} + at = υ_{0z} - \frac{Eq}{m}t \ (3) \quad z = υ_{0z}t + ½ at^2 = υ_{0z}t - \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t^2 \ (4)$$

Ως αποτέλεσμα της ομαλής κυκλικής κίνησης στο επίπεδο (xy) και της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης στην κατακόρυφη διεύθυνση, το σωματίδιο διαγράφει ελικοειδή τροχιά, με βήμα που διαρκώς ελαττώνεται.

Το σωματίδιο επιστρέφει στη μονωτική επιφάνεια, μετά από χρόνο t_1, όταν $z = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} (4):\ u_{0z}t_1 - \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t_1^2 = 0 \\ t_1 \neq 0 \end{array}\right\} \ t_1 = \frac{2mu_0 συνφ}{Eq} \ (5)$$

α) Για να βγει και πάλι από την τρύπα (Τ), πρέπει μετά χρόνο t_1, να έχει διαγράψει λόγω της συνιστώσας ομαλής κυκλικής κίνησης, ακέραιο πλήθος περιφερειών. Δηλαδή, αρκεί:

$t_1 = \kappa T$, όπου $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$

(2), (5): αρκεί $\frac{2m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\phi}{Eq} = \kappa\frac{2\pi m}{qB}$ ή $\upsilon_0 = \kappa\frac{\pi E}{B\sigma\upsilon\nu\phi} = \kappa\frac{\pi\cdot 10^3}{\pi\cdot\frac{1}{2}}$ (S. I.)

ή $\upsilon_0 = \kappa\cdot 2\cdot 10^3$ m/s $\quad \kappa = 1, 2, 3, \ldots$

Η ελάχιστη ταχύτητα για την οποία μπορεί το σωματίδιο να βγαίνει από την τρύπα είναι: $\upsilon_0 = 2\cdot 10^3$ m/s. ($\kappa = 1$).

β) Για την ελάχιστη αυτή υ_0, το σωματίδιο εμφανίζει μέγιστη απόσταση από το μονωτικό επίπεδο, όταν $\upsilon_z = 0$.

(3): $\upsilon_{0z} - \frac{Eq}{m}t = 0 \Rightarrow t = \frac{m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\phi}{Eq}$

(4): $z_{max} = \frac{mu_0^2\sigma\upsilon\nu\phi}{Eq} - \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}\frac{m^2u_0^2\sigma\upsilon\nu\phi^2}{E^2q^2} = \frac{mu_0^2\sigma\upsilon\nu^2\phi}{2Eq}$

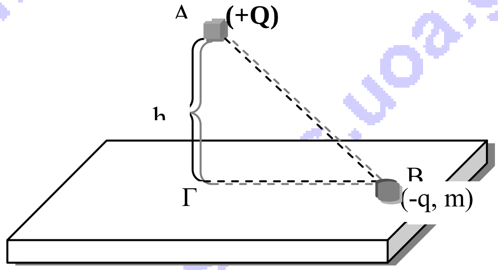
ή $z_{max} = \frac{4\cdot 10^6\cdot\frac{1}{4}}{2\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^7}m = \frac{10^6}{10^{11}}m = 10^{-5}$m = 10 μm.

Τότε από την τρύπα απέχει:

$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{(2R)^2 + z_{max}^2} \\ \text{όπου } R &= \frac{m\upsilon_0\eta\mu\phi}{qB} = \frac{2\cdot 10^3\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi\cdot 5\cdot 10^7} = \frac{\sqrt{3}\cdot 10^{-4}}{5\pi}\text{ m}\end{aligned}\right\}$$

$d = \sqrt{4\cdot\frac{3\cdot 10^{-8}}{25\cdot\pi^2} + 10^{-10}}$ m $= \sqrt{\left(\frac{12}{25}+1\right)\cdot 10^{-10}}$ m = 24,1μm

ΘΕΜΑ 3^o



Στο διπλανό σχήμα, το φορτίο +Q συγκρατείται ακίνητο σε ύψος h πάνω από μονωτικό δάπεδο.

Το φορτίο -q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε σφαιρίδιο μάζας m,το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο μονωμένο δάπεδο. Η γωνία ΑΒΓ είναι 30^o.

Αφήνουμε ελεύθερο από το Β το **(**-q, m**)**.

α)Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη απόσταση h ώστε να μη χαθεί η επαφή του σφαιριδίου (-q, m) από το δάπεδο. Θεωρήστε δεδομένα τα m, g, Q, q, k_c.

β)Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα του σφαιριδίου και σε ποιο σημείο πραγματοποιείται;

γ) Για την τιμή του h που βρήκατε, περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

δ)Βάζουμε το φορτίο Q σε θέση Α΄ που να απέχει h΄=h/2 από το δάπεδο, και το συγκρατούμε. Εκτοξεύουμε με ταχύτητα υ κατάλληλα το σφαιρίδιο από ένα σημείο Δ ώστε να κάνει κυκλική κίνηση πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να δέχεται αντίδραση από αυτό. Πόση είναι η ταχύτητα υ κατά διεύθυνση και μέτρο;

Πόση είναι η ένταση **Β** του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κύκλου.

Δίνονται k_c, Q, q, m, g.

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

α) Το σφαιρίδιο (-q,m) λόγω της ελκτικής δύναμης που δέχεται, αρχίζει να κινείται επιταχυνόμενο με κίνηση πάνω στην ΒΓ. Σε μια τυχαία θέση Ζ οι δυνάμεις που δέχεται είναι $\vec{B}, \vec{N}, \vec{F}_c$. Αν δεν χαθεί η επαφή στο Γ εξασφαλίζεται και για όλη τη διαδρομή. Για την οριακή περίπτωση πρέπει $N \geq 0$ $\quad F_c = B$ ή $k_c \dfrac{Qq}{h^2} = mg$ ή $h_{min} = \sqrt{\dfrac{k_c Qq}{mg}}$ (1)

β) $\eta\mu\theta = \dfrac{h}{d}$ ή $\dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{d}$ ή d = (AB) = 2·h_{min} .

Για την κίνηση από το Β έως το Γ η μέγιστη ταχύτητα επιτυγχάνεται στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης δηλαδή στο Γ. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. από το Β στο Γ και έχουμε:

$$U_B^{\Delta YN} + K_B = U_\Gamma^{\Delta YN} + K_\Gamma \text{ ή } k_c \frac{Q(-q)}{d} + 0 = k_c \frac{Q(-q)}{h} + \frac{1}{2} m\upsilon^2 \text{ ή } \upsilon = \sqrt{2\frac{k_c Qq}{m}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{d}\right)}.$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι για h = h_{min} έχουμε μέγιστη ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m} k_c Qq\left(\frac{1}{h_{min}} - \frac{1}{2h_{min}}\right)}$$ και λόγω της (1) έχουμε: $\upsilon_{max} = \sqrt[4]{\dfrac{k_c Qqg}{m}}$

γ) Το σωματίδιο σε μια τυχαία θέση δέχεται τις δυνάμεις: βάρος $\vec{B}$, δύναμη Coulomb $\vec{F}_c$ και την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$.

Αναλύουμε την $\vec{F}_c$ σε $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$. Είναι $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B - F_y$ πρέπει $N \geq 0$ όπως είδαμε στο α΄ ερώτημα.
Η δύναμη $F_x = F_c \sigma\upsilon\nu\theta$ επιταχύνει το σφαιρίδιο από το Β στο Γ μη ομαλά γιατί $F_c \neq \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$. Όπως είδαμε στο Γ αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα και κατόπιν το σώμα επιβραδύνεται λόγω της F_x που έχει αντίθετη φορά και σταματάει σε θέση Β΄ συμμετρική ως προς το Γ δηλ. Β΄Γ = ΒΓ γιατί από Α.Δ.Μ.Ε. έχουμε όταν σταματήσει:

$k_c \dfrac{Q(-q)}{d} = k_c \dfrac{Q(-q)}{d'}$ ή $d' = d$ και έτσι Β΄Γ = ΒΓ. Η κίνηση είναι μη αρμονική ταλάντωση.

δ) Η εκτόξευση του φορτισμένου σωματιδίου πρέπει να γίνει από σημείο Δ με ταχύτητα **υ** οριζόντια και κάθετη στην στη ΓΔ. Εφόσον η κάθετη αντίδραση είναι μηδέν έχουμε:

$F_y = mg$ και $F_x = F_{\kappa\varepsilon\nu} = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$ (2)

Όμως: $F_y = F_c \eta\mu\theta = k_c \dfrac{Qq}{d_1^2} \dfrac{\frac{h}{2}}{d_1} = k_c \dfrac{Qh_{min}}{2d_1^3}$ και λόγω της (1)

έχουμε: $F_y = \dfrac{k_c Qq}{2d_1^3} \sqrt{\dfrac{k_c Qq}{mg}} = mg$ ή $d_1 = \sqrt{\dfrac{k_c Qq}{\sqrt[3]{2}mg}}$

Όμως: $d_1^2 = \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + R^2$ ή $R = \sqrt{\dfrac{k_c Qq}{mg}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{4}\right)}$ (3)

Είναι: $F_x = F\sigma\upsilon\nu\vartheta = k_c \dfrac{Qq}{d_1^2}\dfrac{R}{d_1}$ και λόγω της (2) έχουμε:

$$\frac{k_c QqR}{d_1^3} = \frac{m\upsilon^2}{R} \text{ και μετά τις πράξεις: } \upsilon = \sqrt[4]{\frac{2k_c Qqg}{m}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4}}.$$

Η κίνηση του φορτίου ισοδυναμεί με ρεύμα έντασης $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{q\upsilon}{2\pi R}$.

Στο κέντρο Γ αυτού του «κυκλικού ρεύματος» θα έχουμε ένταση μαγνητικού πεδίου:

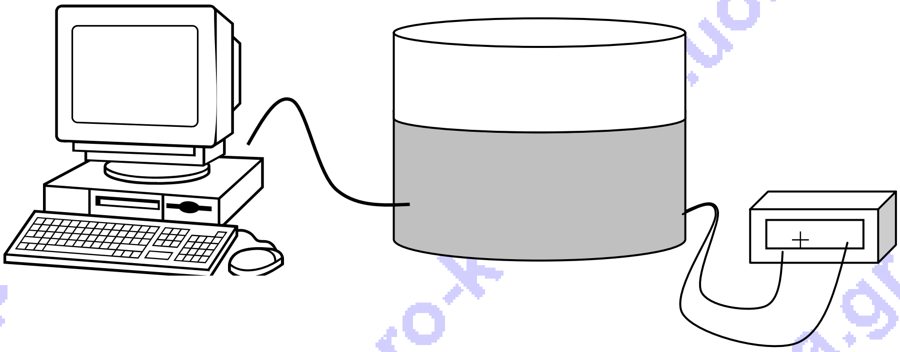
$B = k_\mu \dfrac{2\pi I}{R}$ ή $B = k_\mu \dfrac{2\pi}{R}\dfrac{q\upsilon}{2\pi R}$ ή $B = \dfrac{k_\mu q\upsilon}{R^2}$

Πειραματικό Μέρος

Σε ένα εργαστήριο μας δίνουνε τρεις φιάλες Α, Β και Γ που η κάθε μια περιέχει ένα από τα επόμενα αέρια H_2, He και CO_2.. Χωρίς όμως να ξέρουμε πιο αέριο περιέχεται σε κάθε φιάλη.

Διοχετεύουμε ποσότητα από το αέριο της φιάλης Α σε κυλινδρικό δοχείο με ανένδοτα πλευρικά τοιχώματα και βάση, κατασκευασμένα από θερμομονωτικό υλικό. Στο εσωτερικό μέρος των τοιχωμάτων του δοχείου υπάρχει ωμική αντίσταση R = 24 Ω. Η σταθερή διατομή του δοχείου είναι S = 0,1 m^2 και το δοχείο σφραγίζει στο επάνω μέρος με μεταλλικό δίσκο θερμικά μονωμένο, μάζας m = 10,0 Kg που μπορεί να ολισθαίνει, με αμελητέες τριβές μεταβάλλοντας τον όγκο που καταλαμβάνει το αέριο στο δοχείο .

Συνδέουμε τους ακροδέκτες της αντίστασης με πηγή ΗΕΔ $E = 26$ V και εσωτερικής αντίστασης $r = 1\Omega$ ενώ η συνολική αντίσταση των αγωγών στο εξωτερικό κύκλωμα είναι 1Ω.



Στα τοιχώματα του δοχείου υπάρχει μετροταινία που μας επιτρέπει να μετράμε την απόσταση του μεταλλικού δίσκου από την βάση του δοχείου. Στο εσωτερικό του δοχείου τοποθετούμε αισθητήρα θερμοκρασίας συνδεδεμένο με Η/Υ. Οι ενδείξεις του αισθητήρα σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη στιγμή που ανοίγουμε το κύκλωμα εμφανίζονται στον πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Χρόνος (s)	Θερμοκρασία (^oC)	Απόσταση μεταλλικού δίσκου από την βάση του δοχείου (cm)
0	25,0	45,0
10	28,5	
20	32,0	
30	35,5	
40	38,8	

Να γίνουν τα διαγράμματα θερμοκρασίας - χρόνου, πίεσης - θερμοκρασίας, πίεσης – όγκου για την μεταβολή.

Από το διάγραμμα θερμοκρασίας – χρόνου να υπολογιστεί η μέση μεταβολή της θερμοκρασίας ανά μονάδα χρόνου.

Με βάση τις πειραματικές μετρήσεις και με χρήση των θεωρητικά αναμενόμενων τιμών της ειδικής γραμμοριακής θερμοχωρητικότητας του αερίου υπό σταθερή πίεση C_P που παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί να προσδιοριστεί το αέριο και να υπολογιστεί η μάζα του.

Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του πίνακα με τις τιμές που αναμένουμε να πάρουμε.

Δίνονται $P_{atm} = 1{,}09\cdot10^5$ Pa, $g \approx 10$ m/s^2, $R = 8{,}31$ joule·mol^{-1}·K^{-1} (Σταθερά των αερίων). $AB_O=16$, $AB_{He}=4$, $AB_H=1$, $AB_C=12$.

Αέριο	Θεωρητικά αναμενόμενη τιμή C_p (J/(mol·K)	Συνήθης Πειραματική τιμή C_p (J/(mol·K)
Ήλιο (He)	20,8	20,8
Υδρογόνο (H_2)	29,1	28,8
Διοξείδιο του Άνθρακα CO_2	36,6	33,2

Συνοπτικές απαντήσεις / λύσεις:

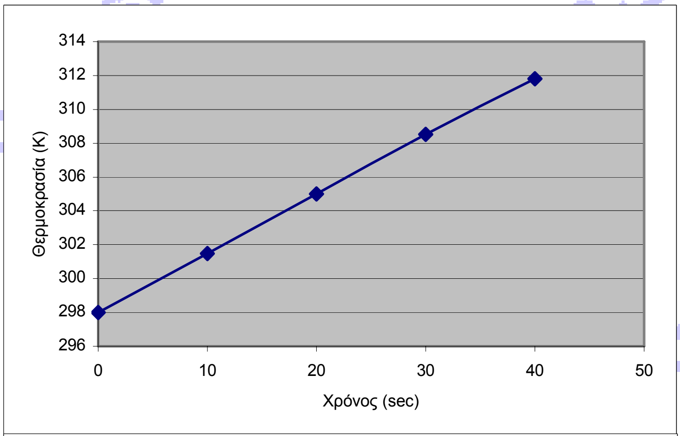
Η πίεση στο εσωτερικό του δοχείου είναι:

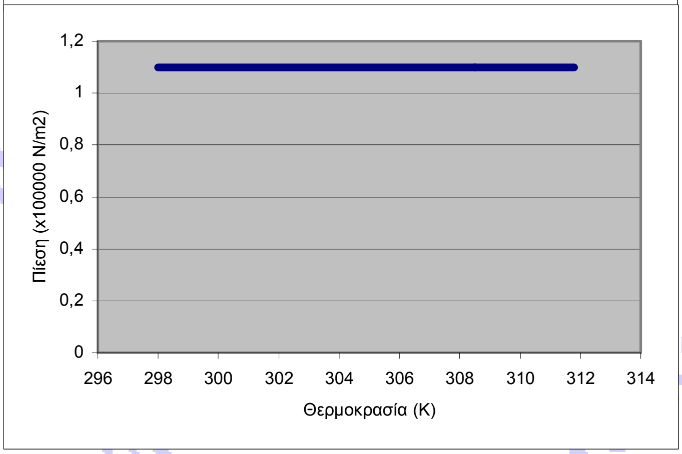
$P_{αέρ} = P_{ατμ} + P_{εμβ} \Rightarrow P_{αέρ} = P_{ατμ} + \frac{mg}{S} \Rightarrow$

$P_{αέρ} = 1,09 \cdot 10^5 + 10 \cdot 10/0,1 = 1,1 \cdot 10^5$ N/m^2

Ο αρχικός όγκος του αερίου είναι $V = S \cdot l = 0,10 \cdot 0,45 = 0,045$ m^3

Από την καταστατική εξίσωση βρίσκουμε ότι: $n = \frac{PV}{RT} \approx 2.00$ moles αερίου





Υπολογίζουμε την θερμότητα που προσφέρεται στο αέριο: $Q = I^2Rt$

$I = E/R_{tot} = 26/26 = 1$ A

Για t = 10 s, $Q = 1^2 \cdot 24 \cdot 10 = 240$ joule

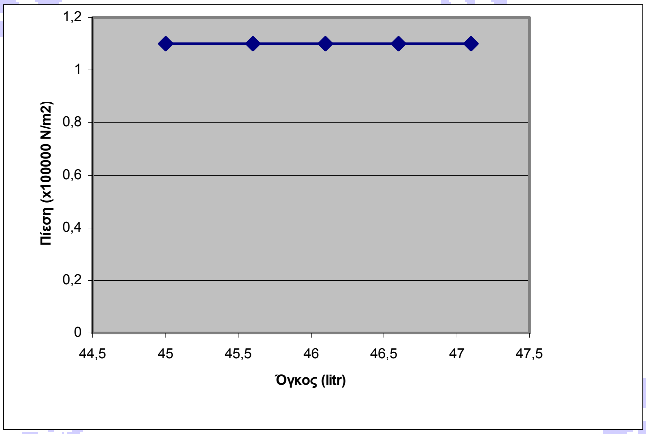
Από το διάγραμμα θερμοκρασίας χρόνου βρίσκουμε ότι σε 10 sec η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι 3,45 grad δηλαδή η μεταβολή της θερμοκρασίας με τον χρόνο είναι 0,345 grad/s.

$Q=nC_p\Delta T \Rightarrow C_p=34,78$ J $\cdot$ mol$^{-1} \cdot$ K^{-1}

Η τιμή που υπολογίσαμε πλησιάζει περισσότερο στην τιμή της ειδικής γραμμοριακής θερμοχωρητικότητας του αερίου υπό σταθερή πίεση για το CO_2.

Η μάζα του CO_2 θα είναι $m=n \cdot MB = 88$ g

Η απόσταση του μεταλλικού δίσκου από την βάση του δοχείου είναι ανάλογη του όγκου του αερίου $l=V/S = nRT/(P \cdot S)$ οι τιμές που προκύπτουν είναι:



Χρόνος (s)	Θερμοκρασία (^oC)	Απόσταση μεταλλικού δίσκου από την βάση του δοχείου (cm)
0	25,0	45,0
10	28,5	45,6
20	32,0	46,1
30	35,5	46,6
40	38,8	47,1